

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.874:621.372.8

В.Т. Ерофеев

**МНОГОКРАТНАЯ ФОКУСИРОВКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ
ЛИНЗОЙ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА**

Предлагается метод аналитического решения краевой задачи проникновения электромагнитного поля точечного магнитного диполя через бесконечную плоскую двухслойную линзу (экран) из фокусирующих метаматериалов. Показывается, что для линз со специальными комбинациями материальных параметров слоев образуется серия фокусов: один за экраном и три перед экраном в полупространстве расположения точечного источника поля возбуждения. При этом суммарное поле фокусов перед линзой равно сумме полей магнитных и электрических диполей.

Введение

В электродинамике экранирующих структур значительное место занимает исследование свойств многослойных экранов, слои которых выполнены из различных композитных материалов: бианизотропных, биизотропных, киральных, метаматериалов и др. [1–3]. Как правило, изучаются структуры геометрически правильной формы: сферические, цилиндрические и плоские [4]. Это связано с возможностью получения аналитических решений задач рассеяния электромагнитных волн на экранах [5] и с их практическим применением. Наиболее детально исследованы многослойные плоские экраны при воздействии плоских электромагнитных волн [1, 2, 6]. Разрабатываются методы моделирования, основанные на использовании передаточных матриц и двухсторонних граничных условий для многослойных структур [7–10]. В последнее время в литературе выделяется класс экранов из метаматериалов с фокусирующими свойствами. Создаются модели, описывающие взаимодействие электромагнитных полей точечных источников с экранами из метаматериалов конечных размеров [11, 12] и бесконечно протяженных [13]. Выявляются условия фокусировки точечных источников однослойными и двухслойными экранами со специальными материальными параметрами [14, 15]. Надо отметить, что для экрана с фокусирующими параметрами решение задачи рассеяния поля точечного источника в классическом смысле не существует [16], но в предельном смысле, при приближении материальных параметров экрана к фокусирующим, решение задачи приближается к решению с особыми точками в фокусах [15].

В настоящей работе исследовано интегральное решение краевой задачи прохождения электромагнитного поля магнитного диполя через плоскопараллельную двухслойную линзу (экран) со слоями из метаматериалов. Применена методика моделирования, основанная на использовании двухсторонних граничных условий на поверхности многослойного биизотропного экрана [7] и теорем сложения, связывающих базисные сферические и цилиндрические электромагнитные поля [5, с. 153]. Исследована структура полей за экраном и перед экраном в случае фокусирующих материальных параметров слоев.

1. Постановка задачи

В свободном пространстве R^3 с декартовой системой координат $Oxyz$ разместим плоский экран $D(0 < z < \Delta)$, состоящий из двух слоев $\Omega_1(0 < z < \Delta_1)$, $\Omega_2(\Delta_1 < z < \Delta_1 + \Delta_2)$ с толщинами Δ_s , $s = 1, 2$ ($\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$). Слои выполнены из биизотропных материалов, характеризуемых следующими материальными комплексными параметрами: $\epsilon_s = \epsilon_{rs}\epsilon_0$, $\mu_s = \mu_{rs}\mu_0$,

$G_s = G_{rs}/c$, $Z_s = Z_{rs}/c$; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, c – скорость света в вакууме. В полупространстве $D_1(z < 0)$ на оси Oz в точке $O_1(0,0,-h)$, $h > 0$, размещен точечный магнитный диполь, который колеблется с круговой частотой $\omega = 2\pi f$ и возбуждает первичное поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 . В результате взаимодействия поля диполя с экраном D образуются поля: \vec{E}'_1, \vec{H}'_1 – поле в D_1 , отраженное от экрана D ; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$ – суммарное поле в области D_1 ; $\vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)}$ – поле в слое Ω_s ; \vec{E}_2, \vec{H}_2 – поле, проникшее в полупространство $D_2(z > \Delta)$. Рассматривается временная зависимость полей вида $\exp(-i\omega t)$. Сформулируем краевую задачу, моделирующую проникновение первичного поля \vec{E}_0, \vec{H}_0 через экран D .

Краевая задача 1. При заданном поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 требуется определить поля \vec{E}'_1, \vec{H}'_1 ; $\vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)}$; \vec{E}_2, \vec{H}_2 , которые удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } \vec{E}_j = i\omega\mu_0\vec{H}_j, \text{rot } \vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_j \text{ в } D_j, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E}^{(s)} = i\omega(\mu_s\vec{H}^{(s)} + Z_s\vec{E}^{(s)}), \text{rot } \vec{H}^{(s)} = -i\omega(\varepsilon_s\vec{E}^{(s)} + G_s\vec{H}^{(s)}) \text{ в } \Omega_s,$$

граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях раздела сред $\Gamma_1(z=0), \Gamma_1(z=\Delta_1), \Gamma_2(z=\Delta)$

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{1r} - \vec{E}_r^{(1)})|_{z=0} = 0, (\vec{H}_{1r} - \vec{H}_r^{(1)})|_{z=0} = 0, (\vec{E}_{2r} - \vec{E}_r^{(2)})|_{z=\Delta} = 0, (\vec{H}_{2r} - \vec{H}_r^{(2)})|_{z=\Delta} = 0, \\ (\vec{E}_r^{(1)} - \vec{E}_r^{(2)})|_{z=\Delta_1} = 0, (\vec{H}_r^{(1)} - \vec{H}_r^{(2)})|_{z=\Delta_1} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{E}'_1}{\partial r} - ik_0\vec{E}'_1 \right) = 0, \quad z < 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial r} - ik_0\vec{E}_2 \right) = 0, \quad z > \Delta, \quad (3)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$; r – радиальная координата сферической системы координат $O r \theta \varphi$, связанной с декартовой системой координат $Oxyz$.

2. Интегральное представление полей диполей

Рассмотрим магнитный и электрический диполи, расположенные в начале координат O и ориентированные вдоль оси Oz :

– магнитный диполь (TE -диполь, электрический вектор параллелен экрану D) [5, с. 170]

$$\vec{E}_m(O) = A_0 \tilde{m}_{01}(\vec{r}, k_0), \vec{H}_m(O) = h_0 A_0 \tilde{n}_{01}(\vec{r}, k_0); \quad (4)$$

– электрический диполь (TH -диполь, магнитный вектор параллелен экрану D) [5, с. 162]

$$\vec{E}_e(O) = B_0 \tilde{n}_{01}(\vec{r}, k_0), \vec{H}_e(O) = h_0 B_0 \tilde{m}_{01}(\vec{r}, k_0), \quad (5)$$

где A_0, B_0 – амплитуды диполей;

$$\vec{r} = (r, \theta, \varphi), \quad h_0 = \frac{1}{iZ_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad \tilde{m}_{01}, \tilde{n}_{01} \text{ – базисные сферические поля.}$$

Поля точечных диполей, расположенных в вакууме, выражаются через базисные сферические электромагнитные поля [5, с. 118].

Учитывая осевую симметрию полей диполей, представим поля (4), (5) через базисные цилиндрические поля в вакууме [5, с. 130]:

$$\vec{M}_0^{(\mp 1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) = \vec{V}_0^{(1)}(\lambda \rho) e^{\mp v_0(\lambda)z}, \quad (6)$$

$$\vec{M}_0^{(\mp 2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) = \frac{1}{k_0} \left(\mp v_0(\lambda) \vec{V}_0^{(2)}(\lambda \rho) + \lambda J_0(\lambda \rho) \vec{e}_z \right) e^{\mp v_0(\lambda)z},$$

где

$$\vec{V}_0^{(1)}(\lambda \rho) = \vec{V}_1 = J_1(\lambda \rho) \vec{e}_\varphi, \quad \vec{V}_0^{(2)}(\lambda \rho) = \vec{V}_2 = -J_1(\lambda \rho) \vec{e}_\rho, \quad (7)$$

$v_0(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ при $\lambda \geq k_0$, $v_0(\lambda) = -i\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ при $k_0 > \lambda$, $0 \leq \lambda < \infty$; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат $O\rho\varphi z$, $\vec{\rho} = (\rho, \varphi, z)$; $J_m(x)$ – функция Бесселя.

Используя теоремы сложения [5, с.153], представим поля диполей (4), (5) через цилиндрические поля (6) в виде интегралов:

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(O) &= A_0 \begin{cases} \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ 0 \\ \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0; \end{cases} \\ \vec{H}_m(O) &= h_0 A_0 \begin{cases} \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ 0 \\ \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0; \end{cases} \\ \vec{E}_s(O) &= B_0 \begin{cases} \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ 0 \\ \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0, \end{cases} \\ \vec{H}_s(O) &= h_0 B_0 \begin{cases} \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ 0 \\ \int_0^\infty c(\lambda) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

где $c(\lambda) = -\frac{i\lambda^2}{k_0^2 v_0(\lambda)}$.

Для диполей (4), (5), расположенных в произвольных точках $O_l(0, 0, h_l)$, $l = 1, 2, 3, \dots$, на оси Oz , учитывая сдвиг системы координат $z = z_l + h_l$ в формулах (8), получим интегральные представления полей:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}}(O_l) = \begin{cases} \int_0^{\infty} A(\lambda, h_l) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_l, \\ \int_0^{\infty} A(\lambda, -h_l) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_l, \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}}(O_l) = h_0 \begin{cases} \int_0^{\infty} A(\lambda, h_l) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_l, \\ \int_0^{\infty} A(\lambda, -h_l) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_l; \end{cases} \quad (9)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{s}}(O_l) = \begin{cases} \int_0^{\infty} B(\lambda, h_l) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_l, \\ \int_0^{\infty} B(\lambda, -h_l) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_l, \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_{\mathbf{s}}(O_l) = h_0 \begin{cases} \int_0^{\infty} B(\lambda, h_l) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_l, \\ \int_0^{\infty} B(\lambda, -h_l) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_l, \end{cases}$$

где $A(\lambda, h_l) = A_0 c(\lambda) e^{v_0(\lambda)h_l}$, $B(\lambda, h_l) = B_0 c(\lambda) e^{v_0(\lambda)h_l}$. (10)

Для поля магнитного диполя, расположенного в точке $O_{\text{и}}(0, 0, h_{\text{и}}) \in D_1$, $h_{\text{и}} = -h$, из формул (9) следует интегральное представление

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{M}}(O_{\text{и}}) = \int_0^{\infty} A(\lambda, -h) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, \quad z > -h,$$

$$\vec{\mathbf{H}}_0 = \vec{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}}(O_{\text{и}}) = h_0 \int_0^{\infty} A(\lambda, -h) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda. \quad (11)$$

3. Краевая задача для экрана с двухсторонними граничными условиями

Учитывая структуру первичного поля (11), решение задачи (1)–(3) представим в интегральном виде:

$$\vec{\mathbf{E}}_1' = \int_0^{\infty} \vec{E}_1'(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}}_1' = \int_0^{\infty} \vec{H}_1'(\lambda) d\lambda, \quad z < 0,$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \int_0^{\infty} \vec{E}_2(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}}_2 = \int_0^{\infty} \vec{H}_2(\lambda) d\lambda, \quad z > \Delta,$$

$$\vec{\mathbf{E}}^{(s)} = \int_0^{\infty} \vec{E}^s(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}}^{(s)} = \int_0^{\infty} \vec{H}^s(\lambda) d\lambda \quad \text{в } \Omega_s,$$

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = \int_0^{\infty} \vec{E}_0(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}}_0 = \int_0^{\infty} \vec{H}_0(\lambda) d\lambda,$$
(12)

где

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 + \vec{E}'_1 &= \vec{E}_1, \quad \vec{H}_0 + \vec{H}'_1 = \vec{H}_1, \\ \vec{E}_0(\lambda) &= a(\lambda)\vec{M}_0^{(-1)} + b(\lambda)\vec{M}_0^{(-2)}, \quad \vec{H}_0(\lambda) = h_0(a(\lambda)\vec{M}_0^{(-2)} + b(\lambda)\vec{M}_0^{(-1)}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$a(\lambda) = A(\lambda, -h), \quad b(\lambda) = 0.$$

Поля (12) удовлетворяют условиям (1)–(3) краевой задачи 1, если для подынтегральных полей выполнены условия следующей задачи.

Краевая задача 2. При заданном поле (13) требуется определить поля $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2; \vec{E}^s, \vec{H}^s$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}_j &= i\omega\mu_0\vec{H}_j, \quad \text{rot } \vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_j \quad \text{в } D_j, \\ \text{rot } \vec{E}^s &= i\omega(\mu_s\vec{H}^s + Z_s\vec{E}^s), \quad \text{rot } \vec{H}^s = -i\omega(\varepsilon_s\vec{E}^s + G_s\vec{H}^s) \quad \text{в } \Omega_s; \end{aligned} \quad (14)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{1\tau} - \vec{E}'_{1\tau})\Big|_{z=0} &= 0, \quad (\vec{H}_{1\tau} - \vec{H}'_{1\tau})\Big|_{z=0} = 0, \quad (\vec{E}_{2\tau} - \vec{E}'_{2\tau})\Big|_{z=\Delta} = 0, \quad (\vec{H}_{2\tau} - \vec{H}'_{2\tau})\Big|_{z=\Delta} = 0, \\ (\vec{E}_{\tau}^1 - \vec{E}_{\tau}^2)\Big|_{z=\Delta_1} &= 0, \quad (\vec{H}_{\tau}^1 - \vec{H}_{\tau}^2)\Big|_{z=\Delta_1} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

и условиям на бесконечности. ■

Решение задачи (14), (15) в областях D_1, D_2 представим через базисные поля (6)

$$\begin{aligned} \vec{E}'_1(\lambda) &= x_1(\lambda)\vec{M}_0^{(+1)} + y_1(\lambda)\vec{M}_0^{(+2)}, \quad \vec{H}'_1(\lambda) = h_0(x_1(\lambda)\vec{M}_0^{(+2)} + y_1(\lambda)\vec{M}_0^{(+1)}), \\ \vec{E}_2(\lambda) &= x_2(\lambda)\vec{M}_0^{(-1)} + y_2(\lambda)\vec{M}_0^{(-2)}, \quad \vec{H}_2(\lambda) = h_0(x_2(\lambda)\vec{M}_0^{(-2)} + y_2(\lambda)\vec{M}_0^{(-1)}). \end{aligned} \quad (16)$$

Поля в слоях Ω_s исключим из рассмотрения, заменяя граничные условия (15) на двухсторонние граничные условия, связывающие поля $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$ по обе стороны экрана D . Для формулировки двухсторонних граничных условий запишем тангенциальные составляющие полей (13), (16) на плоскостях Γ_1, Γ_2 в базисе \vec{V}_1, \vec{V}_2 (7):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} &= E_{1V_1}(\lambda)\vec{V}_1 + E_{1V_2}(\lambda)\vec{V}_2, \quad \vec{H}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = H_{1V_1}(\lambda)\vec{V}_1 + H_{1V_2}(\lambda)\vec{V}_2, \\ \vec{E}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} &= E_{2V_1}(\lambda)\vec{V}_1 + E_{2V_2}(\lambda)\vec{V}_2, \quad \vec{H}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} = H_{2V_1}(\lambda)\vec{V}_1 + H_{2V_2}(\lambda)\vec{V}_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} E_{1V_1} &= E'_{1V_1} + E_{0V_1} = x_1(\lambda) + a(\lambda), \quad E_{1V_2} = E'_{1V_2} + E_{0V_2} = \bar{v}_0(\lambda)(y_1(\lambda) - b(\lambda)), \\ H_{1V_1} &= H'_{1V_1} + H_{0V_1} = h_0(y_1(\lambda) + b(\lambda)), \quad H_{1V_2} = H'_{1V_2} + H_{0V_2} = h_0\bar{v}_0(\lambda)(x_1(\lambda) - a(\lambda)), \end{aligned} \quad (18)$$

$$E_{2V_1} = x_2(\lambda)F(\lambda), \quad E_{2V_2} = -\bar{v}_0(\lambda)y_2(\lambda)F(\lambda), \quad \bar{v}_0(\lambda) = \frac{v_0(\lambda)}{k_0},$$

$$H_{2V_1} = h_0y_2(\lambda)F(\lambda), \quad H_{2V_2} = -h_0\bar{v}_0(\lambda)x_2(\lambda)F(\lambda), \quad F(\lambda) = e^{-v_0(\lambda)\Delta}.$$

Сформулируем краевую задачу проникновения поля (13) через экран D (с использованием двухсторонних граничных условий), которая эквивалентна краевой задаче (14), (15).

Краевая задача 3. При заданном поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 (13) требуется определить поля $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E}_j = i\omega\mu_0 \vec{H}_j, \operatorname{rot} \vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_j \quad \text{в } D_j; \quad (19)$$

двухсторонним граничным условиям

$$\vec{U}_1|_{z=0} = \hat{S}(\lambda)\vec{U}_2|_{z=\Delta} \quad (20)$$

и условиям излучения в областях D_j .

Матрица $\hat{S}(\lambda)$ определяется как произведение двух матриц:

$$\hat{S}(\lambda) = \hat{C}_1(\lambda)\hat{C}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}, \vec{U}_j = \begin{pmatrix} E_{jV_1} \\ H_{jV_2} \\ E_{jV_2} \\ H_{jV_1} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где E_{jV_s}, H_{jV_s} — компоненты полей (17).

4. Вычисление передаточной матрицы для двухслойного экрана

Элементы передаточной матрицы

$$\hat{C}_s = \begin{pmatrix} C_{11}^{(s)} & C_{12}^{(s)} & C_{13}^{(s)} & C_{14}^{(s)} \\ C_{21}^{(s)} & C_{22}^{(s)} & C_{23}^{(s)} & C_{24}^{(s)} \\ C_{31}^{(s)} & C_{32}^{(s)} & C_{33}^{(s)} & C_{34}^{(s)} \\ C_{41}^{(s)} & C_{42}^{(s)} & C_{43}^{(s)} & C_{44}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (22)$$

для слоя Ω_s определяются формулами [7]

$$\begin{aligned} C_{11}^{(s)} &= p_s(p_{1s}C_2^{(s)} - p_{2s}C_1^{(s)}), \quad C_{12}^{(s)} = p_s\left(q_{1s}\frac{k_{1s}}{v_{1s}}S_1^{(s)} - q_{2s}\frac{k_{2s}}{v_{2s}}S_2^{(s)}\right), \\ C_{13}^{(s)} &= p_s\left(q_{2s}\frac{p_{1s}k_{2s}}{v_{2s}}S_2^{(s)} - q_{1s}\frac{p_{2s}k_{1s}}{v_{1s}}S_1^{(s)}\right), \quad C_{14}^{(s)} = p_s(C_1^{(s)} - C_2^{(s)}), \\ C_{21}^{(s)} &= p_s p_{1s} p_{2s} \left(q_{2s} \frac{v_{2s}}{k_{2s}} S_2^{(s)} - q_{1s} \frac{v_{1s}}{k_{1s}} S_1^{(s)} \right), \quad C_{22}^{(s)} = p_s(p_{1s}C_1^{(s)} - p_{2s}C_2^{(s)}), \\ C_{23}^{(s)} &= p_s p_{1s} p_{2s} (C_2^{(s)} - C_1^{(s)}), \quad C_{24}^{(s)} = p_s \left(\frac{p_{1s}v_{1s}}{q_{1s}k_{1s}} S_1^{(s)} - \frac{p_{2s}v_{2s}}{q_{2s}k_{2s}} S_2^{(s)} \right), \\ C_{31}^{(s)} &= p_s \left(\frac{p_{1s}v_{2s}}{q_{2s}k_{2s}} S_2^{(s)} - \frac{p_{2s}v_{1s}}{q_{1s}k_{1s}} S_1^{(s)} \right), \quad C_{32}^{(s)} = p_s(C_1^{(s)} - C_2^{(s)}), \\ C_{33}^{(s)} &= p_s(p_{1s}C_2^{(s)} - p_{2s}C_1^{(s)}), \quad C_{34}^{(s)} = p_s \left(\frac{v_{1s}}{q_{1s}k_{1s}} S_1^{(s)} - \frac{v_{2s}}{q_{2s}k_{2s}} S_2^{(s)} \right), \\ C_{41}^{(s)} &= p_s p_{1s} p_{2s} (C_2^{(s)} - C_1^{(s)}), \quad C_{42}^{(s)} = p_s \left(q_{1s} p_{1s} \frac{k_{1s}}{v_{1s}} S_1^{(s)} - q_{2s} p_{2s} \frac{k_{2s}}{v_{2s}} S_2^{(s)} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$C_{43}^{(s)} = p_s p_{1s} p_{2s} \left(q_{2s} \frac{k_{2s}}{v_{2s}} S_2^{(s)} - q_{1s} \frac{k_{1s}}{v_{1s}} S_1^{(s)} \right), \quad C_{44}^{(s)} = p_s (p_{1s} C_1^{(s)} - p_{2s} C_2^{(s)}), \quad (23)$$

$$C_j^{(s)} = \text{ch}(\xi_{js}), \quad S_j^{(s)} = \text{sh}(\xi_{js}), \quad \xi_{js} = v_{js}(\lambda) \Delta_s, \quad v_{js}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_{js}^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}.$$

Величины в формулах (23)

$$k_{js} = k_0 \bar{k}_{js}, \quad f_{0s} = k_0 \bar{f}_{0s}, \quad f_{js} = k_0 \bar{f}_{js}, \quad g_s = k_0^2 \bar{g}_s, \quad g_j = k_0 \bar{g}_j, \quad a_s = k_0 \bar{a}_s, \quad b_s = k_0 \bar{b}_s, \quad p_{js} = \bar{p}_{js} / Z_0,$$

$$q_{js} = \frac{\bar{g}_s}{k_{js} \bar{g}_{js}}, \quad v_{js} = k_0 \bar{v}_{js}, \quad p_s = \frac{1}{p_{1s} - p_{2s}} = Z_0 \bar{p}_s, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

выразим через безразмерные величины, обозначаемые чертой сверху:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{js} &= \sqrt{\bar{g}_s + \frac{1}{2} \bar{a}_s^2 + \bar{a}_s \bar{f}_{js}}, \quad \bar{f}_{js} = (-1)^j \bar{f}_{0s}, \quad \bar{f}_{0s} = \sqrt{\varepsilon_{rs} \mu_{rs} - \bar{b}_s^2}, \\ 0 \leq \arg \bar{k}_{js} &< \pi, \quad 0 \leq \arg \bar{f}_{0s} < \pi, \quad \bar{g}_s = \varepsilon_{rs} \mu_{rs} - G_{rs} Z_{rs}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{g}_{js} = \bar{f}_{js} - \frac{1}{2} \bar{a}_s, \quad \bar{p}_{js} = \frac{1}{\mu_{rs}} \left(\frac{i \bar{g}_s}{\bar{g}_{js}} - Z_{rs} \right), \quad \bar{a}_s = i(G_{rs} - Z_{rs}),$$

$$\bar{b}_s = \frac{1}{2} (G_{rs} + Z_{rs}), \quad \bar{v}_{js}(\lambda) = \sqrt{\bar{\lambda} - \bar{k}_{js}^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg \bar{v}_{js} < \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{k_0},$$

$$\bar{p}_s = \frac{1}{\bar{p}_{1s} - \bar{p}_{2s}}.$$

Наложим на материальные параметры слоев Ω_s условия фокусировки

$$\varepsilon_{rs} \mu_{rs} - \chi_s^2 = 1, \quad G_{rs} = Z_{rs} = \chi_s, \quad s = 1, 2, \quad (25)$$

где χ_s – произвольные комплексные числа.

Тогда безразмерные величины (24) примут значения

$$\bar{a}_s = 0, \quad \bar{b}_s = \chi_s, \quad \bar{g}_s = 1, \quad \bar{k}_{1s} = \bar{k}_{2s} = 1, \quad \bar{g}_{1s} = -1, \quad \bar{g}_{2s} = 1, \quad f_{0s} = 1, \quad \bar{f}_{1s} = -1, \quad \bar{f}_{2s} = 1,$$

$$q_{1s} = -1, \quad q_{2s} = 1, \quad \bar{p}_{1s} = -\frac{i}{\mu_{rs}} (1 - i\chi_s), \quad \bar{p}_{2s} = \frac{i}{\mu_s} (1 + i\chi_s), \quad \bar{p}_s = \frac{i\mu_s}{2}, \quad \bar{v}_{1s} = \bar{v}_{2s} = \bar{v}_0(\lambda).$$

Матричные элементы матрицы (22) упрощаются. Получим

$$\hat{C}_s = \begin{pmatrix} C_s & C_{12}^{(s)} & C_{13}^{(s)} & 0 \\ C_{21}^{(s)} & C_s & 0 & C_{24}^{(s)} \\ C_{31}^{(s)} & 0 & C_s & C_{34}^{(s)} \\ 0 & C_{42}^{(s)} & C_{43}^{(s)} & C_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (26)$$

где $C_{11}^{(s)} = C_{22}^{(s)} = C_{33}^{(s)} = C_{44}^{(s)} = C_s, \quad C_{14}^{(s)} = C_{23}^{(s)} = C_{32}^{(s)} = C_{41}^{(s)} = 0,$

$$\begin{aligned}
C_{12}^{(s)} &= -\frac{i\mu_{rs}}{\bar{v}_0} Z_0 S_s, & C_{13}^{(s)} &= -\frac{i\chi_s}{\bar{v}_0} S_s, & C_s &= \text{ch}(\xi_s), & S_s &= \text{sh}(\xi_s), & \xi_s &= v_0(\lambda)\Delta_s, \\
C_{21}^{(s)} &= \frac{i\varepsilon_{rs}}{Z_0} \bar{v}_0 S_s, & C_{24}^{(s)} &= i\chi_s \bar{v}_0 S_s, & C_{31}^{(s)} &= -i\chi_s \bar{v}_0 S_s, \\
C_{34}^{(s)} &= -iZ_0 \mu_{rs} \bar{v}_0 S_s, & C_{42}^{(s)} &= \frac{i\chi_s}{\bar{v}_0} S_s, & C_{43}^{(s)} &= \frac{i\varepsilon_{rs}}{Z_0 \bar{v}_0} S_s.
\end{aligned}$$

Вычислим матрицу (21), умножая матрицы (26). Для матричных элементов получим формулы

$$\begin{aligned}
S_{11} &= S_{33} = C_1 C_2 + (\mu_{r1} \varepsilon_{r2} - \chi_1 \chi_2) S_1 S_2, & S_{22} &= S_{44} = C_1 C_2 + (\varepsilon_{r1} \mu_{r2} - \chi_1 \chi_2) S_1 S_2, \\
S_{12} &= -\frac{iZ_0}{\bar{v}_0} (\mu_{r1} C_2 S_1 + \mu_{r2} C_1 S_2), & S_{13} &= -\frac{i}{\bar{v}_0} (\chi_1 C_2 S_1 + \chi_2 C_1 S_2), \\
S_{14} &= (\mu_{r1} \chi_2 - \mu_{r2} \chi_1) Z_0 S_1 S_2, & S_{21} &= \frac{i\bar{v}_0}{Z_0} (\varepsilon_{r1} C_2 S_1 + \varepsilon_{r2} C_1 S_2), \\
S_{23} &= \frac{1}{Z_0} (\varepsilon_{r1} \chi_2 - \varepsilon_{r2} \chi_1) S_1 S_2, & S_{24} &= i\bar{v}_0 (\chi_1 C_2 S_1 + \chi_2 C_1 S_2), \\
S_{34} &= -i\bar{v}_0 Z_0 (\mu_{r1} C_2 S_1 + \mu_{r2} C_1 S_2), & S_{43} &= \frac{i}{Z_0 \bar{v}_0} (\varepsilon_{r1} C_2 S_1 + \varepsilon_{r2} C_1 S_2), \\
S_{31} &= -S_{24}, & S_{32} &= S_{14}, & S_{41} &= S_{23}, & S_{42} &= -S_{13}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Матрица (21) граничного условия определена.

5. Аналитическое решение краевых задач экранирования

Решение краевой задачи 3 представим в виде полей (16), которые удовлетворяют уравнениям (19). Для определения неизвестных функций $x_s(\lambda)$, $y_s(\lambda)$ запишем векторное граничное условие (20) в виде четырех скалярных уравнений, подставляя в (20) компоненты (18) векторов \vec{U}_s . Получим систему алгебраических уравнений для вычисления x_s , y_s :

$$\begin{aligned}
(S_{11} - h_0 \bar{v}_0 S_{12}) x_2 + (h_0 S_{14} - \bar{v}_0 S_{13}) y_2 &= (x_1 + a)/F, \\
(S_{21} - h_0 \bar{v}_0 S_{22}) x_2 + (h_0 S_{24} - \bar{v}_0 S_{23}) y_2 &= h_0 \bar{v}_0 (x_1 - a)/F, \\
(S_{31} - h_0 \bar{v}_0 S_{32}) x_2 + (h_0 S_{34} - \bar{v}_0 S_{33}) y_2 &= \bar{v}_0 (y_1 - b)/F, \\
(S_{41} - h_0 \bar{v}_0 S_{42}) x_2 + (h_0 S_{44} - \bar{v}_0 S_{43}) y_2 &= h_0 (y_1 + b)/F.
\end{aligned} \tag{28}$$

Решая систему уравнений (28), получим

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{2}{DF} (aK_{22} - bK_{12}), & y_2 &= \frac{2}{DF} (bK_{11} - aK_{21}), \\
x_1 &= \frac{2}{D} [(S_{11} - h_0 \bar{v}_0 S_{12})(aK_{22} - bK_{12}) + (\bar{v}_0 S_{13} - h_0 S_{14})(aK_{21} - bK_{11})] - a, \\
y_1 &= \frac{2}{D} [(iZ_0 S_{41} - \bar{v}_0 S_{42})(aK_{22} - bK_{12}) + (iZ_0 \bar{v}_0 S_{43} - S_{44})(aK_{21} - bK_{11})] - b,
\end{aligned} \tag{29}$$

где с учетом (27)

$$K_{11} = S_{11} - h_0 \bar{v}_0 S_{12} - \frac{iZ_0}{\bar{v}_0} S_{21} + S_{22} = K(\lambda) = \beta_0 S_1 S_2 + \alpha_1 C_2 S_1 + \alpha_2 C_1 S_2 + 2C_1 C_2,$$

$$K_{22} = S_{33} - \frac{h_0}{\bar{v}_0} S_{34} - iZ_0 \bar{v}_0 S_{43} + S_{44} = K(\lambda),$$

$$K_{12} = -\bar{v}_0 S_{13} + h_0 S_{14} + iZ_0 S_{23} - \frac{1}{\bar{v}_0} S_{24} = i\alpha_0 S_1 S_2 = K_0(\lambda),$$

$$K_{21} = -\frac{1}{\bar{v}_0} S_{31} + h_0 S_{32} + iZ_0 S_{41} - \bar{v}_0 S_{42} = K_0(\lambda),$$

$$D = K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21} = K^2 - K_0^2, \quad \alpha_0 = (\varepsilon_{r1} - \mu_{r1}) \chi_2 + (\mu_{r2} - \varepsilon_{r2}) \chi_1,$$

$$\beta_0 = \mu_{r1} \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r1} \mu_{r2} - 2\chi_1 \chi_2, \quad \alpha_1 = \varepsilon_{r1} + \mu_{r1}, \quad \alpha_2 = \varepsilon_{r2} + \mu_{r2}.$$

Решение (16) краевой задачи (19)–(21) при условиях фокусировки (25) построено.

Для магнитного диполя (13) $b = 0$. Подставляя функции (29) в (16) и далее в интегралы (12), определим электромагнитные поля $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$, являющиеся решением краевой задачи 1. Для электрических полей получим следующие интегральные представления:

$$\vec{E}_2 = \int_0^\infty \frac{2A(\lambda, -h)}{D(\lambda)F(\lambda)} K(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda - \int_0^\infty \frac{2A(\lambda, -h)}{D(\lambda)F(\lambda)} K_0(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda, \quad (30)$$

$$\vec{E}'_1 = \int_0^\infty 2 \frac{A(\lambda, -h)}{D(\lambda)} P(\lambda) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda + \int_0^\infty 2 \frac{A(\lambda, -h)}{D(\lambda)} P_0(\lambda) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda,$$

где

$$P(\lambda) = (S_{11} - h_0 \bar{v}_0 S_{12})K + (\bar{v}_0 S_{13} - h_0 S_{14})K_0 - \frac{1}{2}D,$$

$$P_0(\lambda) = (iZ_0 S_{41} - \bar{v}_0 S_{42})K + (iZ_0 \bar{v}_0 S_{43} - S_{44})K_0.$$

6. Преобразование первичного TE -поля в TE -поле за экраном

Первичное поле (13) является TE -полем, которое при прохождении за экран в область D_2 преобразуется в поле (30). Поле (30) определяется суммой TE -поля и TH -поля. Исключим TH -поле, накладывая на материальные параметры экрана дополнительное условие фокусировки

$$\alpha_0 = (\varepsilon_{r1} - \mu_{r1}) \chi_2 + (\mu_{r2} - \varepsilon_{r2}) \chi_1 = 0, \quad (31)$$

тогда

$$K_0 = 0, \quad D = K^2, \quad P = \bar{P}K, \quad \bar{P} = S_{11} - h_0 \bar{v}_0 S_{12} - \frac{1}{2}K, \quad P_0 = \bar{P}_0 K, \quad \bar{P}_0 = iZ_0 S_{41} - \bar{v}_0 S_{42}.$$

Запишем эти величины через экспоненты:

$$K = \frac{1}{4} \left(\tau_1 e^{-v_0 \Delta} + \tau_2 e^{v_0(\Delta_2 - \Delta_1)} + \tau_3 e^{v_0(\Delta_1 - \Delta_2)} + \tau_4 e^{v_0 \Delta} \right), \quad (32)$$

$$\bar{P}_0 = \frac{i}{4} \left(\nu_1 e^{-v_0 \Delta} + \nu_2 e^{v_0(\Delta_2 - \Delta_1)} + \nu_3 e^{v_0(\Delta_1 - \Delta_2)} + \nu_4 e^{v_0 \Delta} \right),$$

$$\bar{P} = \frac{1}{8} \left(\sigma_1 e^{-\nu_0 \Delta} + \sigma_2 e^{\nu_0 (\Delta_2 - \Delta_1)} + \sigma_3 e^{\nu_0 (\Delta_1 - \Delta_2)} + \sigma_4 e^{\nu_0 \Delta} \right),$$

где

$$\tau_1 = 2 + \beta_0 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad \tau_2 = 2 - \beta_0 - \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\tau_3 = 2 - \beta_0 + \alpha_1 - \alpha_2, \quad \tau_4 = 2 + \beta_0 + \alpha_1 + \alpha_2;$$

$$\nu_1 = (\varepsilon_{r1} + 1)\chi_2 - (\varepsilon_{r2} - 1)\chi_1, \quad \nu_2 = (\varepsilon_{r2} + 1)\chi_1 - (\varepsilon_{r1} + 1)\chi_2,$$

$$\nu_3 = (\varepsilon_{r2} - 1)\chi_1 - (\varepsilon_{r1} - 1)\chi_2, \quad \nu_4 = (\varepsilon_{r1} - 1)\chi_2 - (\varepsilon_{r2} + 1)\chi_1;$$

$$\sigma_1 = -\gamma_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \sigma_2 = \gamma_0 + \alpha_1 - \alpha_2, \quad \sigma_3 = \gamma_0 - \alpha_1 + \alpha_2, \quad \sigma_4 = -\gamma_0 - \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$\gamma_0 = \varepsilon_{r1} \mu_{r2} - \mu_{r1} \varepsilon_{r2}.$$

В результате при условии (31) поля (30) примут вид

$$\bar{\mathbf{E}}_2 = 2 \int_0^\infty \frac{A(\lambda, -h)}{K(\lambda) F(\lambda)} \bar{M}_0^{(-1)}(\bar{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda; \quad (33)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_1' = 2 \int_0^\infty \frac{A(\lambda, -h)}{K(\lambda)} \bar{P}(\lambda) \bar{M}_0^{(+1)}(\bar{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda + 2 \int_0^\infty \frac{A(\lambda, -h)}{K(\lambda)} \bar{P}_0(\lambda) \bar{M}_0^{(+2)}(\bar{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda. \quad (34)$$

7. Способ фокусировки полей 1

Для фокусировки электромагнитных полей экраном D наложим на материальные параметры слоев экрана дополнительные условия фокусировки. В выражении (32) при условии $\Delta_1 \neq \Delta_2$ положим

$$\tau_2 = 2 - \beta_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \tau_3 = 2 - \beta_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \tau_4 = 2 + \beta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0. \quad (35)$$

Разрешим систему алгебраических уравнений (35):

$$\alpha_1 = \varepsilon_{r1} + \mu_{r1} = -2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_{r2} + \mu_{r2} = -2, \quad \beta_0 = \varepsilon_{r1} \mu_{r2} + \mu_{r1} \varepsilon_{r2} - 2\chi_1 \chi_2 = 2. \quad (36)$$

В результате получим систему уравнений фокусировки (25), (31), (36), которая имеет два линейных многообразия решений:

– первое многообразие

$$\varepsilon_{r1} = \delta_1, \quad \mu_{r1} = -2 - \delta_1, \quad G_{r1} = Z_{r1} = i(1 + \delta_1), \quad (37)$$

$$\varepsilon_{r2} = \delta_2, \quad \mu_{r2} = -2 - \delta_2, \quad G_{r2} = Z_{r2} = i(1 + \delta_2),$$

где δ_1, δ_2 – произвольные комплексные величины;

– второе многообразие

$$\varepsilon_{r1} = \delta_1, \quad \mu_{r1} = -2 - \delta_1, \quad G_{r1} = Z_{r1} = -i(1 + \delta_1), \quad (38)$$

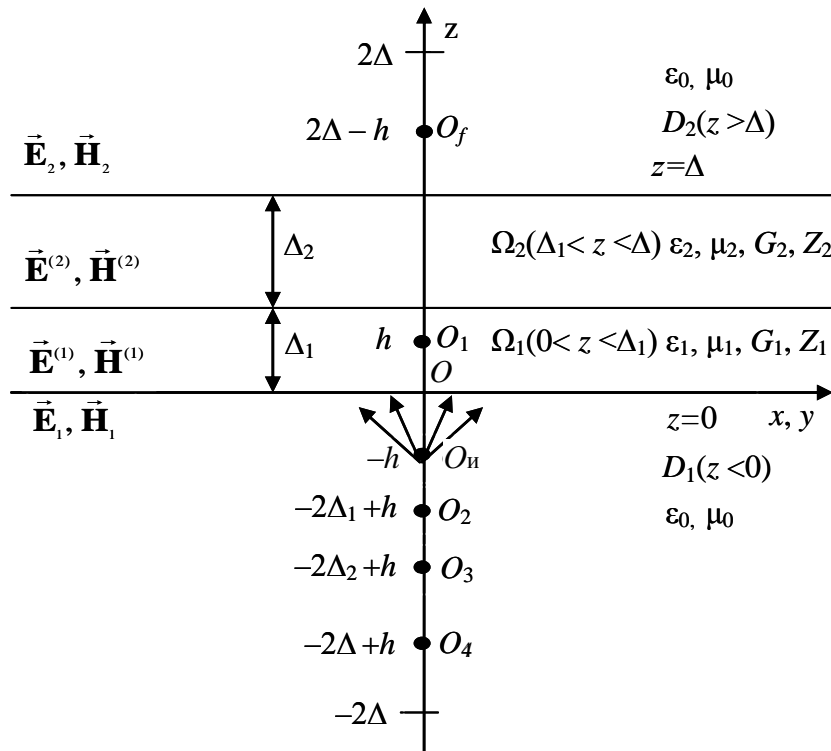
$$\varepsilon_{r2} = \delta_2, \quad \mu_{r2} = -2 - \delta_2, \quad G_{r2} = Z_{r2} = -i(1 + \delta_2).$$

Таким образом, если экран выполнен из материалов (37) или (38), то $K(\lambda) = \frac{\tau_1}{4} e^{-\nu_0(\lambda)\Delta}$ и поле за экраном (33) с учетом формул (9), (10) определяется выражением

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_2 &= \frac{8}{\tau_1} \int_0^\infty A(\lambda, -h) e^{2\nu_0(\lambda)\Delta} \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda = \\ &= \frac{8}{\tau_1} \int_0^\infty A(\lambda, h_f) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda = \frac{8}{\tau_1} \vec{\mathbf{E}}_m(O_f) = A_0 \tilde{m}_{01}(\vec{r}_f, k_0), \end{aligned} \quad (39)$$

где $h_f = 2\Delta - h$, с учетом (32), (36) $\tau_1 = 8$.

Формула (39) показывает, что поле в области D_2 является полем магнитного диполя, сосредоточенного в точке O_f с координатами $x=0, y=0, z=h_f$. Из условия $0 < h < \Delta$ следует, что $h_f > \Delta$, т. е. источник O_f расположен в области D_2 на расстоянии $\Delta - h$ от экрана D и является фокусом (рисунок).



Двухслойная линза с точками фокусировки. Способ фокусировки 1, $0 < h < 2\Delta_1, 0 < h < 2\Delta_2, 0 < h < \Delta$; O_{II} – источник поля, O_f, O_2, O_3, O_4 – фокусы, O_1 – фиктивный фокус

Вычислим отраженное поле (34) в области D_1 :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}'_1 &= \frac{1}{\tau_1} \int_0^\infty A(\lambda, -h) e^{\nu_0\Delta} \left(\sigma_1 e^{-\nu_0\Delta} + \sigma_2 e^{\nu_0(\Delta_2-\Delta_1)} + \sigma_3 e^{\nu_0(\Delta_1-\Delta_2)} + \sigma_4 e^{\nu_0\Delta} \right) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda + \\ &+ \frac{2i}{\tau_1} \int_0^\infty A(\lambda, -h) e^{\nu_0\Delta} \left(\nu_1 e^{-\nu_0\Delta} + \nu_2 e^{\nu_0(\Delta_2-\Delta_1)} + \nu_3 e^{\nu_0(\Delta_1-\Delta_2)} + \nu_4 e^{-\nu_0\Delta} \right) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda. \end{aligned}$$

Учитывая формулы (4), (5), (9), (10), получим представление поля

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}'_1 &= \frac{1}{8} \int_0^\infty \left(\sum_{l=1}^4 \sigma_l A(\lambda, -h_l) \right) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda + \frac{i}{4} \int_0^\infty \left(\sum_{l=1}^4 \nu_l A(\lambda, -h_l) \right) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda = \\ &= \sum_{l=1}^4 \left(\frac{1}{8} \sigma_l \vec{\mathbf{E}}_m(O_l) + \frac{i}{4} \nu_l \vec{\mathbf{E}}_s(O_l) \right) = A_0 \sum_{l=1}^4 \left(\frac{1}{8} \sigma_l \tilde{m}_{01}(O_l) + \frac{i}{4} \nu_l \tilde{n}_{01}(O_l) \right), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= h, h_2 = h - 2\Delta_2, h_3 = h - 2\Delta_1, h_4 = h - 2\Delta; \\ \sigma_1 &= 2(\delta_1 - \delta_2) - 4, \sigma_2 = \sigma_3 = 2(\delta_2 - \delta_1), \sigma_4 = 2(\delta_1 - \delta_2) + 4; \\ v_1 &= 2i(1 + \delta_1), v_2 = 0, v_3 = 2i(\delta_2 - \delta_1), v_4 = -2i(1 + \delta_2). \end{aligned}$$

С учетом формул (37) и (38) $v_1 = -2i(1 + \delta_1)$, $v_2 = 0$, $v_3 = -2i(\delta_2 - \delta_1)$, $v_4 = 2i(1 + \delta_2)$.

Анализ формул (40) показывает, что отраженное поле в области D_1 состоит из суммы полей электрических и магнитных диполей, сосредоточенных в четырех точках O_l ($l=1, 2, 3, 4$). Точка O_1 во всех случаях расположена вне полупространства D_1 , а при $h_l < 0$ источник O_l поля диполя принадлежит области D_1 и является фокусом, который формируется перед экраном в области источника O_{II} первичного поля. В частности, при выполнении условий $0 < h < 2\Delta_1$, $0 < h < 2\Delta_2$ точки O_2 , O_3 , O_4 являются фокусами в области D_1 (см. рисунок); при $0 < h < 2\Delta_1$, $h > 2\Delta_2$ точки O_3 , O_4 – фокусы в области D_1 ; при $0 < h < 2\Delta_2$, $h > 2\Delta_1$ точки O_2 , O_4 – фокусы в области D_1 ; при $2\Delta_1 < h$, $2\Delta_2 < h$, $h < 2\Delta$ точка O_4 – фокус.

8. Способ фокусировки полей 2

Вместо условий (35) выберем другую комбинацию условий фокусировки. В выражении (32) положим

$$\tau_1 = 2 + \beta_0 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \tau_3 = 2 - \beta_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \tau_4 = 2 + \beta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\alpha_1 = \varepsilon_{r1} + \mu_{r1} = -2, \alpha_2 = \varepsilon_{r2} + \mu_{r2} = 2, \beta_0 = \varepsilon_{r1}\mu_{r2} + \mu_{r1}\varepsilon_{r2} - 2\chi_1\chi_2 = -2. \quad (41)$$

Система уравнений фокусировки (25), (31), (41) имеет два линейных многообразия решений:

$$\varepsilon_{r1} = \delta_1, \quad \mu_{r1} = -2 - \delta_1, \quad G_{r1} = Z_{r1} = i(\delta_1 + 1), \quad (42)$$

$$\varepsilon_{r2} = \delta_2, \quad \mu_{r2} = 2 - \delta_2, \quad G_{r2} = Z_{r2} = i(\delta_2 - 1);$$

$$\varepsilon_{r1} = \delta_1, \quad \mu_{r1} = -2 - \delta_1, \quad G_{r1} = Z_{r1} = -i(\delta_1 + 1), \quad (43)$$

$$\varepsilon_{r2} = \delta_2, \quad \mu_{r2} = 2 - \delta_2, \quad G_{r2} = Z_{r2} = -i(\delta_2 - 1),$$

где δ_1, δ_2 – произвольные комплексные величины.

Если экран выполнен из материалов (42) или (43), то $K(\lambda) = \frac{\tau_2}{4} e^{v_0(\lambda)(\Delta_2 - \Delta_1)}$ и поле за экраном (33) с учетом формул (9), (10) определяется выражением

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \frac{8}{\tau_2} \int_0^\infty A(\lambda, -h) e^{v_0(\lambda)(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2)} \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda = \\ &= \frac{8}{\tau_2} \int_0^\infty A(\lambda, h_{f1}) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) d\lambda = \frac{8}{\tau_2} \vec{E}_m(O_{f1}) = A_0 \vec{m}_{01}(\vec{r}_{f1}, k_0), \end{aligned}$$

где $h_{f1} = \Delta + \Delta_1 - \Delta_2 - h$, $\tau_2 = 8$.

Показано, что поле $\vec{\mathbf{E}}_2$ в области D_2 является полем магнитного диполя, сосредоточенного в точке $O_{f_1}(0,0,h_{f_1})$. Из условия $0 < h < \Delta_1 - \Delta_2$ ($\Delta_1 > \Delta_2$) следует $h_{f_1} > \Delta$, т. е. источник O_{f_1} расположен в области D_2 на расстоянии $\Delta_1 - \Delta_2 - h$ от экрана и является фокусом.

Отраженное поле в области D_1 определяется формулами (40), где для источников поля $O_l(0,0,h_l)$ $h_1 = 2\Delta_2 + h$, $h_2 = h$, $h_3 = 2(\Delta_2 - \Delta_1) + h$, $h_4 = -2\Delta_1 + h$. Для материальных параметров (42) коэффициенты $\sigma_1 = \sigma_4 = -2(\delta_1 + \delta_2)$, $\sigma_2 = 2(\delta_1 + \delta_2) - 4$, $\sigma_3 = 2(\delta_1 + \delta_2) + 4$; $v_1 = 0$, $v_2 = 2i(\delta_1 + 1)$, $v_3 = 2i(\delta_2 - 1)$, $v_4 = 2i(\delta_1 + \delta_2)$, а для параметров (43) $v_1 = 0$, $v_2 = -2i(\delta_1 + 1)$, $v_3 = -2i(\delta_2 - 1)$, $v_4 = -2i(\delta_1 + \delta_2)$.

Из значений координат точек O_l следует, что точки O_1 и O_2 во всех случаях лежат вне области D_1 . При условии $0 < h < 2(\Delta_1 - \Delta_2)$ точки O_3 и O_4 принадлежат области D_1 и являются фокусами.

При условии $2(\Delta_1 - \Delta_2) < h < 2\Delta_1$ точка O_3 лежит вне области D_1 , а точка $O_4 \in D_1$, т. е. является фокусом. При условии $h > 2\Delta_1$ точки O_3 и O_4 не принадлежат области D_1 .

9. Способ фокусировки полей 3

Выберем условия фокусировки, полагая в выражении (32)

$$\tau_1 = 2 + \beta_0 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \tau_2 = 2 - \beta_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \tau_4 = 2 + \beta_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$\alpha_1 = \varepsilon_{r1} + \mu_{r1} = 2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_{r2} + \mu_{r2} = -2, \quad \beta_0 = \varepsilon_{r1}\mu_{r2} + \mu_{r1}\varepsilon_{r2} - 2\chi_1\chi_2 = -2. \quad (44)$$

Решив систему уравнений (25), (31), (44), получим два многообразия решений, которые определяют фокусирующие материальные параметры слоев:

$$\varepsilon_{r1} = \delta_1, \quad \mu_{r1} = 2 - \delta_1, \quad G_{r1} = Z_{r1} = i(\delta_1 - 1), \quad (45)$$

$$\varepsilon_{r2} = \delta_2, \quad \mu_{r2} = -2 - \delta_2, \quad G_{r2} = Z_{r2} = i(\delta_2 + 1);$$

$$\varepsilon_{r1} = \delta_1, \quad \mu_{r1} = 2 - \delta_1, \quad G_{r1} = Z_{r1} = -i(\delta_1 - 1), \quad (46)$$

$$\varepsilon_{r2} = \delta_2, \quad \mu_{r2} = -2 - \delta_2, \quad G_{r2} = Z_{r2} = -i(\delta_2 + 1),$$

где δ_1, δ_2 – произвольные комплексные величины.

Расположение фокусов определяется по аналогии со способом фокусировки 2. В результате

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{E}}_m(O_{f_2}) = A_0 \tilde{m}_{01}(\vec{r}_{f_2}, k_0),$$

где координаты фокуса $O_{f_2} = (0,0,h_{f_2})$, $h_{f_2} = \Delta + \Delta_2 - \Delta_1 - h$;

$$\vec{\mathbf{E}}'_1 = \sum_{l=1}^4 \left(\frac{1}{8} \sigma_l \vec{\mathbf{E}}_m(O_l) + \frac{i}{4} v_l \vec{\mathbf{E}}_s(O_l) \right) = A_0 \sum_{l=1}^4 \left(\frac{1}{8} \sigma_l \tilde{m}_{01}(\vec{r}_l, k_0) + \frac{i}{4} v_l \tilde{n}_{01}(\vec{r}_l, k_0) \right).$$

Здесь для материальных параметров экрана (43) $\sigma_1 = \sigma_4 = 2(\delta_1 + \delta_2)$, $\sigma_2 = -2(\delta_1 + \delta_2) + 4$, $\sigma_3 = -2(\delta_1 + \delta_2) - 4$; $v_1 = 2i(\delta_1 + \delta_2)$, $v_2 = -2i(\delta_2 + 1)$, $v_3 = -2i(\delta_1 - 1)$, $v_4 = 0$; для материальных

параметров (44) коэффициенты σ_l совпадают с вышеприведенными коэффициентами, а $v_1 = -2i(\delta_1 + \delta_2)$, $v_2 = 2i(\delta_2 + 1)$, $v_3 = 2i(\delta_1 - 1)$, $v_4 = 0$.

Координаты точек расположения диполей $O_l = (0, 0, h_l)$ следующие:

$$h_1 = 2\Delta_1 + h, h_2 = 2(\Delta_1 - \Delta_2) + h, h_3 = h, h_4 = -2\Delta_2 + h.$$

Отметим, что дипольная структура фокусов по обе стороны однослойной линзы аналитически описана в материалах [17].

Заключение

Фокусирующие материальные параметры двух плоских слоев с толщинами Δ_1 и Δ_2 ($\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$, $\Delta_1 \neq \Delta_2$) двухслойной линзы (экрана) из метаматериалов составляют ряд одномерных линейных многообразий, параметризуемых независимыми произвольными комплексными величинами δ_1 и δ_2 . Возможны три основных варианта заполнения слоев фокусирующими материалами с фиксированными величинами δ_1 и δ_2 , при которых осуществляется фокусировка поля магнитного диполя, расположенного перед экраном на расстоянии h от экрана. Возможны другие варианты заполнения слоев. В случае типового варианта (способ фокусировки 1) имеем следующие фокусы: при $0 < h < \Delta$ за экраном образуется один фокус; при $0 < h < 2\Delta_1$, $0 < h < 2\Delta_2$ перед экраном возникают три фокуса; при условиях $0 < h < 2\Delta_1$, $2\Delta_2 < h$ или $0 < h < 2\Delta_2$, $2\Delta_1 < h$ – два фокуса; при $2\Delta_1 < h$, $2\Delta_2 < h$, $h < 2\Delta$ – один фокус; при $h > 2\Delta$ фокусы перед экраном отсутствуют. Рассмотрены и другие способы фокусировки.

Список литературы

1. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.И. Иванов. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 262 с.
2. Неганов, В.А. Электродинамика отражающих и волноведущих структур с искусственными киральными слоями / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – № 8. – С. 20–45.
3. Блюх, К.Ю. Что такое левые среды и чем они интересны / К.Ю. Блюх, Ю.П. Блюх // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, № 4. – С. 439–447.
4. Electromagnetic scattering by multilayered chiral-media structures: a scattering – to – radiation transform / L.-W. Li [et al.] // Progress in electromagnetics research. – 2000. – PIER 26. – P. 249–291.
5. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
6. Ерофеенко, В.Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоскостойкой структуре из биизотропных материалов / В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый // Информатика. – 2012. – № 1. – С. 58–65.
7. Ерофеенко, В.Т. Модели граничных условий на композиционных экранах для электромагнитных полей с осевой симметрией / В.Т. Ерофеенко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 2. – С. 41–45.
8. Иванов, О.В. Распространение света в киральных слоистых средах. Метод матриц 4×4 / О.В. Иванов, Д.И. Семенов // Кристаллография. – 2000. – Т. 45, № 3. – С. 534–540.
9. Жук, Н.П. Скаляризация электромагнитного поля в произвольно-анизотропной плоскостойкой среде / Н.П. Жук // Радиотехника и электроника. – 1994. – № 11. – С. 1706–1715.
10. Евельсон, Р.Л. Метод решения задачи о распространении электромагнитных волн в многослойной плоскостойкой поглощающей анизотропной магнитоэлектрической среде / Р.Л. Евельсон // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 6. – С. 918–925.

11. Шевченко, В.В. Локализация стационарного электромагнитного поля при помощи плоской границы метаматериала / В.В. Шевченко // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181, № 11. – С. 1171–1182.
12. Анютин, А.П. О резонансных свойствах ближнего поля в тонких линзах Веселаго и Пендри конечных размеров / А.П. Анютин, А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 9. – С. 1012–1019.
13. Ерофеенко, В.Т. Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2013. – № 4. – С. 113–120.
14. Шевченко, В.В. Геометрооптическая теория плоской линзы из кирального метаматериала / В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54, № 6. – С. 696–700.
15. Ерофеенко, В.Т. Двухсторонняя фокусировка электромагнитного поля точечного источника плоской линзой из метаматериала / В.Т. Ерофеенко // Информатика. – 2016. – № 1. – С. 14–25.
16. Шатров, А.Д. О разрешимости задач возбуждения плоскостойких сред из метаматериалов / А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 8. – С. 909–916.
17. Ерофеенко, В.Т. Фокусы по обе стороны плоской линзы из метаматериала при воздействии электромагнитного поля магнитного диполя / В.Т. Ерофеенко // Взаимодействие сверхвысокочастотного, терагерцевого и оптического излучения с полупроводниковыми микро- и наноструктурами, метаматериалами и биообъектами: материалы Всерос. науч. школы-семинара. – Саратов : Саратовский источник, 2016. – С. 69–71.

Поступила 06.08.2016

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем
математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by*

V.T. Erofeenko

**MULTIPLE FOCUSING OF ELECTROMAGNETIC FIELD OF MAGNETIC
DIPOLE BY MEANS OF PLANE-PARALLEL TWO-LAYER LENS
FROM METAMATERIALS**

A method of analytical solution of the boundary-value problem of electromagnetic field penetration of point magnetic dipole through the infinite planar lens (screen) from the focusing metamaterials is suggested. It is demonstrated, that for the lenses with special combinations of material parameters in layers the series of focuses are formed: one is over the screen and three is in front of the screen in the half-space of point source of the excitation field. The summary field of focuses in front of the lens is equal to the sum of fields of magnetic and electric dipoles.