

УДК 681.51.033.26

А.А. Несенчук

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ И СИНТЕЗ СЕМЕЙСТВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА КОРНЕВОГО ПОРТРЕТА СИСТЕМЫ

Анализируется поведение динамических систем четвертого порядка в условиях интервальной вариации параметров с использованием корневых портретов. Выполняется исследование динамики и устанавливаются закономерности поведения корневых портретов систем четвертого порядка с интервальной неопределенностью на границе асимптотической устойчивости. Определяются условия устойчивости и выражения для вычисления интервалов параметров, при которых обеспечивается робастная устойчивость системы.

Введение

Задачи анализа и синтеза управления в динамических системах различной физической природы (в том числе технических), функционирующих в условиях значительной параметрической неопределенности, в настоящее время весьма актуальны [1–8]. Одной из них является, например, задача управления потокосцеплением в системах векторного управления электроприводом в условиях параметрической неопределенности, поскольку качество управления потокосцеплением в значительной степени определяет качество управления электромагнитным моментом и скоростью, а также энергетическую эффективность привода. Поэтому большое значение имеет исследование устойчивости и параметрического синтеза динамических систем управления объектами, параметры которых изменяются в некоторых интервалах значений.

Среди современных методов синтеза систем управления сложными техническими объектами [5] наиболее распространенными являются корневые [1, 2, 6], частотные [7, 8], алгебраические [3, 4], модального управления [5], позволяющие задавать желаемое расположение корней в плоскости собственных частот, пространства состояний [5], хорошо подходящие для структурного синтеза, и ряд других. Интересны задачи об устойчивости в условиях неопределенности, решаемые в современных постановках в робастном варианте [2–8], для которых может быть применен корневой подход. Преимущество данного подхода к проблеме состоит в том, что само его использование уже предполагает параметрические вариации (неопределенность). Он является мощным методом синтеза систем и отличается большой наглядностью, позволяя не только рассчитывать требуемые значения параметров системы, но и в деталях наблюдать характер изменения динамических свойств и реакцию системы в ответ на параметрические вариации, что особенно важно при исследовании систем с неопределенными, в частности интервальными, параметрами.

В настоящей статье рассматривается метод исследования и параметрического синтеза динамических систем четвертого порядка с интервальной неопределенностью, основанный на установлении закономерностей поведения корневых портретов систем на границе асимптотической устойчивости.

1. Корневой портрет интервальной динамической системы

Рассмотрим динамическую систему, описываемую семейством интервальных характеристических уравнений [3] четвертого порядка вида

$$s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0, \quad (1)$$

где s – комплексное переменное, $s = \sigma + i\omega$.

Изменение коэффициентов характеристического уравнения динамической системы в определенных интервалах отражает вариацию ее физических параметров, их нежелательное изменение по отношению к номинальным значениям, а именно параметрическую неопределенность системы. Предположим, что коэффициенты (1) действительны, неотрицательны и изменяются в следующих пределах:

$$\underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j, \quad j = \overline{1,4}, \quad a_0 = 1, \quad (2)$$

где \underline{a}_j и \bar{a}_j – соответственно минимальное и максимальное значения замкнутого интервала изменения значений коэффициента a_j .

Устойчивость системы с параметрической неопределенностью [5–7], описываемой семейством характеристических уравнений (1), определяется расположением корней семейства относительно мнимой оси $i\omega$ плоскости корней s , являющейся границей асимптотической устойчивости системы.

Перепишем уравнение (1), сделав в нем замену переменного $s = \sigma + i\omega = i\omega$ ($\sigma = 0$):

$$\omega^4 - a_1\omega^3i - a_2\omega^2 + a_3\omega i + a_4 = 0, \quad (3)$$

и на основе (3) выведем уравнение корневого годографа на границе устойчивости

$$-a_1\omega^3 + a_3\omega = 0 \quad (4)$$

и уравнение (функцию) параметра [4] на границе устойчивости

$$f(\omega) = -\omega^4 + a_2\omega^2 = a_4 \quad (5)$$

для рассматриваемой интервальной динамической системы (ИДС) [5–7].

Под корневым годографом будем понимать *свободный корневой годограф* [6], т. е. формируемый при вариации свободного члена уравнения (1).

Уравнение корневого годографа (4) представляет собой также уравнение линий уровня поля F_i свободных корневых траекторий [6], параметром которого [6] определим коэффициент $a_{n-1} = a_3$. Оно используется для нахождения координат ω точек пересечения границы устойчивости (оси $i\omega$) ветвями корневых годографов данного поля и *корневого портрета* (годографа)

$$P = \{F_i \mid i = 1, 2, \dots\} \quad (6)$$

системы [6] в целом, который представляет собой бесконечное множество полей корневых траекторий и, следовательно, является носителем их свойств.

Функция параметра (5) применяется для определения значений параметра a_4 , который называется *свободным параметром* годографа [6].

2. Область пересечений корневого портрета системы

Ввиду аналитичности и непрерывности функций (4) и (5) очевидно, что точки пересечения границы устойчивости (оси $i\omega$) ветвями годографов семейства P полей корневых траекторий (6) при изменении коэффициентов (1) в пределах интервала значений

$$0 < a_j < +\infty \quad (7)$$

образуют на этой оси некоторую *область пересечений* D_ω^P .

Определение 1. Областью пересечений D_ω^P корневого портрета интервальной динамической системы, описываемой характеристическим уравнением (1), назовем область $[0, +\infty]$ на

границе $i\omega$ асимптотической устойчивости системы, в пределах которой располагаются значения функции параметра (5) для данного портрета при условии вариации всех коэффициентов a_j уравнения (1) в пределах (7).

Очевидно, что D_ω^P представляет собой непрерывную область. Полная область пересечений охватывает также и отрицательную полуось оси $i\omega$, но ввиду симметричности портрета относительно оси σ здесь рассматривается только верхняя полуплоскость плоскости корней s .

Каждое поле F_i (6) и каждая ветвь b_i годографов поля образуют некоторые подобласти: подобласть $D_{\omega_i}^F$, $i = 1, 2, \dots$, и непрерывную подобласть $D_{\omega_i}^b$, $i = 1, 2, \dots$, указанной области D_ω^P соответственно.

3. Область экстремумов корневого портрета системы. Мажоранта и миноранта

Определим максимальные и минимальные значения функции параметра (5) в подобласти $D_{\omega_i}^F \subset D_\omega^P$, образуемой годографами поля корневых траекторий (6) при пересечении границы устойчивости. Для этого выполним исследование данной функции на экстремум с помощью первой производной.

Очевидно, что максимальное значение параметра a_4 достигается при $a_2 = \bar{a}_2$, а минимальное значение – при $a_2 = \underline{a}_2$. Перепишем (5) для определения мажоранты функции параметра:

$$a_{4\max} = -\omega^4 + \bar{a}_2\omega^2. \quad (8)$$

Возьмем первую производную от функции параметра (8) и приравняем ее нулю:

$$-4\omega^3 + 2\bar{a}_2\omega = 0. \quad (9)$$

Решив (9), получим три точки экстремума для мажоранты функции параметра на границе устойчивости для поля при $a_2 = \bar{a}_2$:

$$\begin{aligned} \omega_{e\max} &= 0, & a_{4e\max} &= 0; \\ \omega_{e\max} &= \pm \sqrt{\frac{\bar{a}_2}{2}}, & a_{4e\max} &= -\omega_{e\max}^4 + \bar{a}_2 \cdot \omega_{e\max}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что мажоранта (8) с точками экстремума (10) является также мажорантой всего корневого портрета в целом.

Перепишем (5) для определения миноранты функции параметра:

$$a_{4\min} = -\omega^4 + \underline{a}_2\omega^2. \quad (11)$$

Возьмем первую производную от функции параметра (11) и приравняем ее нулю:

$$-4\omega^3 + 2\underline{a}_2\omega = 0. \quad (12)$$

Решив (12), получим три точки экстремума для миноранты функции параметра на границе устойчивости для поля при $a_2 = \underline{a}_2$:

$$\begin{aligned} \omega_{e\min} &= 0, & a_{4e\min} &= 0; \\ \omega_{e\min} &= \pm \sqrt{\frac{\underline{a}_2}{2}}, & a_{4e\min} &= -\omega_{e\min}^4 + \underline{a}_2 \cdot \omega_{e\min}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что миноранта (11) с точками экстремума (13) является также минорантой всего корневого портрета в целом.

О п р е д е л е н и е 2. Областью экстремумов D_{ω}^e корневого портрета интервальной динамической системы, описываемой характеристическим уравнением (1), назовем область $[0, \omega_{e_{\max}}]$ на границе $i\omega$ асимптотической устойчивости системы, в пределах которой располагаются значения экстремумов $a_{4e_{\max}}$ (10) и $a_{4e_{\min}}$ (13) функции параметра (5) данного портрета при условии вариации всех коэффициентов a_j уравнения (1) в пределах (7).

4. Диаграмма распределения функции параметра корневого портрета системы вдоль границы устойчивости

Диаграмма распределения значений функции параметра (5) вдоль границы устойчивости для корневого портрета интервальной динамической системы представлена мажорантой (8) и минорантой (11) функции параметра (рис. 1). Ввиду симметричности данного рисунка относительно оси $i\omega$ рассматривается только верхняя полуплоскость. Область пересечений D_{ω}^P корневого портрета системы располагается в интервале $[0, +\infty]$, область экстремумов D_{ω}^e – в интервале $[0, \omega_{e_{\max}}]$.

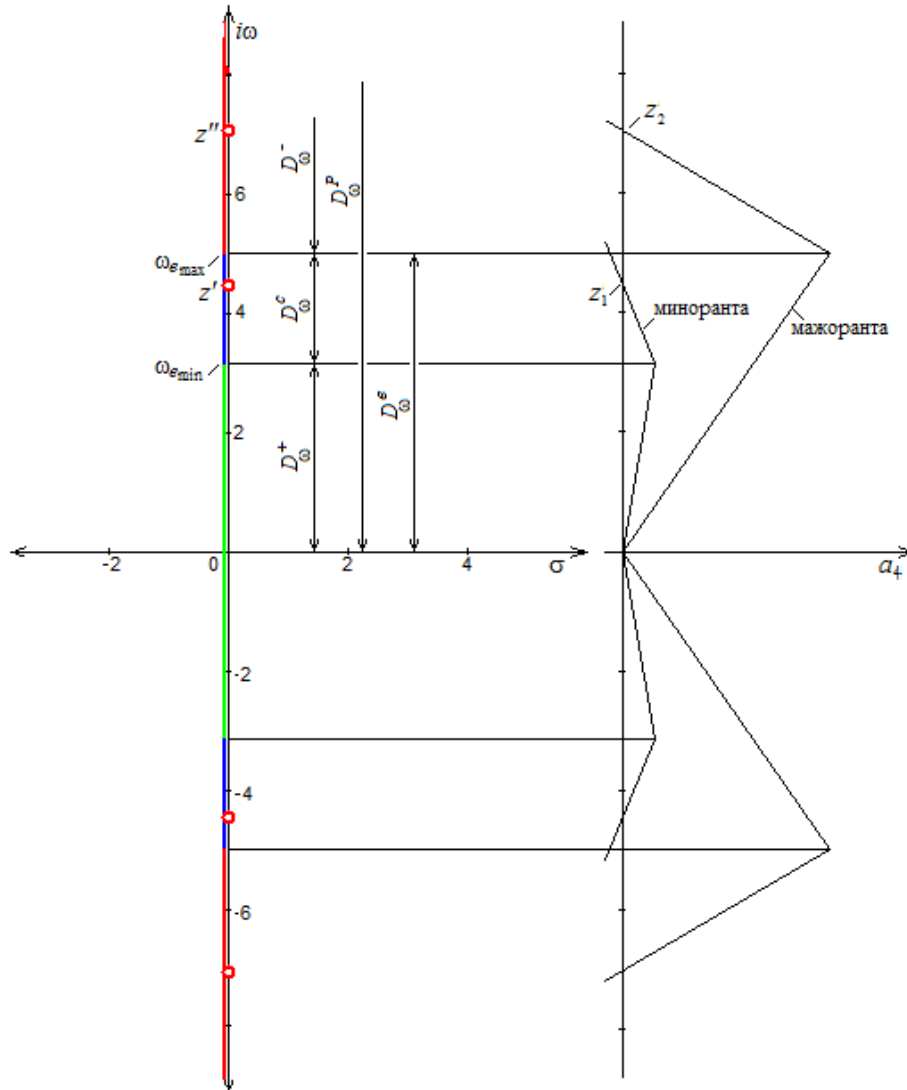


Рис. 1. Диаграмма распределения функции параметра корневого годографа вдоль границы устойчивости интервального семейства систем четвертого порядка

Для упрощения рисунка точки экстремума функции соединены прямыми линиями, хотя в действительности они представляют собой кривые.

Значения $\omega_{e_{\min}}$ и $\omega_{e_{\max}}$ представляют собой координаты ω точек, соответствующих минимальному и максимальному значениям экстремума функции параметра корневого портрета интервальной динамической системы.

Таким образом, область пересечений D_{ω}^P может быть разделена на три области (см. рис. 1):

D_{ω}^+ – возрастания функции параметра;

D_{ω}^- – убывания функции параметра;

D_{ω}^c – сочетания участков возрастания и убывания функции параметра.

Интервал $[z', z''] \subseteq Z_{\omega}$ на рис. 1 представляет собой область, в которой происходит миграция начальных точек (полюсов) [б] корневого портрета через границу устойчивости в правую полуплоскость корней. Точкам z', z'' соответствуют точки z_1, z_2 на диаграмме.

На интервале $[0, z']$, охватывающем полностью область D_{ω}^+ и частично область D_{ω}^c :

$$D_{\omega}^+ \subset [0, z'], [0, z'] \cap D_{\omega}^c,$$

граница устойчивости пересекается только положительными ветвями семейства годографов корневого портрета системы, так как значения функции параметра (5) здесь только положительны (см. рис. 1). Семейство начальных точек годографов корневого портрета системы полностью располагается в левой полуплоскости корней, однако положительные ветви годографов портрета частично лежат в правой полуплоскости корней. Следовательно, в семействе (1) полиномов, описывающих динамику системы, могут быть неустойчивые полиномы, но при определенных значениях интервалов (2) семейство полностью устойчиво. Это область устойчивости системы.

На интервале $[z', z'']$, частично принадлежащем области D_{ω}^c и частично области D_{ω}^- :

$$[z', z''] \cap D_{\omega}^c, [z', z''] \cap D_{\omega}^-,$$

граница устойчивости пересекается как положительными, так и отрицательными ветвями семейства годографов корневого портрета системы, так как функция параметра (5) принимает здесь как положительные, так и отрицательные значения (см. рис. 1). Некоторые начальные точки, а следовательно, и целые ветви годографов корневого портрета мигрировали в правую полуплоскость, т. е. в семействе (1) в данном случае содержатся как устойчивые, так и неустойчивые полиномы. Эта область представляет собой область неустойчивости системы.

На интервале $[z'', \infty]$, полностью принадлежащем области D_{ω}^- :

$$[z'', \infty] \subset D_{\omega}^-,$$

граница устойчивости пересекается только отрицательными ветвями семейства годографов корневого портрета системы, так как значения функции параметра (5) здесь только отрицательны (см. рис. 1). Все семейство начальных точек годографов, а следовательно, и соответствующих положительных ветвей корневого портрета в данном случае мигрировало в правую полуплоскость. При этом среди ветвей годографов корневого портрета системы не имеется ни одной положительной ветви (части ветви), расположенной в левой полуплоскости, а в семействе (1), следовательно, не имеется ни одного устойчивого полинома. Эта область представляет собой область неустойчивости, и данное состояние портрета характеризует состояние неустойчивости системы.

5. Реальная область пересечений

Определим пределы области D_{ω}^R пересечения границы устойчивости ветвями корневого портрета интервальной динамической системы, описываемой характеристическим полиномом (1). С этой целью рассмотрим уравнение корневого годографа системы (4) и определим значения его корней:

$$-a_1\omega^3 + a_3\omega = 0;$$

$$\begin{cases} \omega = 0, \\ \omega^2 = \frac{a_3}{a_1}; \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \pm \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}. \end{cases}$$

Очевидно, что при $\omega > 0$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\bar{a}_3}{\underline{a}_1}}, \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{\underline{a}_3}{\bar{a}_1}}, \quad (14)$$

где ω_{\max} и ω_{\min} – границы реальной области пересечений D_{ω}^R границы устойчивости ветвями годографов корневого портрета в целом.

Определение 3. Реальной областью пересечений D_{ω}^R корневого портрета интервальной динамической системы, описываемой характеристическим уравнением (1), назовем область $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ (14) на границе $i\omega$ асимптотической устойчивости системы, в пределах которой имеет место пересечение этой границы ветвями годографов корневого портрета:

$$[\omega_{\min}, \omega_{\max}] \subseteq D_{\omega}^R. \quad (15)$$

Очевидно, что границы (14) реальной области пересечений D_{ω}^R определяются значениями коэффициентов a_1 и a_3 в отличие от границ области экстремумов D_{ω}^e , которые определяются значениями коэффициента a_2 (см. (10), (13)).

6. Условия устойчивости системы и определение параметров, обеспечивающих устойчивость

Сформулируем условия устойчивости интервальной динамической системы четвертого порядка, описываемой семейством характеристических полиномов (1). Эти условия зависят от того, каким образом располагается реальная область пересечений D_{ω}^R корневого портрета системы по отношению к областям D_{ω}^+ возрастания функции параметра, D_{ω}^- убывания функции параметра и D_{ω}^c сочетания участков возрастания и убывания функции параметра. Определим три возможных варианта такого расположения и соответствующие каждому из них условия устойчивости системы:

6.1. Реальная область пересечений принадлежит области D_{ω}^+ возрастания функции параметра

$$D_{\omega}^R \subset D_{\omega}^+. \quad (16)$$

Такой случай расположения D_{ω}^R имеет место при условии

$$\omega_{\max} < \omega_{e\min}.$$

Ввиду известных асимптотических свойств корневых годографов [5, 6] можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. При выполнении условия (16) семейство Z начальных точек годографов корневого портрета динамической системы, описываемой характеристическим уравнением (1), располагается в левой полуплоскости L корней:

$$Z \subset L. \quad (17)$$

Рассмотрим множество S участков s_i ветвей корневого портрета P системы:

$$S = \{s_i = [0, a_4(\omega_i)], i = 1, 2, \dots\}, \quad (18)$$

где $a_4(\omega_i)$ – значения функции (5) в точках на оси $i\omega$ с координатами ω_i ; $S \subset P$ и $S \subset L$ (см. (17)).
Тогда на основе (16) и (17) запишем

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} s_i = \inf S = [0, \underline{a}_4(\omega_{\min})], \quad (19)$$

где $\underline{a}_4(\omega_{\min})$ – минимальное значение функции (5) в точке с координатой ω_{\min} (см. (14)).

Следовательно,

$$\forall a_4 \in [\underline{a}_4, \bar{a}_4] [a_4 \in [0, \underline{a}_4(\omega_{\min})] \rightarrow a_4 \in S \ \& \ P \subset L]; \quad (20)$$

$$\forall a_4 \in [\underline{a}_4, \bar{a}_4] [a_4 \notin [0, \underline{a}_4(\omega_{\min})] \rightarrow a_4 \notin S \ \& \ P \not\subset L]. \quad (21)$$

На основании (18)–(21) сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. Для обеспечения асимптотической устойчивости динамической системы, описываемой семейством (1) интервальных характеристических уравнений и удовлетворяющей выражению (16), должно выполняться условие

$$\bar{a}_4 < \underline{a}_4(\omega_{\min}). \quad (22)$$

Определение 4. Доминирующими полиномами в семействе полиномов (1) назовем такие полиномы с постоянными коэффициентами, принадлежащие данному семейству, устойчивость которых гарантирует устойчивость всего семейства в целом.

Из условия (22) следует, что асимптотическая устойчивость системы определяется значением $\underline{a}_4(\omega_{\min})$. Это означает, что доминирующим в данном случае будет полином семейства (1), определяемый в точке с координатой ω_{\min} и значением функции параметра, равным $\underline{a}_4(\omega_{\min})$. В свою очередь точка с координатой ω_{\min} определяется выражениями (14), а именно коэффициентами $\bar{a}_1, \underline{a}_3$ полинома (1); минимальное значение параметра $\underline{a}_4(\omega_{\min})$ в данной точке определяется выражением (11), т. е. коэффициентом \underline{a}_2 .

На основании вышесказанного сформулируем следующее условие устойчивости.

Условие устойчивости 1. Если корневой портрет P (6) интервальной динамической системы, описываемой семейством характеристических полиномов (1), удовлетворяет выражению (16), то асимптотическая устойчивость такой системы обеспечивается, когда устойчивым является следующий полином данного семейства:

$$s^4 + \bar{a}_1 s^3 + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s + \bar{a}_4 = 0. \quad (23)$$

Условие устойчивости 1 используется для проверки системы на устойчивость, выражение (22) может быть использовано для параметрического синтеза систем.

6.2. Реальная область пересечений принадлежит области D_{ω}^- убывания функции параметра

$$D_{\omega}^R \subset D_{\omega}^-. \quad (24)$$

Такой случай расположения D_{ω}^R имеет место при условии

$$\omega_{\min} \geq \omega_{e_{\max}}.$$

С учетом известных асимптотических свойств корневых годографов [5, 6] можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3. При выполнении условия (24) семейство Z начальных точек годографов корневого портрета динамической системы, описываемой характеристическим полиномом (1), располагается в правой полуплоскости R корней:

$$Z \subset R. \quad (25)$$

Учитывая особенности асимптотических свойств годографов систем четвертого порядка [5, 6], можно заключить, что из выражения (25) следует неустойчивость всего семейства (1) в целом. В данном случае в семействе (1) не будет ни одного устойчивого полинома.

6.3. Реальная область пересечений полностью или частично принадлежит области D_ω^c чередования участков возрастания и убывания функции параметра:

$$D_\omega^R \subset D_\omega^c \vee D_\omega^R \cap D_\omega^c. \quad (26)$$

Такой вариант расположения D_ω^R имеет место, когда не выполняется ни одно из условий

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &< \omega_{e_{\min}}, \\ \omega_{\min} &\geq \omega_{e_{\max}}. \end{aligned}$$

В данном случае определенная часть (P^+) годографов корневого портрета P пересекает границу устойчивости в областях возрастания и определенная (P^-) – в областях убывания функции параметра (5):

$$P = P^+ + P^-. \quad (27)$$

Возрастающая часть портрета (27), когда $P^- = \emptyset$, была рассмотрена в п. 6.1. Поэтому в п. 6.2 будем рассматривать только убывающую часть портрета P^- .

Рассмотрим семейство Z начальных точек годографов корневого портрета P^- . Учитывая особенности асимптотических свойств корневых годографов [5, 6], можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4. При выполнении условия (26) семейство Z начальных точек годографов корневого портрета динамической системы, описываемой характеристическим уравнением (1), может располагаться как в левой L , так и в правой R полуплоскости корней, т. е. могут быть следующие варианты расположения Z :

$$Z \subset L; \quad (28)$$

$$Z \subset (L + R); \quad (29)$$

$$Z \subset R. \quad (30)$$

Очевидно, что варианты (29) и (30) имеют место, когда

$$D_\omega^R \cap [z', \infty] \quad (31)$$

или

$$D_\omega^R \subset [z', \infty]. \quad (32)$$

Поскольку варианты (29)–(32) заведомо означают неустойчивость системы в целом, далее рассмотрим только вариант (28) расположения полюсов системы:

$$\omega_{\max} < \omega(z'), \quad (33)$$

где $\omega(z')$ – координата ω в точке z' (см. рис. 1).

Определим множество S участков s_i ветвей корневого портрета P системы выражением (18). Тогда на основе (26) и (28) запишем

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} s_i = \inf S = [0, \underline{a}_4(\omega_{\max})], \quad (34)$$

где $\underline{a}_4(\omega_{\max})$ – минимальное значение функции (5) в точке с координатой ω_{\max} (14).

Следовательно,

$$\forall a_4 \in [\underline{a}_4, \overline{a}_4] [a_4 \in [0, \underline{a}_4(\omega_{\max})] \rightarrow a_4 \in S \ \& \ P \subset L]; \quad (35)$$

$$\forall a_4 \in [\underline{a}_4, \overline{a}_4] [a_4 \notin [0, \underline{a}_4(\omega_{\max})] \rightarrow a_4 \notin S \ \& \ P \not\subset L]. \quad (36)$$

На основе (26)–(36) сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 5. Для обеспечения асимптотической устойчивости динамической системы, описываемой семейством (1) интервальных характеристических уравнений и удовлетворяющей выражению (26), должно выполняться условие

$$\overline{a}_4 < \min \{ \underline{a}_4(\omega_{\min}), \underline{a}_4(\omega_{\max}) \}. \quad (37)$$

Из условия (37) следует, что асимптотическая устойчивость системы для части P^- портрета (27) при выполнении условия (28) определяется значением $\underline{a}_4(\omega_{\max})$. Это означает, что доминирующим в данном случае будет полином семейства (1), определяемый в точке с координатой ω_{\max} и значением функции параметра, равным $\underline{a}_4(\omega_{\max})$. В свою очередь, точка с координатой ω_{\max} определяется выражениями (14), а именно коэффициентами $\underline{a}_1, \overline{a}_3$ полинома (1); минимальное значение параметра $\underline{a}_4(\omega_{\max})$ в данной точке определяется выражением (11), т. е. коэффициентом \underline{a}_2 . Поэтому для части P^- (27) корневого портрета системы с целью проверки асимптотической устойчивости достаточно проверить на устойчивость следующий полином семейства (1):

$$s^4 + \underline{a}_1 s^3 + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s + \overline{a}_4 = 0. \quad (38)$$

Учитывая, что портрет в данном случае является составным (27), т. е. одна его часть (P^+) пересекает границу устойчивости в области возрастания, а другая (P^-) – в области убывания функции параметра, для проверки устойчивости следует использовать полиномы (23) и (38). Сформулируем следующее условие устойчивости.

Условие устойчивости 2. Если корневой портрет P (27) интервальной динамической системы, описываемой семейством характеристических уравнений (1), удовлетворяет выражению (26), то асимптотическая устойчивость данной системы обеспечивается, когда устойчивыми являются следующие полиномы семейства:

$$s^4 + \overline{a}_1 s^3 + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s + \overline{a}_4 = 0; \quad (39)$$

$$s^4 + \underline{a}_1 s^3 + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s + \overline{a}_4 = 0. \quad (40)$$

Как показывают полученные выше результаты, в случае (26) для проверки асимптотической устойчивости системы также может быть использовано только одно уравнение с постоянными коэффициентами семейства (1). Какое именно, зависит от результатов проверки условия (37). Если в результате проверки окажется, что $\min \{ \underline{a}_4(\omega_{\min}), \underline{a}_4(\omega_{\max}) \} = \underline{a}_4(\omega_{\min})$, то проверку следует выполнять с использованием уравнения (39). Если же окажется, что $\min \{ \underline{a}_4(\omega_{\min}), \underline{a}_4(\omega_{\max}) \} = \underline{a}_4(\omega_{\max})$, то ее следует выполнять согласно (40).

Для определения значений коэффициентов (1), при которых выполняются соотношения (28) и (33), т. е. коэффициентов, определяющих подсемейство годографов корневого портрета, которые пересекают границу устойчивости в области $[0, z']$, используются формулы (5) и (14). Коэффициенты a_1 и a_3 при этом должны удовлетворять соотношению

$$\sqrt{\frac{\bar{a}_3}{a_1}} < \omega(z'), \quad \bar{a}_3 < a_1 \omega^2(z'). \quad (41)$$

Условия устойчивости 1 и 2 применяются для проверки системы на устойчивость, выражения (22) и (37) могут быть использованы для параметрического синтеза систем.

Пример. Коэффициенты исходного полинома (1) заданы в табл. 1.

Таблица 1

| a_j | \underline{a}_j | \bar{a}_j |
|-------|-------------------|-------------|
| a_4 | 20 | 30 |
| a_3 | 40 | 250 |
| a_2 | 20 | 70 |
| a_1 | 5 | 10 |
| a_0 | 1 | 1 |

В табл. 2 приведены значения характеристик, полученные в результате вычислений по приведенным выше формулам.

Указанные в табл. 2 области показаны на рис. 2. Точки, соответствующие доминирующим полиномам (39), (40), обозначены соответственно r' и r'' .

Таблица 2

| Значения характеристик | Тип области | | |
|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|-------------|
| | Область экстремумов D_ω^e | Реальная область D_ω^R | $[z', z'']$ |
| $\omega_{e\min}$ | 3,16 | — | — |
| $\omega_{e\max}$ | 5,92 | — | — |
| $a_{4e\min}$ | 100,04 | — | — |
| $a_{4e\max}$ | 1223,96 | — | — |
| ω_{\min} | — | 2 | — |
| ω_{\max} | — | 7,1 | — |
| $\underline{a}_4(\omega_{\min})$ | — | 64 | — |
| $\underline{a}_4(\omega_{\max})$ | — | -1532,97 | — |
| $\omega(z')$ | — | — | 4,47 |
| $\omega(z'')$ | — | — | 8,37 |

В рассматриваемом случае реальная область пересечений полностью охватывает область экстремумов: $D_\omega^e \subset D_\omega^R, [r', r''] \subseteq D_\omega^R$ (рис. 2). Очевидно, что данное семейство полиномов в целом является неустойчивым, так как его корневой портрет содержит подсемейство годографов, пересекающих границу устойчивости в области D_ω^- убывания функции параметра (см. п. 6.2 и рис. 2).

В области $Z_\omega = [z', z'']$ имеются полюсы, мигрировавшие в правую полуплоскость корней (см. (29)), что подтверждается отрицательным значением параметра $\underline{a}_4(\omega_{\max})$, приведенным в табл. 2.

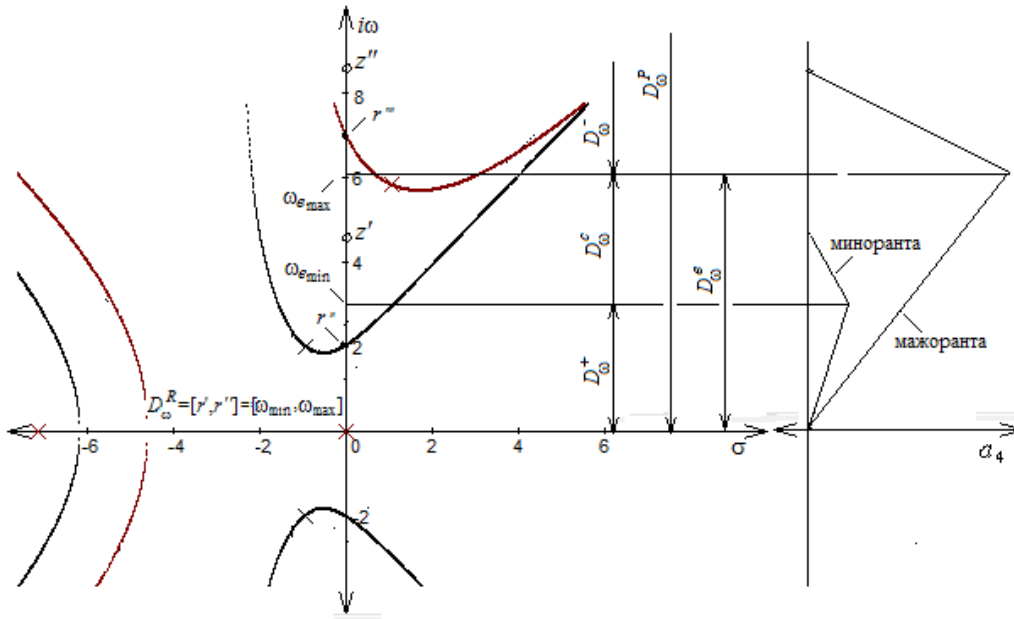


Рис. 2. Динамика корневого портрета интервальной динамической системы на границе асимптотической устойчивости

Доминирующие полиномы данного семейства имеют следующий вид:

$$s^4 + 10s^3 + 20s^2 + 40s + 30 = 0; \tag{42}$$

$$s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 250s + 30 = 0. \tag{43}$$

Проверка полиномов на устойчивость показала, что полином (42), годограф которого пересекает границу устойчивости в точке $\underline{a}_4(\omega_{\min})$, является устойчивым, а полином (43), годограф которого пересекает границу устойчивости в точке $\underline{a}_4(\omega_{\max})$, имеет два корня, действительные части которых положительны, т. е. не является устойчивым. Это подтверждает сделанные выше выводы об устойчивости заданного семейства полиномов.

Выделим устойчивое подсемейство полиномов в заданном неустойчивом. Устойчивое подсемейство годографов, удовлетворяющее условиям (33) и (37), пересекает границу устойчивости в области, ограниченной интервалом $[r', z']$, поскольку в этом случае все начальные точки годографов семейства располагаются в левой полуплоскости корней (28) (см. разд. 4).

Для вычисления максимального значения коэффициента a_3 , которое определило бы устойчивое подсемейство годографов портрета, используем выражение (41):

$$\overline{a}_3 < \underline{a}_1 \cdot 4,47^2, \overline{a}_3 < 99,9. \tag{44}$$

На основании (44) определим $\overline{a}_3 = 80$.

После этого, используя условие (37), установим новые интервалы вариации a_4 , приняв

$$\omega_{\max} \in [r', z'], \omega_{\max} = 3. \tag{45}$$

Тогда

$$\underline{a}_4(\omega_{\min}) = 64, \underline{a}_4(\omega_{\max}) = 99.$$

На основании (37) примем $\overline{a}_4 < \underline{a}_4(\omega_{\min}), \overline{a}_4 = 60$ и запишем доминирующие полиномы для подсемейства:

$$s^4 + 10s^3 + 20s^2 + 40s + 60 = 0; \tag{46}$$

$$s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 80s + 60 = 0. \tag{47}$$

Все корни полиномов (46) и (47) имеют отрицательные действительные части. Следовательно, согласно условию устойчивости 2 подсемейство годографов корневого портрета с измененными предельными значениями a_3 и a_4 ($\bar{a}_3 = 80, \bar{a}_4 = 60$) является устойчивым.

Таким образом, посредством установления верхней границы ω_{\max} реальной области пересечений согласно (45) и соответствующей настройки верхнего предела интервала изменения коэффициента a_3 в заданном табл. 1 неустойчивом семействе полиномов выделено подсемейство, которое является устойчивым.

На основе описанного выше метода в среде Visual Studio разработана программа, позволяющая выполнять исследование динамики систем с интервальной неопределенностью при помощи диаграммы распределения функции параметра вдоль границы устойчивости. На рис. 3 в качестве примера приведено главное окно данной программы, в котором показаны годографы корневого портрета для доминирующих полиномов системы, ограничивающие реальную область пересечений, и соответствующая диаграмма распределения функции параметра (5) вдоль границы устойчивости.

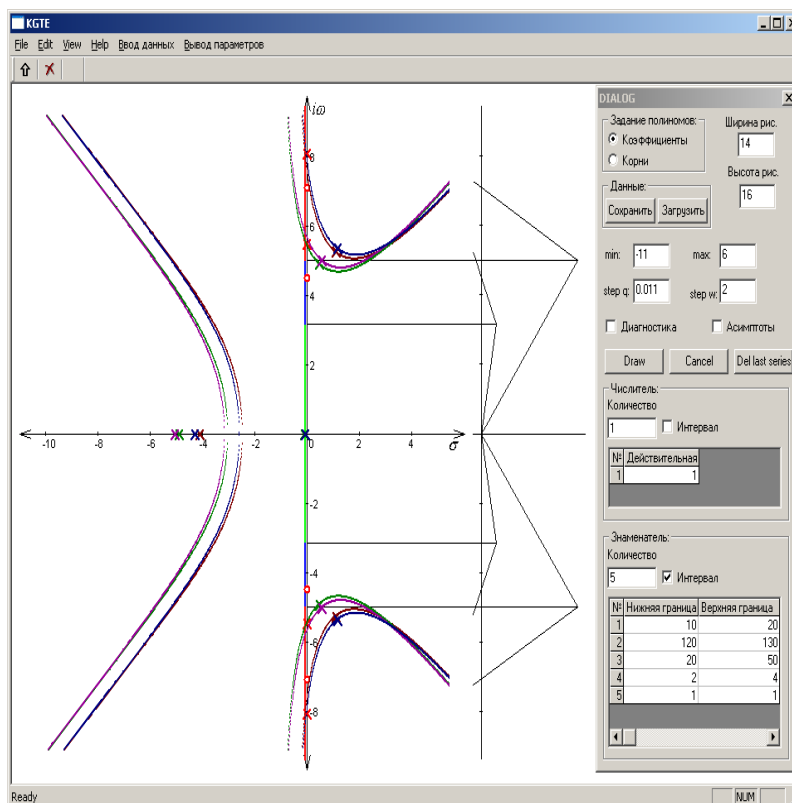


Рис. 3. Главное окно программы исследования динамических свойств интервальных систем на основе диаграммы распределения функции параметра вдоль границы устойчивости

В качестве входных данных программы вводятся коэффициенты или корни числителя и знаменателя передаточной функции системы. В поля «min», «max» и «step q» вводятся соответственно диапазон и шаг изменения значений δ , в поле «step w» – шаг изменения степени ω в уравнении корневого годографа. Полиномы задаются интервалами вариации коэффициентов. Предусмотрена возможность вычерчивания асимптот годографов.

Рассмотренный метод может получить свое развитие в ряде направлений, одним из которых является его обобщение на системы более высоких порядков.

Заключение

В работе выполнено исследование поведения динамических систем четвертого порядка в условиях интервальной вариации параметров с использованием корневых портретов. Установ-

лены закономерности поведения корневых портретов систем четвертого порядка с интервальной неопределенностью на границе асимптотической устойчивости. На основании этого сформулированы условия устойчивости и определены выражения для вычисления интервалов параметров, при которых обеспечивается устойчивость системы. В отличие от результатов В.Л. Харитонова [3] и Б.Д.О. Андерсона (B.D.O. Anderson) [4], которые предлагают для анализа устойчивости интервального семейства систем использовать соответственно четыре [3] и два (для систем четвертого порядка) [4] характеристических полинома этого семейства с постоянными коэффициентами, в настоящей работе благодаря применению корневых портретов систем установлено, что для анализа устойчивости подобных семейств систем может использоваться только один такой полином. Кроме того, применение корневого подхода позволяет не только использовать полученные в работе результаты в направлении анализа устойчивости [3, 4], но и выполнять на их основе робастный синтез динамических систем с параметрической неопределенностью.

Список литературы

1. Римский, Г.В. Автоматизация исследований динамических систем / Г.В. Римский, В.В. Таборовец. – Минск : Наука и техника, 1978. – 336 с.
2. Rimsky, G.V. Root locus methods for robust control systems stability and quality investigations / G.V. Rimsky, A.A. Nesenчук // 13th Triennial World Congress of International Federation of Automatic Control (IFAC) : Proceedings of the World Congress, San Francisco, USA, June 30 – July 05, 1996. – Oxford : Elsevier Science, 1996. – Vol. G. – P. 469–471.
3. Харитонов, В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В.Л. Харитонов // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. XIV, № 11. – С. 2086–2088.
4. Anderson, B.D.O. On Robust Hurwitz Polynomials / B.D.O. Anderson, E.I. Jury, M. Mansour // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1987. – Vol. AC 32, no. 10. – P. 909–913.
5. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2009. – 832 с.
6. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
7. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.
8. Поляк Б.Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков. – М. : ЛЕНАНД, 2014. – 560 с.

Поступила 21.10.2016

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: anes@newman.bas-net.by*

A.A. Nesenчук

INVESTIGATION OF THE INTERVAL DYNAMIC SYSTEMS BEHAVIOR AND SYNTHESIS OF THEIR CHARACTERISTIC POLYNOMIALS ON THE BASIS OF THE SYSTEM ROOT LOCUS PORTRAITS PARAMETER FUNCTION APPLICATION

Investigation of the 4th power dynamic systems behavior in conditions of the interval parameter variations is carried out on the basis of root locus portraits. Investigation of the system dynamics is carried out and the behavior regularities at the system stability bound are determined for root locus portraits of the 4th power systems with interval parametric uncertainties. On this basis the stability conditions are derived and expressions are determined for calculating intervals of parameter variation ensuring the system robust stability.