УДК 004.942

В.М. Артемьев, А.О. Наумов, Л.Л. Кохан

ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РАСШИРЕННЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

При высокой размерности задачи фильтр Калмана становится труднореализуемым в реальном масштабе времени из-за больших вычислительных затрат. В качестве альтернативы рассматривается методика синтеза фильтров на основе метода наименьших квадратов по критерию минимума расширенной квадратичной невязки. Методика дает возможность сократить вычислительные затраты по нахождению коэффициентов усиления фильтра, однако при этом возрастает дисперсия ошибок фильтрации по сравнению с фильтром Калмана. На примере показывается степень этого увеличения за счет неучета априорной информации.

Введение

Для решения задач линейной фильтрации случайных последовательностей, наблюдаемых на фоне аддитивных помех, используют статистический подход на основе фильтра Калмана (ФК), обеспечивающий минимальную дисперсию ошибок фильтрации [1]. Однако при высокой размерности задачи ФК становится труднореализуемым в реальном масштабе времени из-за больших вычислительных затрат. Альтернативой статистическому служит детерминистский подход, когда фильтрация осуществляется на основе результатов лишь текущих измерений [2] с привлечением эмпирических данных. При этом снижение вычислительных затрат происходит за счет того, что не требуется проводить операции статистического усреднения. Для реализации такого подхода основным является метод наименьших квадратов (МНК), где в качестве критерия оптимальности используется квадратичная форма невязки решения [3, 4]. Получаемые при этом алгоритмы фильтрации требуют использования всей последовательности измерений с момента начала работы фильтра. Очевидно, что при большом числе периодов измерений фильтры такого рода становятся малопригодными. Задачу фильтрации целесообразно решать рекуррентно, как это имеет место у ФК, используя лишь оценки на предыдущем шаге фильтрации и текущие измерения. В такой постановке для синтеза алгоритмов фильтрации можно использовать расширенный метод наименьших квадратов (РМНК) [5], однако это обычно приводит к необходимости решения плохо обусловленных задач [6].

В настоящей работе предлагается методика синтеза рекуррентных линейных фильтров наименьших квадратов (ФНК) случайных последовательностей на основе РМНК, что позволяет решать широкой круг задач с меньшими вычислительными затратами, чем у ФК.

1. Формулировка задачи

Полезный сигнал $\mathbf{x}_k$ является случайной последовательностью в виде m-мерного вектора $\mathbf{x}_k = \left[x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{m,k} \right]^T$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ есть дискретное время, а символ «^{T}» обозначает операцию транспонирования. Модель сигнала задается линейным стохастическим конечно-разностным уравнением вида

$$\mathbf{x}_k = A_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \tag{1}$$

где A_k – матрица размерности $m \times m$, а случайный m-мерный вектор $\mathbf{w}_k = \left[w_{1,k}, w_{2,k}, \dots, w_{m,k} \right]^T$ есть формирующее воздействие модели полезного сигнала в виде центрированного дискретного белого шума с ковариационной матрицей Q_k.

Модель n-мерного вектора измерений $\mathbf{z}_k = \left[z_{1,k}, z_{2,k}, \ldots, z_{n,k} \right]^T$ определяется линейным уравнением

$$\mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k , \tag{2}$$

где матрица измерений H_k имеет размерность $m \times n$, а случайный вектор $\mathbf{v}_k = \left[v_{1,k}, v_{2,k}, \ldots, v_{n,k} \right]^T$ есть центрированный дискретный белый шум с ковариационной матрицей R_k, который моделирует ошибки измерений и является шумовым воздействием для этого канала.

Задача состоит в нахождении уравнений текущей оценки вектора полезного сигнала $\hat{\mathbf{x}}_k = \left[\hat{x}_{1,k}, \hat{x}_{2,k}, \ldots, \hat{x}_{m,k} \right]^T$ на основе выбранного критерия оптимальности и текущих измерений $\mathbf{z}_k$ методом РМНК. Это позволяет получить единую методику синтеза уравнений фильтрации для различных типов задач.

2. Уравнения фильтра

В основе методики синтеза лежит выбор критерия оптимальности $J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)$. Для метода наименьших квадратов в качестве критерия используется квадратичная форма невязки (КФН) $\left(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k \right)^T R_k^{-1} \left(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k \right)$, где символ «$^{-1}$» обозначает операцию обращения матрицы. Такой критерий зависит лишь от текущих оценок и не зависит от предыдущих, что не дает возможность получать рекуррентные оценки. В результате потребуется расширение КФН путем включения сглаживающей квадратичной формы, зависящей от предыдущих оценок. Выбор критерия оптимальности производится исходя из сущности решаемой задачи. Для сформулированных выше исходных данных подходящим вариантом является квадратичная форма $\left(\hat{\mathbf{x}}_k - A_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \right)^T Q_k^{-1} \left(\hat{\mathbf{x}}_k - A_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \right)$, которая следует из модели полезного сигнала (1). В результате критерий синтеза ФНК выглядит следующим образом:

$$J_k(\hat{\mathbf{x}}_k) = (1-\alpha)\left(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k \right)^T R_k^{-1} \left(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k \right) + \alpha \left(\hat{\mathbf{x}}_k - A_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \right)^T Q_k^{-1} \left(\hat{\mathbf{x}}_k - A_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \right), \tag{3}$$

где $0 < \alpha < 1$ является положительным весовым коэффициентом, величина которого выбирается из эмпирических соображений или по результатам моделирования и позволяет компенсировать отсутствие знаний априорной статистики. Этот критерий определяет текущие потери фильтрации в детерминистской постановке и его можно трактовать следующим образом: первое слагаемое учитывает влияние измерений $\mathbf{z}_k$ на качество решения $\hat{\mathbf{x}}_k$; второе позволяет согласовать его с решением $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на предыдущем шаге фильтрации с учетом модели (1), а коэффициент α определяет вес этого слагаемого.

Оптимальные оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$ находятся из условия минимума критерия (3). Необходимое условие минимума представляется в виде уравнения

$$\frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} = -2(1-\alpha) H_k^T R_k^{-1} \left(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k \right) + 2\alpha Q_k^{-1} \left(\hat{\mathbf{x}}_k - A_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \right) = 0. \tag{4}$$

Его решение приводит к уравнению оптимального ФНК, которое имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = K_{1,k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_{0,k} \mathbf{z}_k . \tag{5}$$

Здесь матричный коэффициент $K_{1,k}$ размерности $m \times m$ имеет форму

$$K_{1,k} = \alpha \left(\alpha Q_k^{-1} + (1-\alpha) H_k^T R_k^{-1} H_k \right)^{-1} Q_k^{-1} A_k \tag{6}$$

и задает экстраполяцию оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на следующий шаг. Матричный коэффициент усиления $K_{2,k}$ размерности $m \times n$ определяется равенством

$$K_{0,k} = (1-\alpha)\left(\alpha Q_k^{-1} + (1-\alpha) H_k^T R_k^{-1} H_k\right)^{-1} H_k^T R_k^{-1} \tag{7}$$

и позволяет уточнить экстраполированное значение за счет наблюдения $\mathbf{z}_k$ на текущем шаге фильтрации. Структура уравнения (5) говорит о рекуррентном характере фильтрации. Путем эквивалентных преобразований оно сводится к структуре фильтра с обратной связью:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = K_{1,k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_{0,k}^* \left(\mathbf{z}_k - H_k K_{1,k}^* \hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right), \tag{8}$$

где

$$K_{1,k}^* = \left(I - K_{0,k} H_k\right)^{-1} K_{1,k} = A_k, \quad K_{0,k}^* = K_{0,k}. \tag{9}$$

В этом случае структура ФНК и первое слагаемое в формуле (8) совпадают с ФК.

Коэффициенты усиления ФНК находятся по формулам (6), (7) или (9), в то время как у ФК это требует решения ковариационного уравнения совместно с уравнением для оптимального коэффициента усиления, что более трудоемко. Однако уменьшение вычислительных затрат достигается за счет снижения точности фильтрации. Объем вычислений коэффициентов усиления ФНК в основном связан с обращением матрицы $(\alpha Q_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)$. Для вычислений можно воспользоваться формулой матричного тождества $\left(B^{-1} + C^T D^{-1} C\right)^{-1} = B - BC^T \left(D + CBC^T\right)^{-1} CB$ [7], что приводит к выражению

$$\left(\alpha Q_k^{-1} + (1-\alpha) H_k^T R_k^{-1} H_k\right)^{-1} = \alpha^{-1} L_k Q_k, \tag{10}$$

где

$$L_k = I - \alpha^{-1}(1-\alpha) Q_k H_k^T \left(R_k + \alpha^{-1}(1-\alpha) H_k Q_k H_k^T\right)^{-1} H_k.$$

3. Точность фильтрации

Качество работы ФНК оценивается величиной потерь (3), и для детерминистского подхода синтезированный фильтр оптимален. В то же время при статистическом подходе качество определяется путем оценки величин дисперсий ошибок фильтрации. В линейном случае оптимальным является ФК, обеспечивающий минимально возможные значения этих дисперсий. Очевидно, что в тех же условиях фильтрации дисперсии ошибок ФНК будут выше, поэтому результаты ФК могут служить оценкой нижних границ величин этих ошибок. Представляет интерес сравнение дисперсий ошибок обоих фильтров при одинаковых условиях работы, что дает возможность оценки снижения точности фильтрации при переходе от статистического подхода к детерминистскому.

Вектор ошибок фильтрации $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. После подстановки выражений (1), (2), (5)–(7) приходим к следующему уравнению ошибок ФНК:

$$\mathbf{e}_k = A_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k - K_{1,k} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - K_{0,k} \mathbf{z}_k = K_{1,k} \mathbf{e}_{k-1} + L_k \mathbf{w}_k - K_{0,k} \mathbf{v}_k. \tag{11}$$

Вектор математических ожиданий ошибок обозначается через $\mathbf{m}_{e,k} = \langle \mathbf{e}_k \rangle$, где угловые скобки – это операция нахождения математического ожидания. Усредняя обе части (11), получаем уравнение для вектора математических ожиданий ошибок:

$$\mathbf{m}_{e,k} = K_{1,k} \mathbf{m}_{e,k-1} + L_k \mathbf{m}_{w,k} - K_{0,k} \mathbf{m}_{v,k}, \tag{12}$$

где $\mathbf{m}_{w,k} = \langle \mathbf{w}_k \rangle$ и $\mathbf{m}_{v,k} = \langle \mathbf{v}_k \rangle$ есть математические ожидания воздействий. В рассматриваемом случае полагаем их равными нулю, что сводит (12) к однородному уравнению $\mathbf{m}_{e,k} = K_{1,k}\mathbf{m}_{e,k-1}$. Его решение с течением времени стремится к нулю, и это говорит о том, что уравнение ФНК (5) обеспечивает несмещенность оценок.

При статистически независимых дискретных белых шумах $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{v}_k$ и с учетом независимости значений ошибок $\mathbf{e}_{k-1}$ в момент времени $k-1$ от воздействий $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{v}_k$ в последующий момент времени k можно получить уравнение для ковариационной матрицы ошибок $P_k = \left\langle \left(\mathbf{e}_k - \mathbf{m}_{e,k}\right)\left(\mathbf{e}_k - \mathbf{m}_{e,k}\right)^T \right\rangle$ в виде

$$P_k = K_{1,k}P_{k-1}K_{1,k}^T + L_kQ_kL_k^T + K_{0,k}R_kK_{0,k}^T \tag{13}$$

с начальным условием P_0. Диагональные элементы этой матрицы являются дисперсиями ошибок фильтрации каждой из составляющих вектора $\mathbf{x}_k$.

Выбор величины коэффициента α можно осуществлять следующим образом. Первоначально задается средним значением $\alpha = 0,5$, что соответствует критерию максимального правдоподобия, если воздействия $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{v}_k$ имеют гауссово распределение [4]. Полученные из уравнения (13) значения дисперсий ошибок будут больше, чем у ФК. Затем путем моделирования находят значения α, соответствующие устойчивому решению (13) и наименьшим значениям дисперсий ошибок. В итоге ФНК обеспечивает величину дисперсий, хотя и большую, чем у ФК, но меньшую, чем у метода максимального правдоподобия.

4. Пример сравнения дисперсий ошибок ФНК и ФК

Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации текущих координат дальности до маневрирующего воздушного объекта по данным радиолокатора сопровождения. Статистическая модель изменения координат приведена в работе [8] и имеет вид системы стохастических конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= x_{1,k-1} + T_0x_{2,k-1} + 0,5T_0^2x_{3,k-1}; \\ x_{2,k} &= x_{2,k-1} + T_0x_{3,k-1}; \\ x_{3,k} &= a_3x_{3,k-1} + w_{3,k};\ 0 < a_3 < 1. \end{aligned} \tag{14}$$

В уравнениях (14) посредством $x_{1,k}$ обозначена дальность до объекта (м) в моменты времени $k = 0, 1, 2, \ldots$; $x_{2,k}$ – скорость изменения дальности (м/с); $x_{3,k}$ – ускорение (м/с^2), которое формируется воздействием $w_{3,k}$ в виде центрированного дискретного белого шума с постоянной дисперсией $\sigma_{w_3}^2$. Параметр T_0 (с) задает величину периода поступления измерений дальности от радиолокатора сопровождения. В векторной форме уравнения (14) могут быть представлены в виде (1) со следующими значениями векторов и матриц:

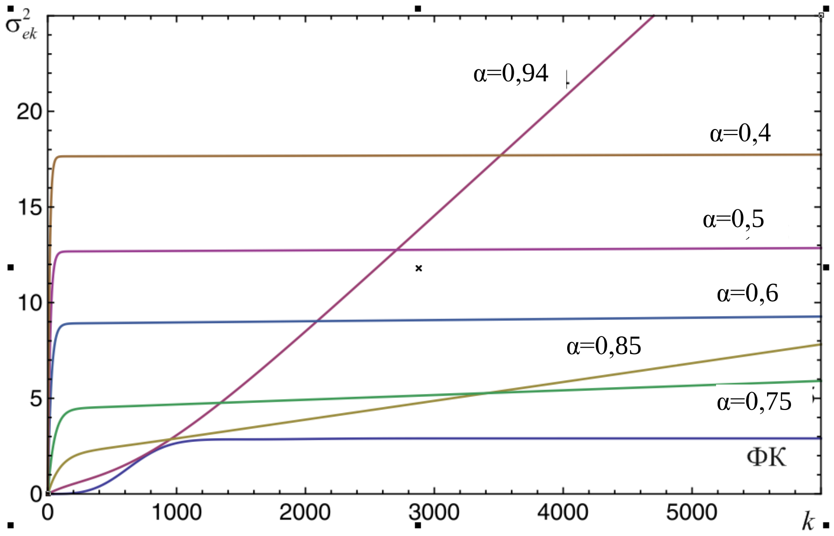
$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 1 & T_0 & 0,5T_0^2 \\ 0 & 1 & T_0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix};\ \mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{3,k} \end{pmatrix};\ Q_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{w_3}^2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Полагаем, что дальность $x_{1,k}$ измеряется с аддитивной ошибкой $v_{1,k}$ в виде центрированного белого шума с постоянной дисперсией $\sigma_{v_1}^2$, статистически независимого от w_{3_k}. Линейная модель измерений задается уравнением (2), где имеют место оба значения:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathbf{z}_k = \left(z_{1,k}\right);\ \mathbf{v}_k = \left(v_{1,k}\right);\ R_k = \left(\sigma_{v_1}^2\right). \tag{16}$$

При расчетах использованы следующие исходные данные: период поступления измерений $T_0 = 10^{-3}$ с; дисперсия ошибки измерения дальности $\sigma^2_{v_1} = 900$ м^2; дисперсия изменения ускорения в установившемся режиме $\sigma^2_3 = 400$ м^2 / с$^{-4}$; величина коэффициента $a_3 = 0,968$, соответствующая длительности корреляции ускорения в установившемся режиме 30 с; дисперсия формирующего воздействия ускорения для этих данных $\sigma^2_{w_3} = 25,2$ м^2 / с$^{-4}$.

С помощью выражения (13) для ковариационной матрицы ошибок ФНК и ковариационного уравнения ФК [1, 2] при заданных параметрах модели входного воздействия и ряда значений коэффициентов α получены графики изменения дисперсий ошибок оценок дальности σ^2_{ek} у ФК и ФНК (рисунок).



Дисперсии ошибок измерения дальности σ^2_{ek} у ФК и ФНК
при различных значениях весового коэффициента α

Графики показывают, что наименьшими значениями дисперсий ошибок обладает ФК. Для метода максимального правдоподобия ($\alpha = 0,5$) эта дисперсия возрастает примерно в четыре раза. При увеличении значений весового коэффициента α дисперсия ошибок вначале уменьшается (до $\alpha = 0,8$), а затем решение становится неустойчивым ($\alpha = 0,85; 0,94$). Наименьшее значение устойчивой величины дисперсии имеет место при $\alpha = 0,75$, когда дисперсия ошибок ФНК примерно в два раза больше, чем у ФК.

Заключение

Использование ФНК на основе расширенного метода наименьших квадратов позволяет сократить затраты на вычисление коэффициентов усиления по сравнению с ФК, однако это достигается за счет увеличения дисперсий ошибок фильтрации. Снижение этих величин осуществляется путем эмпирического выбора весового коэффициента, что делает возможным получение дисперсий ошибок ФНК, хотя и больших, чем у ФК, но меньших, чем при использовании метода максимального правдоподобия.

Список литературы

1. Jazwinski, A.H. Stochastic Process and Filtering Theory / A.H. Jazwinski. – N.Y. : Academic Press, 1970.– 362 p.

2. Степанов, А.О. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации : в 3 ч. / А.О. Степанов. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – Ч. 1. : Введение в теорию оценивания. – 496 с.

3. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – Изд. 2-е, доп. и испр. – М. : Физматгиз, 1962. – 349 с.

4. Эльясберг, П.Е. Определение движения по результатам измерений / П.Е. Эльясберг. – М. : Наука, 1976. – 267 с.

5. Альберт, А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Альберт. – М. : Наука, 1977. – 215 с.

6. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 232 с.

7. Себер, Д. Линейный регрессионный анализ / Д. Себер. – М. : Мир, 1980. – 322 с.

8. Фарина, А. Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей / А. Фарина, Ф. Студер. – М. : Радио и связь, 1993. – 319 с.

Поступила 07.10.2016

Институт прикладной физики
НАН Беларуси,
Минск, Академическая, 16
e-mail: naumov@iaph.bas-net.by

V.M. Artemiev, A.O. Naumov, L.L. Kokhan

LINEAR FILTRATION OF RANDOM SEQUENCES USING A LEAST SQUARE METHOD WITH REGULARIZATION

At high problem dimension the Kalman filter becomes difficult to realize in real time due to the high computational costs. Alternatively, a technique of filter synthesis on the basis of the extended least square method with extended square discrepancy is given. The technique allows to reduce the computation costs for the search of filter gain coefficients, but it increases the variance of the filtering error in comparison with Kalman filter. The degree of this increase in case of prior information is not taken into account is shown on example.