

УДК 519.61/64:627.05

Н.В. Медвидь, П.Н. Мартынюк

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА БЕССЕТОЧНОГО МЕТОДА РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Рассматривается математическая модель фильтрационной консолидации тела грунтовой плотины с водоводом и зоной размыва в двумерном случае, в которой учитывается влияние техногенных факторов (температуры и концентрации солей), а также проседание со временем верхней границы и внутренних точек плотины. Предлагается ПО для автоматизации расчетов численного решения краевой задачи бессеточным методом радиальных базисных функций, которое дает возможность проводить численные эксперименты, варьируя входные данные и параметры формы. На примере модельной задачи исследуется влияние наличия водовода и зоны размыва на распределение напоров и их градиентов, температуру и концентрацию солей в теле плотины на разных временных промежутках. Проводится ряд численных экспериментов и осуществляется их анализ.

Введение

Языки объектно-ориентированного программирования (ООП) как ядро объектно-ориентированной парадигмы программирования пользуются в последнее время большой популярностью среди разработчиков ПО. ООП – одна из парадигм, в соответствии с которой программа рассматривается как множество объектов, взаимодействующих между собой, и состоит из трех основных концепций: инкапсуляции, наследования и полиморфизма. Согласно парадигме ООП каждый объект способен получать сообщения, обрабатывать данные и отправлять сообщения другим объектам [1]. Идеи ООП, когда определенные математические структуры представляются классами и объектами, а операции над структурами (дифференцирование, интегрирование и т. д.) и взаимодействие между ними выражаются через методы классов, нашли широкое применение при программировании численных методов математической физики [2].

Не определяя своей целью классификацию численных методов математической физики, остановимся на двух больших группах этих методов: сеточных и бессеточных [3]. Численное решение краевых задач сеточными методами (например, методом конечных элементов) реализовано в специальных пакетах прикладных программ. Большинство из них могут работать на нескольких операционных системах. Поскольку пакетов прикладных программ по решению краевых задач бессеточными методами в настоящее время почти нет [4], публикация некоторых идей ООП для программной реализации алгоритмов одного из таких методов (на примере математической модели фильтрационной консолидации грунтовой плотины с водоводом) и является целью настоящей статьи.

Выбранный численный метод основывается на методе коллокаций в точках [5, 6] с использованием в качестве базисных радиальных функций [7, 8]. Первое историческое название метода – multiquadrics [9], позже – Kansa method [10]. Сейчас этот метод также называют radial basis function collocation method [11], radial basis function approximation method [12] или radial basis function method [13]. В настоящей работе применяют термин «метод радиальных базисных функций», т. е. метод коллокации в точках [5] с использованием в качестве базисных радиальных функций, хотя на данном этапе под этим термином подразумевается целый класс бессеточных методов математической физики, которые отличаются принципами построения расчетных схем (см., например, [14, 15]).

1. Математическая модель

При строительстве и эксплуатации плотин с водоводами остро стоит проблема их безаварийной работы [16]. Связана она с повреждениями в водоводах, размывом грунта с образованием пустотелых зон вдоль водовода, что может привести к полному разрушению плотин. Проблема осложняется еще больше, если плотина попадает в зону техногенных воздействий

(от химических растворов, изменений температуры, химической суффозии). Проведение натурных экспериментов – очень ресурсозатратный процесс. Поэтому для прогнозирования протекания подобных процессов целесообразно использовать математическое и компьютерное моделирование.

Математические модели взаимосвязанных процессов фильтрационной консолидации, фильтрационного разрушения грунтов и тепломассопереноса построены и рассмотрены, например, в работах [17–19]. Однако в этих работах рассмотрены только процессы контактного размыва грунтов и не затронуты процессы в грунтовых плотинах с инженерными включениями (водоводами), тем более с наличием зоны выноса (размыва) грунта через повреждение в водоводе. Применение метода радиальных базисных функций (РБФ) для численного решения математических моделей взаимосвязанных процессов фильтрационной консолидации и тепломассопереноса описано в работе [20], однако вопросы структур данных, используемых при практической реализации этого метода, там не затрагиваются.

Рассмотрим двухмерную задачу фильтрационной консолидации в теле грунтовой плотины, профиль которой изображен на рис. 1. Водовод разбивает плотину на две области: Ω_1 с границами $\Gamma_6, \Gamma_4, \Gamma_2, \Gamma_1$ и свободной границей Γ_0 и Ω_2 с границами $\Gamma_3, \Gamma_7, \Gamma_5, \Gamma_9$. Зона размыва – область Ω_3 с границами Γ_{12}, Γ_{11} . Здесь $\Gamma_4, \Gamma_7, \Gamma_2, \Gamma_9$ – границы контакта с водохранилищем; Γ_1 – граница контакта с атмосферой; $\Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_8, \Gamma_{10}$ – непроницаемые границы; Γ_{12} – граница, на которой выполняется условие быстрого выноса грунта; Γ_{11} – граница, на которой задаются условия сопряжения.

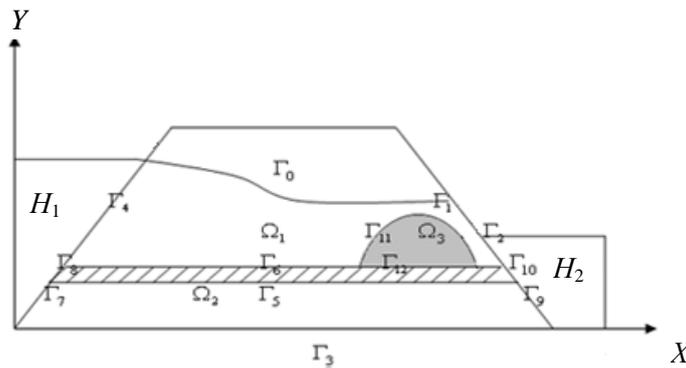


Рис. 1. Профиль тела грунтовой плотины с водоводом и зоной размыва

Сделаем два упрощающих предположения: зона размыва Ω_3 пока фиксированная и не меняет своего положения и формы во времени; для напоров в зоне размыва выполняется уравнение Лапласа.

Тогда математическая модель двухмерной задачи фильтрационной консолидации тела грунтовой плотины с водоводом и зоной размыва при учете ползучести скелета грунта и тепломассопереноса может быть описана краевой задачей, которая имеет следующий вид:

– уравнение фильтрационной консолидации

$$\begin{aligned}
 & 2a_0 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \beta_1(a_0 + a_1) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \beta_1 [\operatorname{div}(\mathbf{K}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \nabla h) - \\
 & - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{K}_c \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_T \nabla \mathbf{T})] + \frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div}(\mathbf{K}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \nabla h) - \\
 & - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{K}_c \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{K}_T \nabla \mathbf{T})] + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon(1+e)(1+\xi)}{\rho_i \gamma} \times \\
 & \times \left[\beta_1 \left[\sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right] + \left[\sigma \frac{\partial^2 c_i}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N_i}{\partial t^2} \right] \right], \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

– уравнение фильтрации в зоне размыва (уравнение Лапласа)

$$\Delta h(\mathbf{X}, t) = 0, \mathbf{X} = (x, y) \in \Omega_3, t > 0; \quad (2)$$

– уравнения массопереноса

$$\operatorname{div}(D_T^{(i)} \nabla \mathbf{T}) + \operatorname{div}(D^{(i)} \nabla c_i) - (\mathbf{u}, \nabla c_i) = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, i = \overline{1, n},$$

$$\operatorname{div}(D_T^{(i)} \nabla \mathbf{T}) + \operatorname{div}(D^{(i)} \nabla c_i) = 0, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0, i = \overline{1, n}; \quad (4)$$

– уравнение кинетики массообмена

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\gamma_i (C_m^{(i)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) - c_i) N_i^{\alpha_i}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, i = \overline{1, n}; \quad (5)$$

– уравнения теплопереноса

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla \mathbf{T}) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla \mathbf{T}) = c_T \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla \mathbf{T}) = 0, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0; \quad (7)$$

– обобщенный закон Дарси – Герсеванова

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{K}_T \nabla \mathbf{T}, \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, t \geq 0; \quad (8)$$

– начальные условия

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \frac{\partial h(\mathbf{X}, 0)}{\partial t} = 0, \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (9)$$

$$c_i(\mathbf{X}, 0) = C_0^{(i)}(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$N_i(\mathbf{X}, 0) = N_i^{(0)}(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \overline{\Omega}; \quad (12)$$

– граничные условия и условия сопряжения

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} = y, \mathbf{X} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = H_2(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2,$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_9} = H_2(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_9, (\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_{10}} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{10},$$

$$(\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3, h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4} = H_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_4,$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_7} = H_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_7, (\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3, \quad (13)$$

$$(\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_5, (\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_6} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_6,$$

$$h(x, y) = z, \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, [h(x, y)] = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{11};$$

$$(\mathbf{D}^{(i)} \nabla c_i + \mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1, i = \overline{1, n},$$

$$c_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = C_1^{(i)}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, i = \overline{1, n},$$

$$c_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_9} = C_1^{(i)}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_9, i = \overline{1, n}, (\nabla c_i, \mathbf{n})|_{\Gamma_{10}} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{10}, i = \overline{1, n},$$

$$\begin{aligned} (\nabla c_i, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3, i = \overline{1, n}, c_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4} = C_m^{(i)}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_4, i = \overline{1, n}, \\ c_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_7} = C_m^{(i)}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_7, i = \overline{1, n}, (\nabla c_i, \mathbf{n})|_{\Gamma_8} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_8, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$(\nabla c_i, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_5, i = \overline{1, n}, (\nabla c_i, \mathbf{n})|_{\Gamma_6} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_6, i = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial n} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, [c_i(x, y)] = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{11}, i = \overline{1, n};$$

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_9} = T_{\text{atm}}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_9,$$

$$(\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_3, T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_4,$$

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_7} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_7, (\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_8} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_8,$$

$$(\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_{10}} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{10}, (\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_5, (\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_6} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_6,$$

$$(\nabla T, n)|_{\Gamma_{12}} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, [T(x, y)] = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{11},$$

где $H_0(\mathbf{X}), H_1(\mathbf{X}, t), H_2(\mathbf{X}, t), C_0^{(i)}(\mathbf{X}), C_1^{(i)}(\mathbf{X}, t), C_m^{(i)}(\mathbf{X}, t), N_i^{(0)}(\mathbf{X}), T_0(\mathbf{X}), T_{\text{atm}}(\mathbf{X}, t), T_1(\mathbf{X}, t)$ – известные функции. Здесь приняты следующие обозначения: h – напор в поровой жидкости; c_i, N_i – концентрация многокомпонентного химического раствора в жидкой и твердой фазах; T – температура; \mathbf{u} – вектор скорости фильтрации; $\mathbf{K}(C, N, T)$ – тензор коэффициентов фильтрации; \mathbf{K}_{c_i} – тензор коэффициентов химического осмоса; \mathbf{K}_T – тензор коэффициентов термического осмоса; $\mathbf{D}^{(i)}, \mathbf{D}_T$ – тензоры коэффициентов конвективной диффузии и термодиффузии; λ – тензор коэффициентов эффективной теплопроводности влажного грунта; ρ – плотность порового раствора; c_p – удельная теплоемкость порового раствора; c_T – объемная теплоемкость грунта; C_m – концентрация предельного насыщения химических веществ в жидкой фазе; σ – пористость грунта; n – количество компонентов в солевом растворе; \mathbf{n} – вектор направляющих косинусов внешней нормали к рассматриваемой границе; a_0, a_1, β_1 – параметры ползучести скелета грунта (здесь аналогично [17] использованы элементы теории наследственной линейной ползучести); e – коэффициент пористости; ξ – коэффициент бокового давления грунта.

Свободная граница Γ_0 (кривая депрессии) описывается соотношением [21]

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_0} = 0, \quad (16)$$

и на ней выполняется кинематическое граничное условие [21]

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_0} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (17)$$

Научная новизна математической модели (1)–(17) состоит в учете возможности фильтрационного разрушения тела грунтовой плотины через брешь в водоводе, а также в учете влияния техногенных факторов (температуры и многокомпонентных химических растворов). С физической точки зрения решение такой задачи требует рассмотрения взаимосвязанных процессов фильтрации и тепломассопереноса в теле грунтовой плотины (пористой среде) и в зоне размыва (области, которая заполнена суспензией). В научной литературе такие задачи еще не рассматривались. С математической точки зрения математическая модель физической задачи описыва-

ется начально-краевой задачей для системы эллиптических и параболических уравнений с условиями сопряжения на границах контакта. Такие задачи известны в научной литературе, однако их численное решение вызывает значительные трудности [21]. С деталями выведения уравнений модели (1)–(17) можно ознакомиться в работах [17–19] (см. также приведенную там библиографию).

Сформулированная задача является нелинейной краевой задачей для системы эллиптических и параболических уравнений в областях со свободными границами. Исследование подобных задач на корректность описано, к примеру, в работе [22] (см. также приведенную там библиографию). Однако в данной работе рассмотрен лишь одномерный случай и, кроме того, не учтено наличие зоны размыва. Поэтому в общем вопрос исследования корректности постановки указанной задачи с точки зрения классической математики остается открытым и, возможно, станет одним из направлений будущих исследований авторов.

2. Идея численного метода

Идея бессеточного метода РБФ (см., например, [3] и приведенную там библиографию по методу РБФ) заключается в следующем. Покроем замыкание области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ узловыми точками (x_j, y_j) , $j = \overline{1, p}$ (некоторые из алгоритмов рассмотрены и реализованы в работах [23–25]). При этом любые две точки не должны совпадать. Далее покрываем замыкание $\overline{\Omega}$ области Ω коллокационными точками (x_i, y_i) , $i = \overline{1, m}$. Обозначим $\omega = \{i : (x_i, y_i) \in \Omega\}$, $\gamma_k = \{i : (x_i, y_i) \in \Gamma_k\}$, $k = \overline{0, 4}$. Введем обозначение $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, $j = \overline{1, p}$, $i = \overline{1, m}$, $m \geq p$. Приближенные значения функций будем искать в виде

$$z(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^n z_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_z),$$

где ε_z – параметр формы; $\varphi_j = \varphi(r_j, \varepsilon_z)$ – радиальная базисная

функция, зависящая от расстояния $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, $j = \overline{1, p}$, и параметра формы $\varepsilon_z > 0$; $z_j(t)$, $j = \overline{1, p}$, – неизвестные коэффициенты для нахождения значений соответственно функций напора, концентрации солей в жидкой и твердой фазах и температуры, которые зависят только от времени.

В результате использования метода коллокации в точках [5] для отыскания неизвестных коэффициентов получим задачу Коши для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Ввиду громоздкости выкладок и в связи с другими целями этой статьи не будем приводить здесь вид этой задачи. Более детальную информацию читатель может получить, например, в работе [3]. Отметим только, что в научной литературе исследование точности метода РБФ проведено лишь для некоторых краевых задач (см., например, [7, 8, 26, 27]). В настоящее время единственным инструментом исследования рассмотренных в статье краевых задач является вычислительный эксперимент – сравнение решений метода РБФ с решениями, найденными другими методами, которые хорошо теоретически обоснованы (например, методом конечных элементов), как это сделано в работе [3].

3. Структура и описание основных классов

Программное приложение разработано в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2008 на языке C#. Преимуществом программного приложения является использование стандартных средств и функций для создания графиков. Поэтому от пользователя не требуется установки DirectX- или OpenGL-библиотек. Для удобства разработки и дальнейшей поддержки программного приложения все составляющие классы были разделены на четыре основные категории (рис. 2 и 3).

В группу Interfaces входят классы, которые служат прототипами для входных параметров некоторых функций и обеспечивают совместимость между узловыми и коллокационными точками при работе с определенными процедурами. На данный момент там находится только один класс IPoint, что является обобщенным интерфейсом точки в пространстве.

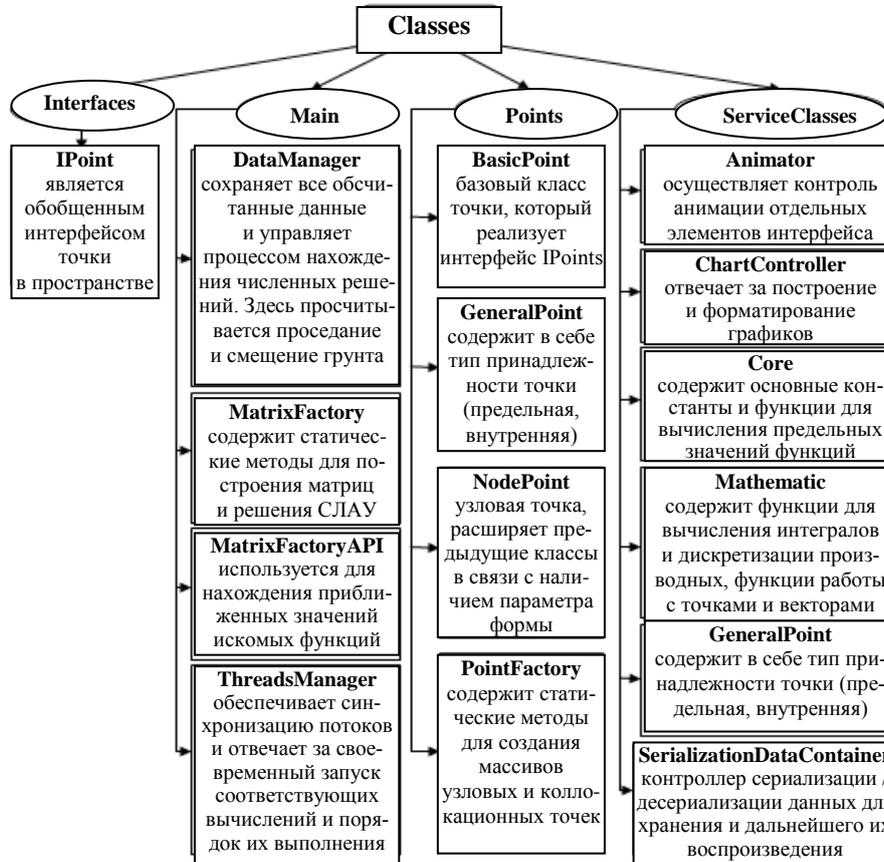


Рис. 2. Структура основных классов

Следующей по важности является группа ServiceClasses. Классы этой группы используются для упрощения вычислений и выполнения технических операций (сохранения, восстановления данных, построения графиков), а также сохранения входных данных программного приложения.

Затем следует группа классов под названием Points. Как можно догадаться из названия, основным назначением классов этой группы является описание и организация работы с узловыми и коллокационными точками.

Главной является группа Main. Она включает классы, используемые непосредственно для отыскания решений.

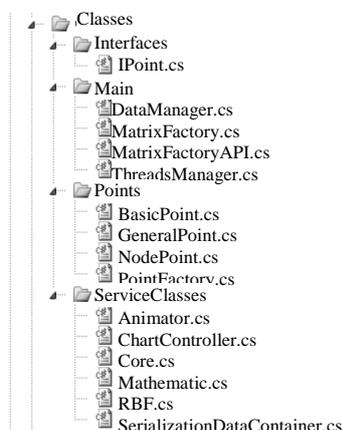


Рис. 3. Иерархия классов программного приложения

После запуска программного приложения перед пользователем появляется главное окно программы (рис. 4).

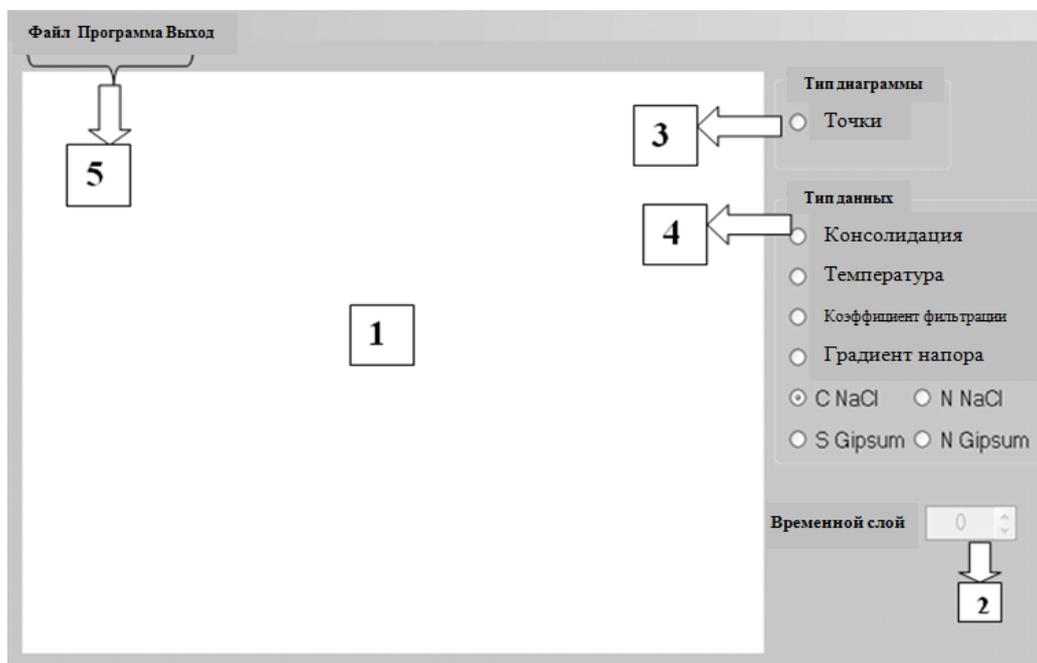


Рис. 4. Главное окно программы

Интерфейс пользователя можно разделить на семь основных частей:

- главное полотно для построения графиков в ходе выполнения программы;
- переключатель временных промежутков (если процесс расчета не запущен, то данный элемент выключен);
- секцию, в которой выбирается способ отображения графиков (доступной является возможность отображения только точками);
- секцию для выбора графика функции (избыточных напоров, концентрации соли и гипса в твердой и жидкой фазах, температуры, градиента напора, а также графика аппроксимации коэффициента фильтрации);
- главное меню для запуска вычислений, сохранения результатов работы, выхода, а также загрузки сохраненных результатов;
- панель управления параметрами формы (в свернутом виде);
- панель для отражения внешних нормалей к поверхности, что позволяет динамично наблюдать за их изменением в процессе работы программы (в свернутом виде).

После запуска программы у пользователя есть два возможных алгоритма работы с ней:

- нажать меню Программа-Запуск, программа начнет вычислять данные и покажет соответствующие графики. После того как все расчеты будут завершены, пользователю будет доступна возможность сохранения данных вычислений в файл (меню Файл-Сохранить станет активным). При этом имя файла генерируется автоматически, исходя из входных данных и количества точек;
- загрузить готовые данные (нажать на меню Файл-Открыть), после чего появится окно выбора файлов для загрузки в программное приложение (рис. 5).

Окно загрузки сохраненных данных содержит два текстовых поля, где после выбора файлов отображается их название. Чтобы загрузить файл, нужно нажать на выделенную кнопку справа от этого поля, после чего можно будет указать файл на диске. Обычно окно позволяет загрузить только один файл. Однако если включить соответствующий флажок (Загрузить два файла), то кнопка для загрузки второго файла станет активной и в результате программа отобразит разницу (в математическом смысле) между выбранными данными. Цель подсчета разни-

цы – отображение, например, разницы распределения избыточных напоров в случаях с учетом влияния теплосолепереноса и без учета.

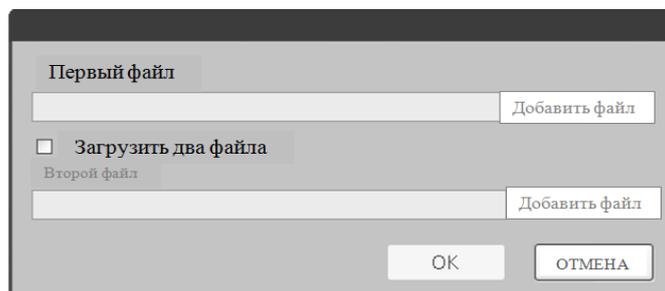


Рис. 5. Окно загрузки сохраненных данных

4. Схема отыскания координат точек свободной границы

Свободная граница области будет со временем смещаться, т. е. координаты точек на границе Γ_0 будут изменяться. Поэтому необходим алгоритм отыскания этих координат в соответствующий момент времени.

Дискретизируем уравнение (17) по времени, получим

$$(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}) = \sigma \frac{\varphi^{(k+1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(k)}(\mathbf{X})}{\tau},$$

где $(\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)})$ – смещение свободной границы на k -м временном слое в направлении внешней нормали. Далее имеем

$$\varphi^{(k+1)}(\mathbf{X}) - \varphi^{(k)}(\mathbf{X}) = \frac{\tau}{\sigma} (u_x^{(k)}(\mathbf{X})n_x^{(k)}(\mathbf{X}) + u_y^{(k)}(\mathbf{X})n_y^{(k)}(\mathbf{X})), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_0. \quad (18)$$

Здесь $f^{(k)}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}, t_k)$, $t_k = \tau \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где τ – шаг дискретизации по времени; $\mathbf{u} = (u_x(X, t), u_y(X, t))$ – вектор скорости фильтрации; $\mathbf{n} = (n_x(X, t), n_y(X, t))$ – вектор направляющих косинусов внешней нормали к рассматриваемой границе.

5. Алгоритм нахождения координат внутренних точек области

Поскольку при смещении верхней границы некоторые внутренние точки области могут оказаться вне области, необходимо реализовать алгоритм уплотнения внутренних точек. Для этой цели подходит алгоритм уплотнения точек на величину, которая является обратно пропорциональной квадрату расстояния от внутренней точки до ближайшей точки свободной границы Γ_0 :

$$\mathbf{X}_i^{(k+1)} = \mathbf{X}_i^{(k)} + \frac{(\varphi_j^{(k+1)} - \varphi_j^{(k)})}{r(\mathbf{X}_i^{(k)}, \mathbf{X}_j^{(k)})^2}, \quad i \in \omega, \quad (19)$$

где $r(\mathbf{X}_i^{(k)}, \mathbf{X}_j^{(k)}) = \min_{p \in \gamma_0} (r(\mathbf{X}_i^{(k)}, \mathbf{X}_p^{(k)}))$, $j \in \gamma_0$, $r(\mathbf{X}_i^{(k)}, \mathbf{X}_j^{(k)}) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

6. Результаты численного эксперимента

Рассмотрим двухмерную модельную задачу фильтрационной консолидации грунтовой плотины высотой 20 м и длиной нижнего основания 80 м при наличии водовода (рис. 6).

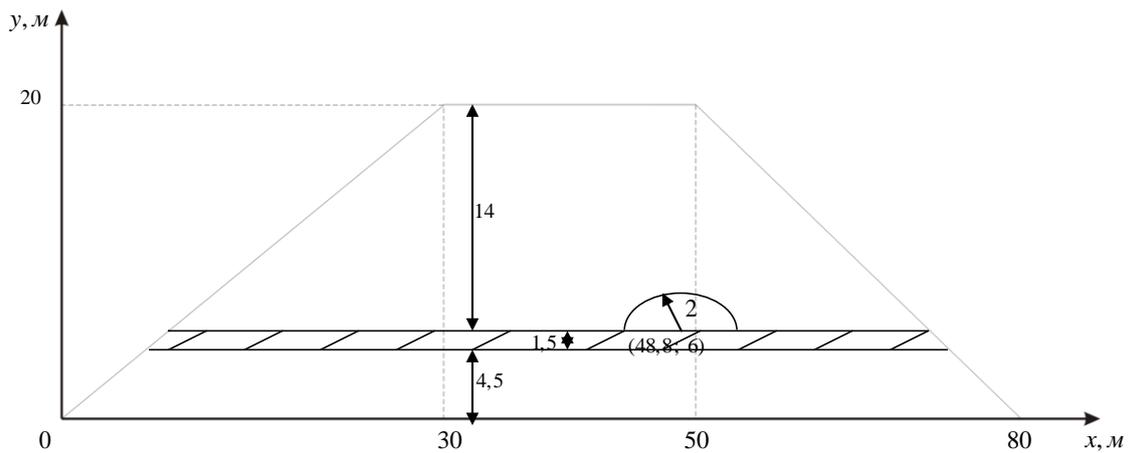


Рис. 6. Схема и размеры плотины в модельных расчетах

Входные данные задачи:

$$\begin{aligned}
 n &= 0,4, \quad e = 0,7, \quad \alpha = 0,5, \quad \beta = 0,5, \quad a_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н}, \quad a_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{Н}, \\
 \rho_C &= 2100 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad \rho_S = 2300 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad C_m = 160 \text{ г} / \text{л}, \\
 D_{C11} &= D_{C22} = 0,08 \text{ м}^2 / \text{сут}, \quad D_{C12} = D_{C21} = 0 \text{ м}^2 / \text{сут}, \\
 D_{S11} &= D_{S22} = 0,008 \text{ м}^2 / \text{сут}, \quad D_{S12} = D_{S21} = 0 \text{ м}^2 / \text{сут}, \\
 K_C &= 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{сут}, \\
 K_{C11} &= K_{C22} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{сут}, \quad K_{C12} = K_{C21} = 0 \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{сут}, \\
 K_{S11} &= K_{S22} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{сут}, \quad K_{S12} = K_{S21} = 0 \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{сут}, \\
 K_{T11} &= K_{T22} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{сут}, \quad K_{T12} = K_{T21} = 0 \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{сут}, \\
 \gamma_S &= 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ сут}^{-1}, \quad \gamma_C = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ сут}^{-1}, \quad \gamma = 1,1 \cdot 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{сут}^2), \\
 c_T &= 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}, \quad c_p = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}, \\
 \lambda_{11} &= \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{сут}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{сут},
 \end{aligned}$$

$$T_0(x) = 4 \text{ }^\circ\text{C}, \quad T_{\text{атм}} = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right),$$

$$C_0(x) = 8 \text{ г} / \text{л}, \quad S_0(x) = 0,1 \text{ г} / \text{л},$$

$$C_1(t) = 8 \text{ г} / \text{л}, \quad S_1(t) = 0,1 \text{ г} / \text{л},$$

$$H_0 = \sqrt{(H_1)^2 - \frac{(H_1)^2 - (H_2)^2}{L} x}, \quad H_1(t) = 20 \text{ м}, \quad H_2(t) = 10 \text{ м}.$$

Для численных экспериментов использовалась мультиквадратическая радиальная базисная функция $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$; количество узловых (и коллокационных) точек равно 293. В области грунта использовалось значение параметра формы $\varepsilon = 1,3$, а в области размыва – $\varepsilon = 100$. Выбор значений параметров формы осуществлялся путем вычислительного эксперимента из условий устойчивости численных решений. Известные рекомендации по выбору параметров формы в этом численном примере не использовались. Процесс исследовался в течение 360 дней с шагом по времени 10 суток. Грунт считался изотропным и однородным.

Получены значения концентрации соли, гипса и напоров на момент времени 360 дней, которые показаны графически на рис. 7–9.

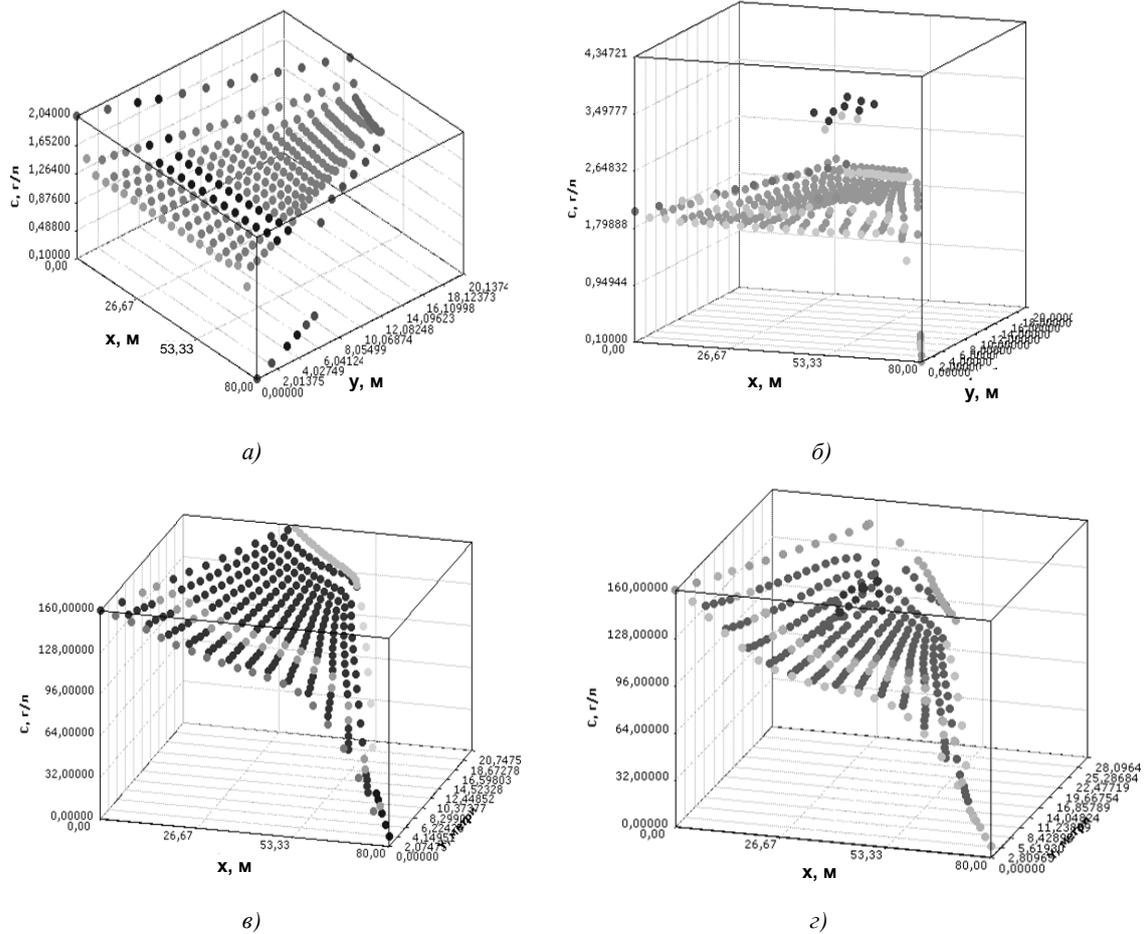


Рис. 7. Распределение концентрации: а) гипса в грунтовой плотине; б) гипса в грунтовой плотине с водоводом и зоной размыва; в) соли в грунтовой плотине; г) соли в грунтовой плотине с водоводом и зоной размыва

Наличие зоны размыва в теле плотины не оказывает значительного влияния на распределение концентрации гипса (рис. 7, а, б) и на концентрацию соли в жидкой фазе (рис. 7, в, г)

Численные эксперименты подтверждают, что наличие зоны размыва в теле плотины оказывает существенное влияние на распределение избыточных напоров, особенно в самой зоне размыва, где напор становится значительно меньше (рис. 8).

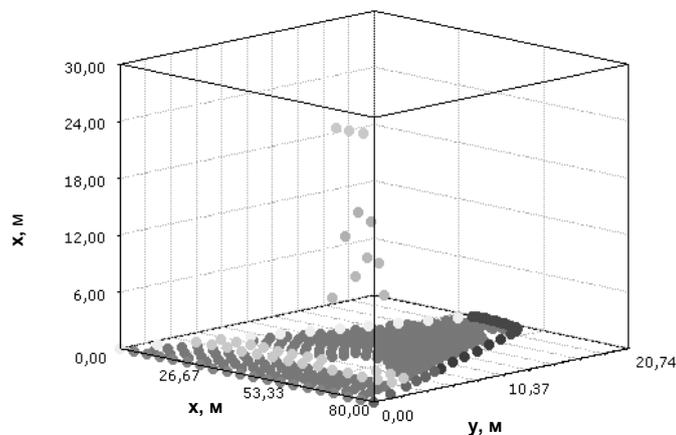


Рис. 8. Разница избыточных напоров в грунтовой плотине с водоводом и с водоводом и зоной размыва

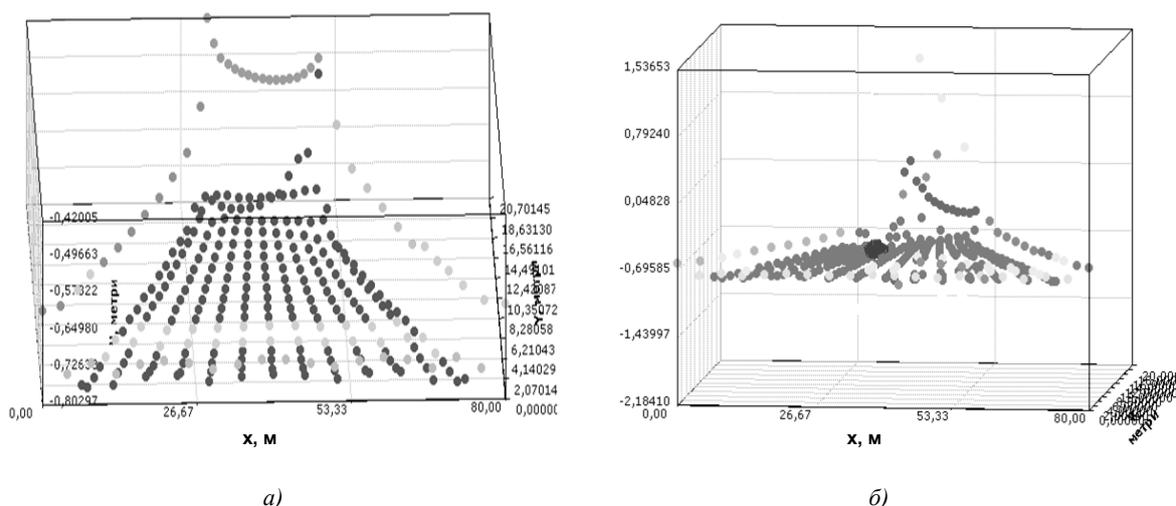


Рис. 9. Распределение компоненты dh/dy градиента напоров: а) в грунтовой плотине; б) в грунтовой плотине с водоводом и зоной размыва

Эксперименты показывают, что наличие зоны размыва в теле плотины при приведенных входных данных значительным образом влияет на градиент напора (рис. 9). Известно, что увеличение градиента напора является одним из условий интенсификации процессов размыва грунтов фильтрационным потоком [18]. В зоне размыва он становится значительно больше (максимальная разница около двух). Максимальная относительная разница между распределением избыточных напоров в теле плотины только с водоводом и водоводом и зоной размыва соответственно для этой модельной задачи составляет около 71 %.

Заключение

Математическое моделирование и исследование процессов фильтрационной консолидации в теле грунтовой плотины приводит к сложным нелинейным краевым задачам математической физики. Поэтому необходимо разрабатывать численные методы, которые позволяют решать задачи такого типа.

Объектно-ориентированные языки программирования как средство реализации алгоритмов решения краевых задач являются весьма востребованными. Они дают возможность многократного использования текстов программ. Еще одно их преимущество заключается в способе комплектования объектно-ориентированных программных модулей. Благодаря этим преимуществам, а также, например, организации параллельных вычислений ООП является в настоящее время наиболее перспективным, распространенным и эффективным направлением в программировании.

Бессеточные методы решения краевых задач позволяют применять для дискретизации только узловую сетку, что значительно уменьшает количество использованных ресурсов и времени. Разработанное программное приложение дает возможность проводить многочисленные эксперименты, варьируя исходные данные и параметры формы, а также отображать результаты этих экспериментов в виде графиков и численных данных соответственно на каждом временном слое.

Суммируя полученные результаты относительно рассмотренного модельного примера, следует отметить, что наличие зоны размыва приводит к резкому возрастанию градиентов напоров в данной зоне. Такой рост градиентов напоров ведет к увеличению скорости движения поровой жидкости и, как следствие, к увеличению зоны размыва и возможному разрушению тела плотины. Пренебрегать возможными зонами размыва нельзя, и в случае проектирования реальных гидротехнических объектов необходимо проводить предварительное компьютерное прогнозирование таких процессов.

Список литературы

1. Kindler, E. Object-oriented simulation of systems with sophisticated control / E. Kindler, I. Krivy // *Intern. J. of General Systems*. – 2011. – Vol. 40. – P. 313–343.
2. Корчевская, Е.А. Современные численные методы в объектно-ориентированном изложении / Е.А. Корчевская // *Наука – образованию, производству, экономике : материалы XX(67) Региональной науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск*. – Витебск : ВГУ им. П.М. Машерова, 2015. – Т. 1. – С. 10–11.
3. Мартынюк, П.Н. Решение краевых задач для систем квазилинейных параболических уравнений сеточными и бессеточными численными методами / П.Н. Мартынюк // *Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]*. – 2014. – Т. 11. – С. 476–493. – Режим доступа : <http://semr.math.nsc.ru/v11/p476-493.pdf>. – Дата доступа : 18.05.2016.
4. Liu, G.R. Meshfree methods. Moving beyond the finite element method / G.R. Liu. – CRC Press, 2010. – 792 p.
5. Власова, Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувырнин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.
6. Liu, G.R. An introduction to meshfree methods and their programming / G.R. Liu, Y.T. Gu. – Springer, 2005. – 480 p.
7. Franke, C. Solving partial differential equations by collocation using radial basis function / C. Franke, R. Schaback // *Appl. Math. Comp.* – 1998. – Vol. 93. – P. 73–82.
8. Franke, C. Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis functions / C. Franke, R. Schaback // *Advances in computational mathematics*. – 1998. – Vol. 8(4). – P. 381–399.
9. Kansa, E.J. Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations / E.J. Kansa // *Comput. Math. Appl.* – 1990. – Vol. 19. – P. 147–161.
10. Pang, G. Space-fractional advection-dispersion equations by the Kansa method / G. Pang, W. Chen, Z. Fu // *J. of Computational Physics*. – 2015. – Vol. 293. – P. 280–296.
11. Mavric, B. Local radial basis function collocation method for linear thermoelasticity in two dimensions / B. Mavric, B. Sarler // *Intern. J. Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. – 2015. – Vol. 25, no. 6. – P. 148–1510.
12. Uddin, M. On the selection of a good value of shape parameter in solving time-dependent partial differential equations using RBF approximation method / M. Uddin // *Applied Mathematical Modelling*. – 2014. – Vol. 38. – P. 135–144.
13. Pearson, J.W. A radial basis function method for solving PDE constrained optimization problems / J.W. Pearson // *Numerical Algorithms*. – 2013. – Vol. 64. – P. 481–506.
14. Толстых, А.И. Бессеточный метод на основе радиальных базисных функций / А.И. Толстых, Д.А. Ширококов // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* – 2005. – Т. 45, № 8. – С. 1498–1505.
15. Biazar, J. Galerkin RBF for integro-differential equations / J. Biazar, M.A. Asadi // *British Journal of Mathematics and Computer Science*. – 2015. – Vol. 11(2). – P. 1–9.
16. Анахаев, К.Н. Об авариях и повреждениях земляных плотин с водоводами: причины и способы совершенствования противотрационной защиты / К.Н. Анахаев, К.А. Гегиев, Б.Х. Амшоев // *Гидротехническое строительство*. – 2014. – № 3. – С. 30–36.
17. Власюк, А.П. Фильтрационная консолидация трехфазных грунтов с учетом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизотермическом режиме / А.П. Власюк, П.Н. Мартынюк // *Математическое моделирование*. – 2010. – Т. 22, № 4. – С. 32–56.
18. Власюк, А.П. Контактный размыв и фильтрационная консолидация грунтов в условиях теплосолепереноса / А.П. Власюк, П.Н. Мартынюк // *Математическое моделирование*. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 97–112.
19. Мичута, О.Р. Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях / О.Р. Мичута, А.П. Власюк, П.Н. Мартынюк // *Математическое моделирование*. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 3–18.

20. Vlasyuk, A.P. Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions / A.P. Vlasyuk, P.M. Martynyuk // J. of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171, no. 5. – P. 632–648.

21. Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев : Наук. думка, 1991. – 432 с.

22. Martynyuk, P.M. Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soil with regard for the influence of technogenic factors / P.M. Martynyuk // J. of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 207, no. 1. – P. 59–73.

23. Мартынюк, П.Н. Узловое и конечно-элементное покрытия двумерных областей: некоторые алгоритмы и их программная реализация / П.Н. Мартынюк, Ю.А. Семенчук // Вестник Нац. ун-та водн. хоз-ва и природопользования. Сер. «Технические науки». – 2010. – Вып. 4(52). – С. 202–209.

24. Du, Q. Meshfree, probabilistic determination of point sets and support regions for meshless computing / Q. Du, M. Gunzburger, L. Ju // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2002. – Vol. 191(13–14). – P. 1349–1366.

25. Fornberg, B. Fast generation of 2-D node distributions for mesh-free PDE discretizations / B. Fornberg, N. Flyer // Computers and Mathematics with Applications. – 2015. – Vol. 69(7). – P. 531–544.

26. Lee, C.-F. On convergent numerical algorithms for nonsymmetric collocation / C.-F. Lee, L. Ling, R. Schaback // Advances in computational mathematics. – 2009. – Vol. 30(4). – P. 339–354.

27. Ling, L. Stable and convergent nonsymmetric meshless collocation methods / L. Ling, R. Schaback // SYAM J. on numerical analysis. – 2008. – Vol. 46(3). – P. 1097–1115.

Поступила 03.08.2016

*Национальный университет водного
хозяйства и природопользования,
Украина, г. Ровно, ул. Соборная, 11
e-mail: natasha_medvid@mail.ru,
martinjuk@ukr.net*

N.V. Medvid, P.M. Martynyuk

THE ALGORITHM OF MESHFREE METHOD OF RADIAL BASIS FUNCTIONS IN TASKS OF UNDERGROUND HYDROMECHANICS

A Mathematical model of filtering consolidation in the body of soil dam with conduit and washout zone in two-dimensional case is considered. The impact of such technogenic factors as temperature, salt concentration, subsidence of upper boundary and interior points of the dam with time is taken into account. The software to automate the calculation of numerical solution of the boundary problem by radial basis functions has been created, which enables to conduct numerical experiments by varying the input parameters and shape. The influence of the presence of conduit and washout zone on the pressure, temperature and concentration of salts in the dam body at different time intervals is investigated. A number of numerical experiments is conducted and the analysis of dam accidents is performed.