ИНФОРМАТИКА

2015 **октябрь-декабрь** **№ 4**

УДК 517.958:537.8

В.Т. Ерофеенко

МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МАТРИЧНОГО КОМПОЗИТА ИЗ БИИЗОТРОПНЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Разрабатывается метод вычисления эффективных материальных параметров матричного композита, состоящего из магнитодиэлектрической проводящей матрицы с множеством равномерно и случайно распределенных биизотропных сферических частиц одинаковых радиусов. При расчете параметров, учитывающем многократные рассеяния поля между частицами, используется новый тип теорем сложения, связывающих базисные сферические электромагнитные поля, отнесенные к разным частицам. Разработанная методика позволяет рассчитывать эффективные параметры для композитов с ансамблем несоприкасающихся частиц.

Введение

В настоящее время актуальным является исследование электродинамических свойств композитных материалов различных типов, представляющих собой структурно-неоднородные материалы, состоящие из однородной магнитопроводящей матрицы с большим числом структурных включений. Включения (частицы) характеризуются геометрической формой, химическим составом и размерами по отношению к длине электромагнитной волны, воздействующей на материал. Представляет интерес случай, когда частицы также выполнены из композитных материалов. В последнее время проводятся исследования метаматериалов, киральных, биизотропных и бианизотропных сред [1–3]. В частности, исследуются композиты со сферическими частицами [4–7]. Один из методов моделирования электромагнитных свойств неоднородных композитов сводится к замене структурно-неоднородного материала однородным материалом с сохранением характерных свойств исходного композита. Переход к однородному материалу базируется на использовании различных методов усреднения полей и материальных параметров композита. Усредненные материальные параметры, называемые эффективными параметрами, с высокой точностью характеризуют неоднородный композит. В статье [6] разработана модель вычисления эффективных параметров равномерно распределенных биизотропных частиц, расположенных в вакууме. В [7] вычисляются эффективные параметры композита с биизотропными частицами, расположенными в магнитопроводящей матрице. Учитывается однократное рассеяние поля на частицах. В книге [8] обсуждаются статистические модели композитов с использованием многократных рассеяний поля на частицах из обычных материалов. В настоящей статье разработана аналитическая модель матричного композита со сферическими биизотропными частицами с учетом многократных переотражений поля между частицами на основе теории дифракции волн на многих телах [9]. Алгоритм вычисления эффективных параметров композита представлен в виде последовательности аналитических формул. Для построения математической модели композита используются следующие основные принципы:

– рассматривается ансамбль сферических биизотропных частиц с одинаковыми радиусами и комплексными материальными параметрами;

– модель композита строится в рамках биизотропной среды;

– используется оригинальный вариант теорем сложения для вычисления взаимных переотражений полей между частицами;

– при вычислении эффективных параметров композита в разложениях полей учитываются только дипольные слагаемые;

– усреднение напряженностей и индукций полей производится по окрестности центральной частицы;

– эффективные параметры вычисляются для бесконечно протяженной композитной среды без учета внешних границ.

1. Структура матричного композита

Рассмотрим матрицу, заполненную однородным магнитодиэлектрическим материалом с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon_M = \varepsilon_m \varepsilon_0$, $\mu_M = \mu_m \mu_0$. В матрице распределены случайным образом сферические частицы D_k $(k = 1, 2, \ldots)$ радиуса R из биизотропного материала с проницаемостями ε, μ и параметрами биизотропности G, Z. Радиус частиц $R < \lambda_0/30$, где λ_0 – длина волны в вакууме [6]. Частицу с номером $k = 1$, $D_1 = D_R$ поместим в начало O декартовой системы координат $Oxyz$. Пусть $Or\theta\varphi$ – сферические координаты; $\vec{r}_k^{\,0}$ – вектор, направленный в центр O_k частицы D_k; $\{r_k^0, \theta_k^0, \varphi_k^0\}$ – сферические координаты точки O_k. Введем обозначения: $D_P(0 \le r \le P)$ – шаровая область достаточно большого радиуса $P(R << P)$; N – число частиц в области D_P; $V_R = \dfrac{4\pi}{3}R^3$ – объем частицы D_R; V_P – объем области D_P; $\nu = \dfrac{N}{V_P}$ – концентрация частиц (число частиц в единице объема матрицы); $\tau = \nu V_R$ – объемный коэффициент заполнения матрицы сферическими частицами (суммарный объем сферических частиц в единице объема матрицы).

Определим радиус $R_\tau > R$ с помощью соотношения $\dfrac{V_R}{V_{R_\tau}} = \tau$, тогда $R_\tau = R\big/\sqrt[3]{\tau}$ при заданном τ. Опишем вокруг шара D_R сферу Γ_τ радиуса R_τ. Обозначим: D_τ – шар внутри сферы Γ_τ; $D_{R\tau} = D_\tau / D_R$ – шаровой слой вокруг частицы D_R; $D_{\tau P} = D_P / D_\tau$ – шаровой слой, который содержит частицы D_k с номерами $k = 2, 3, \ldots N$; $D_P^0 = D_P \Big/ \bigcup\limits_{k=1}^{N} D_k$ – матрица без сферических частиц.

Будем считать, что в матричном композите распространяется плоское первичное поле $\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}$, колеблющееся с круговой частотой $\omega = 2\pi f$. Поле присутствует в области D_P^0 и возбуждает внутри частиц D_k поля $\vec{E}_k^{(1)}, \vec{H}_k^{(1)}$, в частности $\vec{E}_R^{(1)}, \vec{H}_R^{(1)}$ внутри D_R. В области D_P^0 образуется суммарное поле $\vec{E}^{(1)'}, \vec{H}^{(1)'}$, отраженное от всех частиц:

$$\vec{E}^{(1)'} = \sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k^{(1)'}, \qquad \vec{H}^{(1)'} = \sum_{k=1}^{N} \vec{H}_k^{(1)'},$$

где $\vec{E}_k^{(1)'}, \vec{H}_k^{(1)'}$ – поле, отраженное от частицы D_k.

Поле $\vec{E}^{(1)'}, \vec{H}^{(1)'}$ является первым суммарным отражением от частиц композита, которое снова воздействует на частицы D_k. В результате образуется второе отраженное поле $\vec{E}_k^{(2)'}, \vec{H}_k^{(2)'}$ от частицы D_k и суммарное $\vec{E}^{(2)'}, \vec{H}^{(2)'}$. Внутри частицы D_k образуется второе поле $\vec{E}_k^{(2)}, \vec{H}_k^{(2)}$, в частности $\vec{E}_R^{(2)}, \vec{H}_R^{(2)}$ внутри D_R. Суммарное поле $\vec{E}^{(2)'}, \vec{H}^{(2)'}$ снова воздействует на частицы и образуется третье отражение $\vec{E}^{(3)'}, \vec{H}^{(3)'}$ и поле $\vec{E}_k^{(3)}, \vec{H}_k^{(3)}$ внутри D_k и т. д. В итоге получим последовательность отражений $\vec{E}^{(l)'}, \vec{H}^{(l)'}$ и последовательность полей $\vec{E}_R^{(l)}, \vec{H}_R^{(l)}$, $l = 1, 2, \ldots, L$. Суммируя все отражения, получим результирующее электромагнитное поле $\vec{E}'_{рез} = \sum_{l=1}^{L} \vec{E}^{(l)'}$, $\vec{H}'_{рез} = \sum_{l=1}^{L} \vec{H}^{(l)'}$ в L-м приближении в области D_P^0 и результирующее поле $\vec{E}_{рез} = \sum_{l=1}^{L} \vec{E}_R^{(l)}$, $\vec{H}_{рез} = \sum_{l=1}^{L} \vec{H}_R^{(l)}$ внутри центральной частицы D_R.

2. Постановка задач

Один из методов моделирования электродинамических свойств неоднородных композитных сред, представляющих собой однородную материальную матрицу, включающую частицы из других материалов, состоит в замене неоднородной среды эквивалентной однородной средой. При этом материальные параметры частиц и матрицы заменяются на постоянные эффективные материальные параметры композита в целом. Имеются различные методы вычисления эффективных параметров. В статье ставится задача построения алгоритма определения эффективных параметров $\varepsilon_{эф} = \varepsilon_э\varepsilon_0$, $\mu_{эф} = \mu_э\mu_0$, $G_{эф} = G_э/c$, $Z_{эф} = Z_э/c$ в рамках биизотропной однородной среды, так как частицы композита выполнены из биизотропных материалов. Для решения данной задачи воспользуемся аналитическим решением краевой задачи дифракции на изолированной сферической частице D_R, размещенной в бесконечно протяженной матрице [2, с. 272]:

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot}\vec{E}_R^{(1)} = i\omega\left(\mu\vec{H}_R^{(1)} + Z\vec{E}_R^{(1)}\right), \quad \operatorname{rot}\vec{H}_R^{(1)} = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E}_R^{(1)} + G\vec{H}_R^{(1)}\right), \quad 0 \le r < R; \\
\operatorname{rot}\vec{E}_R^{(1)'} = i\omega\mu_M\vec{H}_R^{(1)'}, \quad \operatorname{rot}\vec{H}_R^{(1)'} = -i\omega\varepsilon_M\vec{E}_R^{(1)'}, \quad r > R; \\
(\vec{E}_R^{(1)})_\tau\Big|_{r=R} = \left(\vec{E}^{(0)} + \vec{E}_R^{(1)'}\right)_\tau\Big|_{r=R}, \quad (H_R^{(1)})_\tau\Big|_{r=R} = \left(\vec{H}^{(0)} + \vec{E}_R^{(1)'}\right)_\tau\Big|_{r=R}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Решение задачи (1) представим в виде рядов по сферическим базисным полям:

– первичное поле

$$\begin{gathered}
\vec{E}^{(0)} = \sum_{n,m}\left[a_{mn}^{(0)}\vec{m}_{mn}(\vec{r},k_M) + b_{mn}^{(0)}\vec{n}_{mn}(\vec{r},k_M)\right], \\
\vec{H}^{(0)} = h_M\sum_{n,m}\left[a_{mn}^{(0)}\vec{n}_{mn}(\vec{r},k_M) + b_{mn}^{(0)}\vec{m}_{mn}(\vec{r},k_M)\right],
\end{gathered} \tag{2}$$

где $a_{mn}^{(0)}, b_{mn}^{(0)}$ – заданные коэффициенты, $\sum_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}$, $h_M = \dfrac{k_M}{i\omega\mu_M}$, $k_M = \omega\sqrt{\varepsilon_M\mu_M}$, $0 < \arg k_M < \pi$;

– отраженное поле

$$\begin{gathered}
\vec{E}_R^{(1)'} = \sum_{n,m}\left[\overline{x}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{m}}_{mn}(\vec{r},k_M) + \overline{y}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r},k_M)\right], \quad r > R, \\
\vec{H}_R^{(1)'} = h_M\sum_{n,m}\left[\overline{x}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r},k_M) + \overline{y}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{m}}_{mn}(\vec{r},k_M)\right];
\end{gathered} \tag{3}$$

– поле внутри частицы

$$\begin{gathered}
\vec{E}_R^{(1)} = \sum_{n,m}\left[x_{mn}^{(1)}\vec{K}_{mn}^{(1)}(\vec{r},k_1) + y_{mn}^{(1)}\vec{K}_{mn}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right], \quad 0 \le r < R, \\
\vec{H}_R^{(1)} = \sum_{n,m}\left[x_{mn}^{(1)}p_1\vec{K}_{mn}^{(1)}(\vec{r},k_1) + y_{mn}^{(1)}p_2\vec{K}_{mn}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right],
\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\vec{K}_{mn}^{(j)} = \vec{n}_{mn}\left(\vec{r}, k_j\right) - q_j \vec{m}_{mn}\left(\vec{r}, k_j\right), \quad j = 1, 2,$$

$$k_j = \omega \bar{k}_j, \quad \bar{k}_j = \sqrt{\varepsilon\mu - \frac{1}{2}\left(G^2 + Z^2\right) + i\left(G - Z\right) f_j}, \quad 0 \le \arg \bar{k}_j < \pi,$$

$$f_j = (-1)^j f_0, \qquad f_0 = \sqrt{\varepsilon\mu - \frac{1}{4}(G + Z)^2}, \quad 0 \le \arg f_0 < \pi,$$

$$g_j = f_j - \frac{i}{2}(G - Z), \qquad q_j = \frac{\varepsilon\mu - ZG}{\bar{k}_j g_j}, \qquad p_j = \frac{1}{\mu}\left(i\frac{(\varepsilon\mu - ZG)}{g_j} - Z \right),$$

а коэффициенты $x_{mn}^{(1)}, y_{mn}^{(1)}, \bar{x}_{mn}^{(1)}, \bar{y}_{mn}^{(1)}$ выражаются через величины $a_{mn}^{(0)}, b_{mn}^{(0)}$ разложения (2). В дальнейшем будут использоваться коэффициенты при $n = 1,\ m = 0,\ \pm 1,$ которые определяются формулами [7]

$$\vec{\mathrm{X}}_m^{(1)} = \hat{M}\vec{a}_m^{(0)}, \qquad \vec{X}_m^{(1)'} = \hat{T}\vec{a}_m^{(0)}, \quad m = 0,\ \pm 1, \tag{5}$$

где

$$\hat{M} = -\frac{i}{\xi_M^2}\hat{P}^{-1}, \quad \hat{T} = -\left(j_1(\xi_M)\hat{E} + \hat{Q}\hat{M} \right) \Big/ h_1^{(1)}(\xi_M),$$

$$\vec{\mathrm{X}}_m^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{m1}^{(1)} \\ y_{m1}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathrm{X}}_m^{(1)'} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{m1}^{(1)} \\ \bar{y}_{m1}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_m^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{m1}^{(0)} \\ b_{m1}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$q_{11} = q_1 j_1(\xi_1), \quad q_{12} = q_2 j_1(\xi_2), \quad q_{21} = \bar{p}_1 q_1 j_1(\xi_1), \quad q_{22} = \bar{p}_2 q_2 j_1(\xi_2);$$

$$p_{11} = \bar{p}_1 g_1(\xi_1) h_1^{(1)}(\xi_M) + q_1 j_1(\xi_1) g_1^{(1)}(\xi_M), \quad p_{12} = \bar{p}_2 g_1(\xi_2) h_1^{(1)}(\xi_M) + q_2 j_1(\xi_2) g_1^{(1)}(\xi_M),$$

$$p_{21} = g_1(\xi_1) h_1^{(1)}(\xi_M) + \bar{p}_1 q_1 j_1(\xi_1) g_1^{(1)}(\xi_M), \quad p_{22} = g_1(\xi_2) h_1^{(1)}(\xi_M) + \bar{p}_2 q_2 j_1(\xi_2) g_1^{(1)}(\xi_M);$$

$$\xi_j = k_j R, \quad \xi_M = k_M R, \quad \bar{p}_j = p_j / h_M,$$

$$\begin{aligned} &h_0^{(1)}(x) = -\frac{i}{x}e^{ix}, \ h_1^{(1)}(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{i}{x^2}\right)e^{ix}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \\ &g_1(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sin x\right), \quad g_1^{(1)}(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{i}{x^2} + \frac{1}{x} - i\right)e^{ix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Выражения (6) представляют собой сферические функции Бесселя.

3. Теоремы сложения для сферических базисных полей

Для расчета полей, рассеянных на сферических частицах, используются базисные сферические поля, которые записываются аналитически в различных формах. Приведем аналитические формулы специального вида, которые будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 1. *Сингулярные сферические базисные поля представляются в декартово-сферических координатах следующим образом:*

$$\tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r},k)=\frac{1}{2(2n+1)}\Big\{\Big[n\tilde{U}_{n+1}^{m+1}(\vec{r},k)-(n+1)\tilde{U}_{n-1}^{m+1}(\vec{r},k)\Big]\vec{e}_-+$$
$$+\Big[n(n-m+1)(n-m+2)\tilde{U}_{n+1}^{m-1}(\vec{r},k)-(n+1)(n+m)(n+m-1)\tilde{U}_{n-1}^{m-1}(\vec{r},k)\Big]\vec{e}_++$$
$$+2\Big[n(n-m+1)\tilde{U}_{n+1}^{m}(\vec{r},k)+(n+1)(n+m)\tilde{U}_{n-1}^{m}(\vec{r},k)\Big]\vec{e}_z\Big\}, \tag{7}$$
$$\tilde{\vec{m}}(\vec{r},k)=\frac{i}{2}\Big\{\tilde{U}_n^{m+1}(\vec{r},k)\vec{e}_--(n+m)(n-m+1)\tilde{U}_n^{m-1}(\vec{r},k)\vec{e}_+-2m\tilde{U}_n^{m}(\vec{r},k)\vec{e}_z\Big\},$$
$$n=1,2,\ldots,\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\ \pm n,$$

где $\tilde{U}_n^m(\vec{r},k)=h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $\vec{e}_+=i\vec{e}_y+\vec{e}_x$, $\vec{e}_-=i\vec{e}_y-\vec{e}_x$.

Доказательство. Выведем первую формулу (7). Имеем представление [2, с. 118]

$$\tilde{\vec{n}}_{mn}=\left[\frac{n(n+1)}{kr}h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_r+g_n^{(1)}(kr)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\theta+\frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\varphi\right)\right]e^{im\varphi}. \tag{8}$$

Подставляя формулы

$$\vec{e}_r=\frac{1}{2}\sin\theta\left(e^{-i\varphi}\vec{e}_+-e^{i\varphi}\vec{e}_-\right)+\cos\theta\vec{e}_z,\quad \vec{e}_\theta=\frac{1}{2}\cos\theta\left(e^{-i\varphi}\vec{e}_+-e^{i\varphi}\vec{e}_-\right)-\sin\theta\vec{e}_z,$$
$$\vec{e}_\varphi=-\frac{i}{2}\left(e^{-i\varphi}\vec{e}_++e^{i\varphi}\vec{e}_-\right),\quad \frac{1}{x}h_n^{(1)}(x)=\sigma_n\left(h_{n-1}^{(1)}(x)+h_{n+1}^{(1)}(x)\right),$$
$$g_n^{(1)}=\sigma_n\left((n+1)h_{n-1}^{(1)}(x)-nh_{n+1}^{(1)}(x)\right),\quad \sigma_n=\frac{1}{2n+1}$$

в (8) и группируя слагаемые, получим соотношение

$$\tilde{\vec{n}}_{mn}=\frac{1}{2}\left(A^{(+)}e^{i(m-1)\varphi}\vec{e}_+-A^{(-)}e^{i(m+1)\varphi}\vec{e}_-+A^{(0)}e^{im\varphi}\vec{e}_z\right), \tag{9}$$

где

$$A^{(-)}=\sigma_n\left((n+1)G_{mn}^{(-)}h_{n-1}^{(1)}+nZ_{mn}^{(-)}h_{n+1}^{(1)}\right),$$
$$A^{(+)}=\sigma_n\left((n+1)G_{mn}^{(+)}h_{n-1}^{(1)}+nZ_{mn}^{(+)}h_{n+1}^{(1)}\right),$$
$$A^{(0)}=2\sigma_n\left((n+1)G_{mn}^{(0)}h_{n-1}^{(1)}+nZ_{mn}^{(0)}h_{n+1}^{(1)}\right);$$

$$G_{mn}^{(-)}=(n+1)\sin\theta P_n^m(\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta P_n^m(\cos\theta)\right)-\sigma_n(\alpha+\beta)\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta),$$
$$Z_{mn}^{(-)}=n\sin\theta P_n^m(\cos\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta P_n^m(\cos\theta)\right)+\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta),$$
$$G_{mn}^{(+)}=(n+1)\sin\theta P_n^m(\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta P_n^m(\cos\theta)\right)+\sigma_n(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta), \tag{10}$$
$$Z_{mn}^{(+)}=n\sin\theta P_n^m(\cos\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta P_n^m(\cos\theta)\right)-\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta),$$

$$G_{mn}^{(0)}=n\cos\theta P_n^m(\cos\theta)-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta),\quad Z_{mn}^{(0)}=(n+1)\cos\theta P_n^m(\cos\theta)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta),$$

$$\sigma_n(\alpha+\beta)=1,\quad \alpha=n-m,\quad \beta=n+m+1,\quad \sigma_n\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}\right)=1,\quad \overline{\alpha}=3n+m+2,\quad \overline{\beta}=-(n+m+1).$$

Для упрощения выражений (10) воспользуемся серией рекуррентных формул [2, с. 287]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\, P_n^m(\cos\theta)\right)=\frac{\sigma_n}{2}\Big[(n+m)P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)-(n+m)(n+m-1)(n-m)P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)+$$
$$+(n-m+1)P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta)-(n-m+1)(n+m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)\Big],$$

$$\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta)=\sigma_n\left[P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)-P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta)\right].$$

Для вычисления $G_{mn}^{(-)}$ при коэффициенте α используется формула

$$\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)=-\frac{1}{2}\left[(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta)+P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)\right],$$

а при коэффициенте β –

$$\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)=-\frac{1}{2}\left[(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)+P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta)\right],$$

аналогично и для коэффициентов $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ при вычислении $G_{mn}^{(+)}$.

В результате после сокращения слагаемых получим упрощенные формулы

$$G_{mn}^{(-)}=P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta),\quad G_{mn}^{(+)}=-(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta).$$

Далее воспользуемся соотношениями

$$G_{mn}^{(-)}+Z_{mn}^{(-)}=(2n+1)\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta)=P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta)-P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta),$$

$$G_{mn}^{(+)}+Z_{mn}^{(+)}=(2n+1)\sin\theta\, P_n^m(\cos\theta)=$$
$$=(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta)-(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta).$$

Тогда

$$Z_{mn}^{(-)}=-P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta),\quad Z_{mn}^{(+)}=(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta).$$

Аналогично преобразуем

$$G_{mn}^{(0)}=\sigma_n\left[n\left((n+m)P_{n-1}^m+(n-m+1)P_{n+1}^m\right)-\left(n(n-m+1)P_{n+1}^m-(n+1)(n+m)P_{n-1}^m\right)\right]=(n+m)P_{n-1}^m(\cos\theta),$$

$$Z_{mn}^{(0)}=(n-m+1)P_{n+1}^m(\cos\theta).$$

Подставляя преобразованные формулы (10) в (9), получим первую формулу (7). Для вывода второй формулы (7) имеем представление

$$\tilde{\vec{m}}_{mn}=h_n^{(1)}(kr)\left(\frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\varphi\right)\sin^{im\varphi}=$$
$$=\frac{i}{2}h_n^{(1)}\left[\left(\frac{m\cos\theta}{\sin\theta}P_n^m+\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m\right)e^{-i\varphi}\vec{e}_+ +\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m-\frac{m\cos\theta}{\sin\theta}P_n^m\right)e^{i\varphi}\vec{e}_- -2mP_n^m\vec{e}_z\right]e^{im\varphi}.$$

Воспользуемся формулами [2, с. 117, с. 287]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(P_n^{m+1}(\cos\theta)-(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(\cos\theta)\right),$$

$$\frac{m\cos\theta}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)=-\frac{1}{2}\Big(P_n^{m+1}(\cos\theta)+(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(\cos\theta)\Big).$$

В результате получим вторую формулу (7). ■

Для решения задач дифракции электромагнитных волн на нескольких сферах используются теоремы сложения, связывающие базисные сферические поля, отнесенные к сдвинутым относительно друг друга системам сферических координат [2, с. 150]. Рассмотрим основную систему координат $Or\theta\varphi$ и сдвинутую систему $O_1r_1\theta_1\varphi_1$, где точка O_1 имеет сферические координаты r_0, θ_0, φ_0 в системе O. В системе $O_1r_1\theta_1\varphi_1$ рассмотрим базисные сферические поля $\tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r}_1,k)$, $\tilde{\vec{m}}_{mn}(\vec{r}_1,k)$, которые представим через базисные поля специального вида в системе координат $Or\theta\varphi$.

Теорема 2. *Сингулярные базисные сферические поля в системе сферических координат* $O_1r_1\theta_1\varphi_1$ *представляются в виде рядов через регулярные базисные поля в смешанных декартово-сферических координатах для системы координат* $Oxyz$*, сдвинутой относительно первой системы координат:*

$$\tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r}_1,k)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=-s}^{s}\left(\overset{+}{A}{}^{mn}_{ps}(\vec{r}_0,k)\vec{e}_+ +\overset{-}{A}{}^{mn}_{ps}(\vec{r}_0,k)\vec{e}_- +\overset{0}{A}{}^{mn}_{ps}(\vec{r}_0,k)\vec{e}_z\right)U_s^p(\vec{r},k),$$
$$\tilde{\vec{m}}_{mn}(\vec{r}_1,k)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=-s}^{s}\left(\overset{+}{B}{}^{mn}_{ps}(\vec{r}_0,k)\vec{e}_+ +\overset{-}{B}{}^{mn}_{ps}(\vec{r}_0,k)\vec{e}_- +\overset{0}{B}{}^{mn}_{ps}(\vec{r}_0,k)\vec{e}_z\right)U_s^p(\vec{r},k),\quad 0\le r<r_0, \tag{11}$$
$$n=1,2,\ldots,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n,$$

где

$$U_s^p(\vec{r},k)=j_s(kr)P_s^p(\cos\theta)e^{ip\varphi},\quad x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

$$\overset{+}{A}{}^{mn}_{ps}=\frac{\sigma_n}{2}\left[n(n-m+1)(n-m+2)\overset{-}{C}{}^{m-1,n+1}_{ps}(r_0,\theta_0)-(n+1)(n+m)(n+m-1)\overset{-}{C}{}^{m-1,n-1}_{ps}(r_0,\theta_0)\right]e^{i(m-p-1)\varphi_0},$$
$$\overset{-}{A}{}^{mn}_{ps}=\frac{\sigma_n}{2}\left[n\overset{-}{C}{}^{m+1,n+1}_{ps}(r_0,\theta_0)-(n+1)\overset{-}{C}{}^{m+1,n-1}_{ps}(r_0,\theta_0)\right]e^{i(m-p+1)\varphi_0},$$
$$\overset{0}{A}{}^{mn}_{ps}=\sigma_n\left[n(n-m+1)\overset{-}{C}{}^{m,n+1}_{ps}(r_0,\theta_0)+(n+1)(n+m)\overset{-}{C}{}^{m,n-1}_{ps}(r_0,\theta_0)\right]e^{i(m-p)\varphi_0}, \tag{12}$$
$$\overset{+}{B}{}^{mn}_{ps}=-\frac{i}{2}(n+m)(n-m+1)\overset{-}{C}{}^{m-1,n}_{ps}(r_0,\theta_0)e^{i(m-p-1)\varphi_0},$$
$$\overset{-}{B}{}^{mn}_{ps}=\frac{i}{2}\overset{-}{C}{}^{m+1,n}_{ps}(r_0,\theta_0)e^{i(m-p+1)},\quad \overset{0}{B}{}^{mn}_{ps}=-im\overset{-}{C}{}^{mn}_{ps}(r_0,\theta_0)e^{i(m-p)\varphi_0};$$

$$\overset{-}{C}{}^{mn}_{ps}(r_0,\theta_0)=\frac{(2s+1)(s-p)!}{(s+p)!}\sum_{\sigma=|s-n|}^{s+n}i^{\sigma+s-n}b_\sigma^{(nmsp)}(-1)^\sigma h_\sigma^{(1)}(kr_0)P_\sigma^{m-p}(\cos\theta_0), \tag{13}$$

$$\overset{-}{C}{}^{mn}_{ps}(r_0,\theta_0)=0\quad \text{при}\quad |m|>n.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой сложения для базисных сферических решений скалярного уравнения Гельмгольца [10, с. 196]:

$$\tilde{U}_n^m\left(\vec{r}_1,k\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=-s}^{s}\bar{C}_{ps}^{mn}\left(r_0,\theta_0\right)e^{i(m-p)\varphi_0}U_s^p\left(\vec{r},k\right),\ 0\le r<r_0,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm n. \tag{14}$$

Заметим, что в формуле (13) присутствует дополнительный множитель $(-1)^{\sigma}$ по сравнению с [10, с. 196]. Это связано с тем, что теорема сложения (14) раскладывает в ряд функции $\tilde{U}_n^m\left(\vec{r}_1,k\right)$ в системе координат O_1 по функциям $U_s^p\left(\vec{r},k\right)$ в системе координат O. Подставим ряд (14) в (7), тогда

$$\tilde{\vec{n}}_{mn}\left(\vec{r}_1,k\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=-s}^{s}\frac{\sigma_n}{2}\left\{\left[n\bar{C}_{ps}^{m+1,n+1}-(n+1)\bar{C}_{ps}^{m+1,n-1}\right]e^{i(m-p+1)\varphi_0}\vec{e}_-+\right.$$
$$+\left[n(n-m+1)(n-m+2)\bar{C}_{ps}^{m-1,n+1}-(n+1)(n+m)(n+m-1)\bar{C}_{ps}^{m-1,n-1}\right]e^{i(m-p-1)\varphi_0}\vec{e}_++$$
$$\left.+2\left[n(n-m+1)\bar{C}_{ps}^{m,n+1}+(n+1)(n+m)\bar{C}_{ps}^{m,n-1}\right]e^{i(m-p)\varphi_0}\vec{e}_z\right\}.$$

Отсюда получаем требуемые выражения для коэффициентов (12). Аналогично доказывается вторая теорема сложения (11). Заметим, что формулы (11) отличаются по виду записи от аналогичных теорем сложения [2, с. 150]. ■

4. Суммарное поле, отраженное от частиц

Рассмотрим сферическую частицу D_k, расположенную в области D_P. При воздействии первичного поля (2) на частицу D_k образуется отраженное поле (3), которое запишем в локальной системе координат $O_k r_k \theta_k \varphi_k$ с центром в точке O_k:

$$\vec{E}_k^{(1)'}=\sum_{n,m}\left[\bar{x}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{m}}_{mn}\left(\vec{r}_k,k_м\right)+\bar{y}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{n}}_{mn}\left(\vec{r}_k,k_м\right)\right],\ r_k>R,$$
$$\vec{H}_k^{(1)'}=h_м\sum_{n,m}\left[\bar{x}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{n}}_{mn}\left(\vec{r}_k,k_м\right)+\bar{y}_{mn}^{(1)}\tilde{\vec{m}}_{mn}\left(\vec{r}_k,k_м\right)\right]. \tag{15}$$

Суммируя поля (15), получим суммарное поле, отраженное от всех частиц в области D_P: $\vec{E}^{(1)}=\sum_{k=2}^{N}\vec{E}_k^{(1)'}$, $\vec{H}^{(1)}=\sum_{k=2}^{N}\vec{H}_k^{(1)'}$. Здесь исключено поле $\vec{E}_1^{(1)'}=\vec{E}_R^{(1)'}$, $\vec{H}_1^{(1)'}=\vec{H}_R^{(1)'}$, отраженное от центральной частицы D_R.

Представим поля (15) в единой сферической системе координат $Or\theta\varphi$, подставляя (11) в (15). При этом в (15) оставим слагаемые с номерами $n=1,\ m=0,\pm 1,$ так как в статье разрабатывается дипольная модель материала. Слагаемые при $n=1,\ m=0,\pm 1$ описывают электрические и магнитные диполи частицы D_k, другие слагаемые определяют квадруполи и т. д., которые опустим. Волновое число k заменим на $k_м$. В результате

$$\vec{E}_k^{(1)'}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=-s}^{s}\left(A_{ps}^{(+)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_м\right)\vec{e}_++A_{ps}^{(-)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_м\right)\vec{e}_-+A_{ps}^{(0)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_м\right)\vec{e}_z\right)U_s^p\left(\vec{r},k_M\right),$$
$$\vec{H}_k^{(1)'}=h_м\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=-s}^{s}\left(B_{ps}^{(+)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_м\right)\vec{e}_++B_{ps}^{(-)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_м\right)\vec{e}_-+B_{ps}^{(0)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_м\right)\vec{e}_z\right)U_s^p\left(\vec{r},k_M\right), \tag{16}$$

где
$$A_{ps}^{(+)}=\sum_{m=-1}^{1}\left(\bar{x}_{m1}^{(1)}\overset{+}{B}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)+\bar{y}_{m1}^{(1)}\overset{+}{A}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\right),$$
$$A_{ps}^{(-)}=\sum_{m=-1}^{1}\left(\bar{x}_{m1}^{(1)}\overset{-}{B}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)+\bar{y}_{m1}^{(1)}\overset{-}{A}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\right),$$
$$A_{ps}^{(0)}=\sum_{m=-1}^{1}\left(\bar{x}_{m1}^{(1)}\overset{0}{B}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)+\bar{y}_{m1}^{(1)}\overset{0}{A}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\right),$$
$$B_{ps}^{(+)}=\sum_{m=-1}^{1}\left(\bar{y}_{m1}^{(1)}\overset{+}{B}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)+\bar{x}_{m1}^{(1)}\overset{+}{A}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\right),\tag{17}$$
$$B_{ps}^{(-)}=\sum_{m=-1}^{1}\left(\bar{y}_{m1}^{(1)}\overset{-}{B}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)+\bar{x}_{m1}^{(1)}\overset{-}{A}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\right),$$
$$B_{ps}^{(0)}=\sum_{m=-1}^{1}\left(\bar{y}_{m1}^{(1)}\overset{0}{B}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)+\bar{x}_{m1}^{(1)}\overset{0}{A}{}_{ps}^{m1}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\right).$$

Суммируя поля (16) по индексу k от $k = 2$ до $k = N$, вычислим суммарное поле, отраженное от частиц D_k. Рассматривая суммы как интегральные, заменим их на интегралы по области $D_{\tau P}$:
$$\vec{E}^{(1)}=\sum_{s,p}\left(\vec{a}_{ps}^{(+)}\vec{e}_{+}+a_{ps}^{(-)}\vec{e}_{-}+a_{ps}^{(0)}\vec{e}_{z}\right)U_s^{p}\left(\vec{r},k_{м}\right),$$
$$\vec{H}^{(1)}=h_{м}\sum_{s,p}\left(b_{ps}^{(+)}\vec{e}_{+}+b_{ps}^{(-)}\vec{e}_{-}+b_{ps}^{(0)}\vec{e}_{z}\right)U_s^{p}\left(\vec{r},k_{м}\right),\tag{18}$$

где
$$a_{ps}^{(+),(-),(0)}=\sum_{k=2}^{N}A_{ps}^{(+),(-),(0)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\approx\nu\int_{D_{\tau P}}A_{ps}^{(+),(-),(0)}\left(\vec{r},k_{м}\right)dV,$$
$$b_{ps}^{(+),(-),(0)}=\sum_{k=2}^{N}B_{ps}^{(+),(-),(0)}\left(\vec{r}_k^{\,0},k_{м}\right)\approx\nu\int_{D_{\tau P}}B_{ps}^{(+),(-),(0)}\left(\vec{r},k_{м}\right)dV.\tag{19}$$

Вычислим интегралы (19), используя соотношения (17), (12):
$$a_{ps}^{(+)}=\nu\sum_{m=-1}^{1}\left(\bar{x}_{m1}^{(1)}\int_{D_{\tau P}}\overset{+}{B}{}_{ps}^{m1}dV+\bar{y}_{m1}^{(1)}\int_{D_{\tau P}}\overset{+}{A}{}_{ps}^{m1}dV\right)=$$
$$=\pi\nu\sum_{m=-1}^{1}\left[i(m+1)(m-2)\bar{x}_{m1}^{(1)}I_{ps}^{m-1,1}+\frac{1}{3}\bar{y}_{m1}^{(1)}\left((m-2)(m-3)I_{ps}^{m-1,2}-2m(m+1)I_{ps}^{m-1,0}\right)\right]\delta_{0,m-p-1},$$
$$a_{ps}^{(-)}=\pi\nu\sum_{m=-1}^{1}\left[i\bar{x}_{m1}^{(1)}I_{ps}^{m+1,1}+\frac{1}{3}\bar{y}_{m1}^{(1)}\left(I_{ps}^{m+1,2}-2I_{ps}^{m+1,0}\right)\right]\delta_{0,m-p+1},$$
$$a_{ps}^{(0)}=-2\pi\nu\sum_{m=-1}^{1}\left[im\,\bar{x}_{m1}^{(1)}I_{ps}^{m,1}+\frac{1}{3}\bar{y}_{m1}^{(1)}\left((m-2)I_{ps}^{m,2}-2(m+1)I_{ps}^{m,0}\right)\right]\delta_{0,m-p};\tag{20}$$

$$b_{ps}^{(+)} = \pi\nu \sum_{m=-1}^{1} \left[i(m+1)(m-2)\bar{y}_{m1}^{(1)} I_{ps}^{m-1,1} + \frac{1}{3}\bar{x}_{m1}^{(1)}\left((m-2)(m-3)I_{ps}^{m-1,2} - 2m(m+1)I_{ps}^{m-1,0}\right)\right]\delta_{0,m-p-1},$$

$$b_{ps}^{(-)} = \pi\nu \sum_{m=-1}^{1} \left[i\bar{y}_{m1}^{(1)} I_{ps}^{m+1,1} + \frac{1}{3}\bar{x}_{m1}^{(1)}\left(I_{ps}^{m+1,2} - 2I_{ps}^{m+1,0}\right)\right]\delta_{0,m-p+1},$$

$$b_{ps}^{(0)} = -2\pi\nu \sum_{m=-1}^{1} \left[im\,\bar{y}_{m1}^{(1)} I_{ps}^{m,1} + \frac{1}{3}\bar{x}_{m1}^{(1)}\left((m-2)I_{ps}^{m,2} - 2(m+1)I_{ps}^{m,0}\right)\right]\delta_{0,m-p},$$

где
$$I_{ps}^{mn} = \int_{R_\tau}^{P}\int_{0}^{\pi} \bar{C}_{ps}^{mn}(r,\theta)\, r^2 \sin\theta d\theta dr, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

В частном случае $s = 0,\ p = 0$ коэффициенты (20) имеют достаточно простой вид:

$$a_{00}^{(+)} = 2\pi\nu\left[-i\bar{x}_{11}^{(1)} I_{00}^{01} + \frac{1}{3}\bar{y}_{11}^{(1)}\left(I_{00}^{02} - 2I_{00}^{00}\right)\right],$$

$$a_{00}^{(-)} = \pi\nu\left[i\bar{x}_{-11}^{(1)} I_{00}^{01} + \frac{1}{3}\bar{y}_{-11}^{(1)}\left(I_{00}^{02} - 2I_{00}^{00}\right)\right],$$

$$a_{00}^{(0)} = \frac{4\pi}{3}\nu\bar{y}_{01}^{(1)}\left(I_{00}^{02} + I_{00}^{00}\right); \tag{21}$$

$$b_{00}^{(+)} = 2\pi\nu\left[-i\bar{y}_{11}^{(1)} I_{00}^{01} + \frac{1}{3}\bar{x}_{11}^{(1)}\left(I_{00}^{02} - 2I_{00}^{00}\right)\right],$$

$$b_{00}^{(-)} = \pi\nu\left[i\bar{y}_{-11}^{(1)} I_{00}^{01} + \frac{1}{3}\bar{x}_{-11}^{(1)}\left(I_{00}^{02} - 2I_{00}^{00}\right)\right],$$

$$b_{00}^{(0)} = \frac{4\pi}{3}\nu\bar{x}_{01}^{(1)}\left(I_{00}^{02} + I_{00}^{00}\right).$$

Кроме представления полей (18) рассмотрим также представления через регулярные базисные сферические поля в виде

$$\vec{E}^{(1)} = \sum_{n,m}\left[a_{mn}^{(1)}\vec{m}_{mn}(\vec{r},k_м) + b_{mn}^{(1)}\vec{n}_{mn}(\vec{r},k_м)\right],$$
$$\vec{H}^{(1)} = h_м\sum_{n,m}\left[a_{mn}^{(1)}\vec{n}_{mn}(\vec{r},k_м) + b_{mn}^{(1)}\vec{m}_{mn}(\vec{r},k_м)\right]. \tag{22}$$

Лемма 1. В рамках разрабатываемой дипольной модели для коэффициентов разложений (22) при $n = 1,\ m = 0, \pm 1$ имеют место формулы

$$a_{m1}^{(1)} \approx \tau\bar{f}_M\,\bar{x}_{m1}^{(1)}, \qquad b_{m1}^{(1)} \approx \tau\bar{f}_M\,\bar{y}_{m1}^{(1)}, \tag{23}$$

где
$$\bar{f}_M = \frac{3}{(\xi_M)^3}\left(k_M R_\tau + i\right)e^{ik_M R_\tau}.$$

Доказательство. Используя (13) и формулу [10, с. 232] для вычисления коэффициентов $b_\sigma^{(m_1 n_1 m_2 n_2)}$, получим $I_{00}^{01} = 0,\ I_{00}^{02} = 0,$

$$I_{00}^{00}=2\int_{R_\tau}^{P} h_0^{(1)}\left(k_M r\right) r^2 dr=-\frac{2}{k_M^3}\left(k_r r+i\right)e^{ik_M r}\Bigg|_{R_\tau}^{P}.$$

Учитывая, что $e^{ik_M P}\approx 0$ при $P\to\infty$ для проводящей среды, получим приближенную формулу

$$I_{00}^{00}\approx\frac{2}{k_M^3}\left(k_M R_\tau+i\right)e^{ik_M R_\tau}=\frac{2}{3}R^3\bar{f}_M.$$

В результате из (21) следует

$$a_{00}^{(+)}=-\frac{2\tau}{3}\bar{f}_M y_{11}^{(1)},\quad a_{00}^{(-)}=-\frac{\tau}{3}\bar{f}_M y_{-11}^{(1)},\quad a_{00}^{(0)}=\frac{2\tau}{3}\bar{f}_M y_{01}^{(1)},$$

$$b_{00}^{(+)}=-\frac{2\tau}{3}\bar{f}_M x_{11}^{(1)},\quad b_{00}^{(-)}=-\frac{\tau}{3}\bar{f}_M x_{-11}^{(1)},\quad b_{00}^{(0)}=\frac{2\tau}{3}\bar{f}_M x_{01}^{(1)}. \tag{24}$$

Определим значения полей (18), (22) в начале координат $(r=0)$ и сравним результаты. Учитывая формулы (8) из работы [7, с. 31], получим соотношения

$$\vec{E}^{(1)}(0)=a_{00}^{(+)}\vec{e}_+ + a_{00}^{(-)}\vec{e}_- + a_{00}^{(0)}\vec{e}_z=\frac{1}{3}\left(-2b_{11}^{(1)}\vec{e}_+ - b_{11}^{(1)}\vec{e}_- + 2b_{01}^{(1)}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{H}^{(1)}(0)=h_M\left(b_{00}^{(+)}\vec{e}_+ + b_{00}^{(-)}\vec{e}_- + b_{00}^{(0)}\vec{e}_z\right)=\frac{h_M}{3}\left(-2a_{11}^{(1)}\vec{e}_+ - a_{-11}^{(1)}\vec{e}_- + 2a_{01}^{(1)}\vec{e}_z\right).$$

Приравнивая коэффициенты при векторах $\vec{e}_+,\vec{e}_-,\vec{e}_z$ и используя (24), придем к требуемым формулам (23). ■

Лемма 2. Имеют место обобщения формул (5), (23) на поля последовательности отражений $\vec{E}^{(l)'}$, $H^{(l)'}$; $\vec{E}_R^{(l)},\vec{H}_R^{(l)}$; $\vec{E}^{(l)},\vec{H}^{(l)}$ для шара D_R:

$$\vec{X}_m^{(l+1)}=\hat{M}\vec{a}_m^{(l)},\quad \vec{X}_m^{(l+1)'}=\hat{T}\vec{a}_m^{(l)},\quad \vec{a}_m^{(l)}=\tau\bar{f}_M\hat{E}\vec{X}_m^{(l)'}, \tag{25}$$

где
$$\vec{a}_m^{(l)}=\begin{pmatrix}a_{m1}^{(l)}\\ b_{m1}^{(l)}\end{pmatrix},\quad \vec{X}_m^{(l)'}=\begin{pmatrix}\bar{x}_{m1}^{(l)}\\ \bar{y}_{m1}^{(l)}\end{pmatrix},\quad \vec{X}_m^{(l)}=\begin{pmatrix}x_{m1}^{(l)}\\ y_{m1}^{(l)}\end{pmatrix}.$$

Для получения формул (25) в формулах (5), (23) верхний индекс заменяется на индекс l для l-й итерации, l = 0, 1, 2,…, L. ■

5. Усреднение электрического и магнитного полей

В области D_τ рассмотрим электромагнитное поле, которое образовалось при воздействии первичного поля (2) и L взаимных переотражений от частиц композита:

$$\vec{E}_{сум}=\begin{cases}\vec{E}_{пад}+\vec{E}_{отр} & \text{в } D_{R\tau},\\ \vec{E}_{вн} & \text{в } D_R,\end{cases}\qquad \vec{H}_{сум}=\begin{cases}\vec{H}_{пад}+\vec{H}_{отр} & \text{в } D_{R\tau},\\ \vec{H}_{вн} & \text{в } D_R,\end{cases} \tag{26}$$

где $E_{пад}=\sum_{l=0}^{L-1}\vec{E}^{(l)}$ – суммарное падающее поле на частицу D_R; $\vec{E}_{отр}=\sum_{l=1}^{L}\vec{E}_R^{(l)'}$ – суммарное поле, отраженное от частицы D_R; $\vec{E}_{вн}=\sum_{l=1}^{L}\vec{E}_R^{(l)}$ – суммарное поле внутри области D_R.

Представим поля (26) в виде рядов

$$\vec{E}_{пад}=\sum_{n,m}\left[a_{mn}\vec{m}_{mn}\left(\vec{r},k_M\right)+b_{mn}\vec{n}_{mn}\left(\vec{r},k_M\right)\right],$$

$$\vec{H}_{пад} = h_M \sum_{n,m} \left[a_{mn} \vec{n}_{mn} (\vec{r}, k_M) + b_{mn} \vec{m}_{mn} (\vec{r}, k_M) \right];$$
$$\vec{E}_{отр} = \sum_{n,m} \left[x'_{mn} \tilde{\vec{m}}_{mn} (\vec{r}, k_M) + y'_{mn} \tilde{\vec{n}}_{mn} (\vec{r}, k_M) \right],$$
$$\vec{H}_{отр} = h_M \sum_{n,m} \left[x'_{mn} \tilde{\vec{n}}_{mn} (\vec{r}, k_M) + y'_{mn} \tilde{\vec{m}}_{mn} (\vec{r}, k_M) \right]; \tag{27}$$
$$\vec{E}_{вн} = \sum_{n,m} \left[x_{mn} \vec{K}^{(1)}_{mn} (\vec{r}, k_1) + y_{mn} \vec{K}^{(2)}_{mn} (\vec{r}, k_2) \right],$$
$$\vec{H}_{вн} = \sum_{n,m} \left[x_{mn} p_1 \vec{K}^{(1)}_{mn} (\vec{r}, k_1) + y_{mn} p_2 \vec{K}^{(2)}_{mn} (\vec{r}, k_2) \right],$$

где

$$a_{mn} = \sum_{l=0}^{L-1} a^{(l)}_{mn}, \quad b_{mn} = \sum_{l=0}^{L-1} b^{(l)}_{mn}, \quad x'_{mn} = \sum_{l=1}^{L} \bar{x}^{(l)}_{mn}, \quad y'_{mn} = \sum_{l=1}^{L} \bar{y}^{(l)}_{mn}, \quad x_{mn} = \sum_{l=1}^{L} x^{(l)}_{mn}, \quad y_{mn} = \sum_{l=1}^{L} y^{(l)}_{mn}. \tag{28}$$

Соотношения (28) запишем в векторном виде при $n = 1, m = 0, \pm 1$:

$$\vec{a}_m = \sum_{l=0}^{L-1} \vec{a}^{(l)}_m, \quad \mathrm{X}'_m = \sum_{l=1}^{L} \mathrm{X}^{(l)\prime}_m, \quad \mathrm{X}_m = \sum_{l=1}^{L} \mathrm{X}^{(l)}_m, \tag{29}$$

где $$\mathrm{X}'_m = \begin{pmatrix} x'_{m1} \\ y'_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X}_m = \begin{pmatrix} x_{m1} \\ y_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ b_{m1} \end{pmatrix},$$

Усредним поля (26) по объему D_τ:

$$\vec{E} = \frac{1}{V_{R_\tau}} \int_{D_\tau} \vec{E}_{сум} dv = \frac{1}{V_{R_\tau}} \left[\int_{D_{R\tau}} \left(\vec{E}_{пад} + \vec{E}_{отр} \right) dv + \int_{D_R} \vec{E}_{вн} dv \right],$$
$$\vec{H} = \frac{1}{V_{R_\tau}} \int_{D_\tau} \vec{H}_{сум} dv = \frac{1}{V_{R_\tau}} \left[\int_{D_{R\tau}} \left(\vec{H}_{пад} + \vec{H}_{отр} \right) dv + \int_{D_R} \vec{H}_{вн} dv \right]. \tag{30}$$

Вычислим интегралы, входящие в (30). Для этого воспользуемся леммами 2, 3 и формулами (29) из статьи [7]. Учитывая (27), получим

$$\int_{D_{R\tau}} \vec{E}_{пад} dv = V_{R_\tau} g_M (R, R_\tau) (2 b_{11} \vec{e}_+ + b_{-11} \vec{e}_- - 2 b_{01} \vec{e}_z),$$
$$\int_{D_{R\tau}} \vec{E}_{отр} dv = V_{R_\tau} f_M (R, R_\tau) (2 y'_{11} \vec{e}_+ + y'_{-11} \vec{e}_- - 2 y'_{01} \vec{e}_z), \tag{31}$$
$$\int_{D_R} \vec{E}_{вн} dv = -V_{R_\tau} \left[\left(2 \left(\bar{F}_1 x_{11} + \bar{F}_2 y_{11} \right) \vec{e}_+ + \left(\bar{F}_1 x_{-11} + \bar{F}_2 y_{-11} \right) \vec{e}_- - 2 \left(\bar{F}_1 x_{01} + \bar{F}_2 y_{01} \right) \vec{e}_z \right) \right],$$

где $$g_M (R, R_\tau) = \frac{1}{\xi_\tau} \left(\left(\frac{R}{R_\tau} \right)^2 j_1(\xi_M) - j_1(\xi_\tau) \right),$$

$$f_M (R, R_\tau) = \frac{1}{\xi_\tau} \left(\left(\frac{R}{R_\tau} \right)^2 h^{(1)}_1(\xi_M) - h^{(1)}_1(\xi_\tau) \right), \qquad \xi_M = k_M R, \quad \xi_\tau = k_M R_\tau,$$

$$\bar{F}_j = \frac{1}{\xi_j} \left(\frac{R}{R_\tau} \right)^3 j_1(\xi_1), \quad \xi_j = k_j R.$$

Аналогично получим

$$\int\limits_{D_{R\tau}} \vec{H}_{пад} dv = V_{R_\tau} h_M g_M (R, R_\tau)(2a_{11}\vec{e}_+ + a_{-11}\vec{e}_- - 2a_{01}\vec{e}_z),$$

$$\int\limits_{D_{R\tau}} \vec{H}_{отр} dv = V_{R_\tau} h_M f_M (R, R_\tau)(2x'_{11}\vec{e}_+ + x'_{-11}\vec{e}_- - 2x'_{01}\vec{e}_z), \tag{32}$$

$$\int\limits_{D_R} \vec{H}_{вн} dv = -V_{R_\tau}\left[\left(2\left(\overline{F}_1 p_1 x_{11} + \overline{F}_2 p_2 y_{11}\right)\vec{e}_+ + \left(\overline{F}_1 p_1 x_{-11} + \overline{F}_2 p_2 y_{-11}\right)\vec{e}_- - 2\left(\overline{F}_1 p_1 x_{01} + \overline{F}_2 p_2 y_{01}\right)\vec{e}_z\right)\right].$$

Теорема 3. *Усредненные по области* D_τ *электрические и магнитные поля*

$$\vec{E} = -E_-\vec{e}_+ - E_+\vec{e}_- + E_z\vec{e}_z = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + \vec{E}_z\vec{e}_z,$$

$$\vec{H} = -H_-\vec{e}_+ - H_+\vec{e}_- + H_z\vec{e}_z = H_x\vec{e}_x + H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z,$$

$$E_+ = \frac{1}{2}\left(iE_y + E_x\right),\quad E_- = \frac{1}{2}\left(iE_y - E_x\right),\quad H_+ = \frac{1}{2}\left(iH_y + H_x\right),\quad H_- = \frac{1}{2}\left(iH_y - H_x\right),$$

в матричном композите со сферическими биизотропными частицами радиуса R, распределенными в проводящей матрице, определяются с помощью соотношений

$$E_+ = -\left[g_M b_{-11} + f_M y'_{-11} - \left(\overline{F}_1 x_{-11} + \overline{F}_2 y_{-11}\right)\right],$$

$$E_- = -2\left[g_M b_{11} + f_M y'_{11} - \left(\overline{F}_1 x_{11} + \overline{F}_2 y_{11}\right)\right],$$

$$E_z = -2\left[g_M b_{01} + f_M y'_{01} - \left(\overline{F}_1 x_{01} + \overline{F}_2 y_{01}\right)\right];$$

$$H_+ = -\left[h_M\left(g_M a_{-11} + f_M x'_{-11}\right) - \left(\overline{F}_1 p_1 x_{-11} + \overline{F}_2 p_2 y_{-11}\right)\right],$$

$$H_- = -2\left[h_M\left(g_M a_{11} + f_M x'_{11}\right) - \left(\overline{F}_1 p_1 x_{11} + \overline{F}_2 p_2 y_{11}\right)\right],$$

$$H_z = -2\left[h_M\left(g_M a_{01} + f_M x'_{01}\right) - \left(\overline{F}_1 p_1 x_{01} + \overline{F}_2 p_2 y_{01}\right)\right]$$

или в векторном виде

$$\vec{V}_+ = -\left[\hat{H}\left(g_M \vec{a}_{-1} + f_M \vec{X}'_{-1}\right) - \hat{F}\vec{X}_{-1}\right],$$

$$\vec{V}_- = -2\left[\hat{H}\left(g_M \vec{a}_1 + f_M \vec{X}'_1\right) - \hat{F}\vec{X}_1\right], \tag{33}$$

$$\vec{V}_z = -2\left[\hat{H}\left(g_M \vec{a}_0 + f_M \vec{X}'_0\right) - \hat{F}\vec{X}_0\right],$$

где $\vec{V}_+ = \begin{pmatrix} E_+ \\ H_+ \end{pmatrix},\quad \vec{V}_- = \begin{pmatrix} E_- \\ H_- \end{pmatrix},\quad \vec{V}_z = \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix},\quad \hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h_M & 0 \end{pmatrix},\quad \hat{F} = \begin{pmatrix} \overline{F}_1, & \overline{F}_2 \\ p_1\overline{F}_1, & p_2\overline{F}_2 \end{pmatrix}.$

Для доказательства достаточно подставить (31), (32) в (30) и воспользоваться обозначениями (29). ■

6. Усреднение электрической и магнитной индукций

Рассмотрим выражения для индукций в области D_τ:

$$\vec{D}_{сум} = \begin{cases} \varepsilon_M\left(\vec{E}_{пад} + \vec{E}_{отр}\right) & \text{в } D_{R\tau}, \\ \varepsilon\vec{E}_{вн} + G\vec{H}_{вн} & \text{в } D_R, \end{cases} \qquad \vec{B}_{сум} = \begin{cases} \mu_M\left(\vec{H}_{пад} + \vec{H}_{отр}\right) & \text{в } D_{R\tau}, \\ \mu\vec{H}_{вн} + Z\vec{E}_{вн} & \text{в } D_R. \end{cases}$$

По аналогии с формулами (30) получим усредненные индукции:

$$\vec{D} = \frac{1}{V_{R_\tau}} \int\limits_{D_\tau} \vec{D}_{сум} dv = \frac{1}{V_{R_\tau}} \left[\varepsilon_M \int\limits_{D_{R\tau}} \left(\vec{E}_{пад} + \vec{E}_{отр} \right) dv + \int\limits_{D_R} \left(\varepsilon \vec{E}_{вн} + G\vec{H}_{вн} \right) dv \right],$$
$$\vec{B} = \frac{1}{V_{R_\tau}} \int\limits_{D_\tau} \vec{B}_{сум} dv = \frac{1}{V_{R_\tau}} \left[\mu_M \int\limits_{D_{R\tau}} \left(\vec{H}_{пад} + \vec{H}_{отр} \right) dv + \int\limits_{D_R} \left(\mu \vec{H}_{вн} + Z\vec{E}_{вн} \right) dv \right]. \quad (34)$$

Подставляя в правые части формул (34) интегралы (31), (32), придем к следующему результату:

Теорема 4. *Усредненные по области* D_τ *электрическая и магнитная индукции*

$$\vec{D} = -D_-\vec{e}_+ - D_+\vec{e}_- + D_z\vec{e}_z, \qquad \vec{B} = -B_-\vec{e}_+ - B_+\vec{e}_- + B_z\vec{e}_z$$

в матричном композите со сферическими биизотропными частицами, распределенными в проводящей матрице, определяются с помощью соотношений

$$D_+ = -\left[\varepsilon_M \left(g_M b_{-11} + f_M y'_{-11}\right) - \left(\overline{F}_1^{(1)} x_{-11} + \overline{F}_2^{(1)} y_{-11}\right)\right],$$
$$D_- = -2\left[\varepsilon_M \left(g_M b_{11} + f_M y'_{11}\right) - \left(\overline{F}_1^{(1)} x_{11} + \overline{F}_2^{(1)} y_{11}\right)\right],$$
$$D_z = -2\left[\varepsilon_M \left(g_M b_{01} + f_M y'_{01}\right) - \left(\overline{F}_1^{(1)} x_{01} + \overline{F}_2^{(1)} y_{01}\right)\right],$$
$$B_+ = -\left[\mu_M h_M \left(g_M a_{-11} + f_M x'_{-11}\right) - \left(\overline{F}_1^{(2)} x_{-11} + \overline{F}_2^{(2)} y_{-11}\right)\right],$$
$$B_- = -2\left[\mu_M h_M \left(g_M a_{11} + f_M x'_{11}\right) - \left(\overline{F}_1^{(2)} x_{11} + \overline{F}_2^{(2)} y_{11}\right)\right],$$
$$B_z = -2\left[\mu_M h_M \left(g_M a_{01} + f_M x'_{01}\right) - \left(\overline{F}_1^{(2)} x_{01} + \overline{F}_2^{(2)} y_{01}\right)\right]$$

или в векторном виде

$$\vec{W}_+ = -\left[\hat{H}_1\left(g_M \vec{a}_{-1} + f_M \vec{\mathrm{X}}'_{-1}\right) - \hat{F}_1 \vec{\mathrm{X}}_{-1}\right],$$
$$\vec{W}_- = -2\left[\hat{H}_1\left(g_M \vec{a}_1 + f_M \vec{\mathrm{X}}'_1\right) - \hat{F}_1 \vec{\mathrm{X}}_1\right], \quad (35)$$
$$\vec{W}_z = -2\left[\hat{H}_1\left(g_M \vec{a}_0 + f_M \vec{\mathrm{X}}'_0\right) - \hat{F}_1 \vec{\mathrm{X}}_0\right],$$

где $\vec{W}_+ = \begin{pmatrix} D_+ \\ B_+ \end{pmatrix}$, $\vec{W}_- = \begin{pmatrix} D_- \\ B_- \end{pmatrix}$, $\vec{W}_z = \begin{pmatrix} D_z \\ B_z \end{pmatrix}$, $\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_M \\ h_M \mu_M & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{F}_1 = \begin{pmatrix} \overline{F}_1^{(1)}, & \overline{F}_2^{(1)} \\ \overline{F}_1^{(2)}, & \overline{F}_2^{(2)} \end{pmatrix}$,

$$\overline{F}_1^{(1)} = \overline{F}_1(\varepsilon + p_1 G), \quad \overline{F}_2^{(1)} = \overline{F}_2(\varepsilon + p_2 G), \quad \overline{F}_1^{(2)} = \overline{F}_1(Z + p_1 \mu), \quad \overline{F}_2^{(2)} = \overline{F}_2(Z + p_2 \mu).$$

7. Алгоритм вычисления эффективных материальных параметров матричного композита

Построение алгоритма сводится к получению аналитических формул, выражающих усредненные индукции (34) через усредненные электрические и магнитные поля (30).

Приведем вспомогательные аналитические соотношения.

Лемма 3. Коэффициенты разложений в ряды полей l-го отражения от частицы D_R выражаются через коэффициенты $a_{mn}^{(0)}, b_{mn}^{(0)}$ первичного плоского поля (2) с помощью векторных соотношений

$$\vec{\mathrm{X}}_m^{(l+1)} = \left(\tau \overline{f}_M\right)^l \hat{M}\hat{T}^l \vec{a}_m^{(0)}, \qquad \vec{\mathrm{X}}_m^{(l+1)'} = \left(\tau \overline{f}_M\right)^l \hat{T}^{l+1} \vec{a}_m^{(0)}, \qquad \vec{a}_m^{(l)} = \left(\tau \overline{f}_M \hat{T}\right)^l \vec{a}_m^{(0)}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots . \quad (36)$$

Доказательство. Подставим третье выражение (25) во второе, тогда

$$\vec{\mathrm{X}}_m^{(l+1)'} = \tau \bar{f}_M \hat{T} \vec{\mathrm{X}}_m^{(l)'}. \tag{37}$$

Последовательно применяя соотношения (37) l раз, получим

$$\vec{\mathrm{X}}_m^{(l+1)'} = \ldots = \left(\tau \bar{f}_M \hat{T}\right)^k \vec{\mathrm{X}}_m^{(l-k+1)'} = \ldots = \left(\tau \bar{f}_M \hat{T}\right)^l \vec{\mathrm{X}}_m^{(1)'}. \tag{38}$$

После подстановки (5) в (38) получим формулу

$$\vec{\mathrm{X}}_m^{(l+1)'} = \left(\tau \bar{f}_M\right)^l \hat{T}^{l+1} \vec{a}_m^{(0)}. \tag{39}$$

Подставим (39) в третье равенство (25), тогда

$$\vec{a}_m^{(l)} = \left(\tau \bar{f}_M \hat{T}\right)^l \vec{a}_m^{(0)}. \tag{40}$$

Аналогично после подстановки выражения (40) в первое равенство (25) придем к первой формуле (36). ■

Лемма 4. Коэффициенты разложений (27) при $n = 1, m = 0, \pm 1,$ которые представляют собой результирующие поля в окрестности частицы D_R, равные сумме L отражений от частиц матричного композита, определяются векторными соотношениями

$$\vec{\mathrm{X}}_m = \hat{M}\hat{T}^{(L)} \vec{a}_m^{(0)}, \quad \vec{\mathrm{X}}_m' = \hat{T}^{(L)} \hat{T} \vec{a}_m^{(0)}, \quad \vec{a}_m = \hat{T}^{(L)} \vec{a}_m^{(0)}, \tag{41}$$

где

$$\hat{T}^{(L)} = \sum_{l=0}^{L-1} \left(\tau \bar{f}_M \hat{T}\right)^l, \quad m = 0, \pm 1.$$

Для доказательства формул (41) достаточно (36) подставить в (29). ■

Лемма 5. Усредненные компоненты (33) электрической и магнитной напряженностей, усредненные компоненты (35) электрической и магнитной индукций с учетом L переотражений поля между частицами выражаются через коэффициенты разложений первичного поля (2) с помощью формул

$$\vec{V}_+ = -\hat{H}^{(L)} \vec{a}_{-1}^{(0)}, \quad \vec{V}_- = -2\hat{H}^{(L)} \vec{a}_1^{(0)}, \quad \vec{V}_z = -2\hat{H}^{(L)} \vec{a}_0^{(0)}; \tag{42}$$

$$\vec{W}_+ = -\hat{B}^{(L)} \vec{a}_{-1}^{(0)}, \quad \vec{W}_- = -2B^{(L)} \vec{a}_1^{(0)}, \quad \vec{W}_z = -2\hat{B}^{(L)} \vec{a}_0^{(0)}, \tag{43}$$

где

$$\hat{H}^{(L)} = \hat{H}\hat{T}^{(L)}\left(g_M \hat{E} + f_M \hat{T}\right) - \hat{F}\hat{M}\hat{T}^{(L)},$$

$$\hat{B}^{(L)} = \hat{H}_1 \hat{T}^{(L)}\left(g_M \hat{E} + f_M \hat{T}\right) - \hat{F}_1 \hat{M}\hat{T}^{(L)}.$$

Для доказательства формул (42), (43) достаточно формулы (41) при $m = 0, \pm 1$ подставить в соотношения (33), (35). ■

Для упрощения математической модели неоднородного матричного композита, состоящего из частиц, заменим композит на однородную биизотропную среду, электромагнитное поле в которой подчиняется уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega \vec{B}, \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega \vec{D}, \tag{44}$$

где

$$\vec{B} = \mu_{эф} \vec{H} + Z_{эф} \vec{E}, \qquad \vec{D} = \varepsilon_{эф} \vec{E} + G_{эф} \vec{H}. \tag{45}$$

Сформулируем теорему, определяющую усредненные материальные параметры $\varepsilon_{эф}, \mu_{эф}, G_{эф}, Z_{эф}$ матричного композита.

Теорема 5. *Матричный композитный материал, состоящий из случайно распределенных биизотропных сферических частиц и заполненный матричным материалом в областях между частицами, является биизотропной средой с уравнениями (44). Эффективные параметры композита с учетом L взаимных переотражений поля между частицами определяются формулами*

$$\varepsilon_{эф} = C_{11}, \quad G_{эф} = C_{12}, \quad \mu_{эф} = C_{22}, \quad Z_{эф} = C_{21}, \tag{46}$$

где
$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \hat{C} = \hat{B}^{(L)} \left(\hat{H}^{(L)} \right)^{-1}.$$

Доказательство. С помощью (42) исключим $\vec{a}_m^{(0)}$ из формул (43), получим

$$\vec{W}_+ = \hat{C}\vec{V}_+, \quad \vec{W}_- = \hat{C}\vec{V}_-, \quad \vec{W}_z = \hat{C}\vec{V}_z. \tag{47}$$

Запишем (47) в виде скалярных уравнений

$$D_m = C_{11}E_m + C_{12}H_m, \quad B_m = C_{21}E_m + C_{22}H_m, \quad m = z, +, -.$$

Для векторов индукций следует

$$\vec{D} = C_{11}\vec{E} + C_{12}\vec{H}, \quad \vec{B} = C_{21}\vec{E} + C_{22}\vec{H}. \tag{48}$$

Сравнивая индукции (48) с индукциями (45), получим требуемые формулы (46). ■

Заключение

В статье представлен алгоритм аналитического вычисления эффективных материальных параметров композита, состоящего из случайно распределенных в магнитодиэлектрической проводящей матрице сферических биизотропных частиц с произвольными комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями и параметрами биизотропности. Алгоритм учитывает *L* переотражений между частицами внешнего электромагнитного поля, воздействующего на композит. При построении алгоритма используются точные решения краевых задач дифракции на сферических частицах, представленные в виде рядов по сферическим базисным полям. Разработан новый тип теорем сложения, связывающих базисные декартово-сферические электромагнитные поля в сдвинутых относительно друг друга сферических системах координат, которые упрощают построение алгоритма.

Работа выполнена по заданию ГПНИ «Информатика и космос».

Список литературы

1. Лагарьков, А.Н. Радиопоглощающие материалы на основе метаматериалов / А.Н. Лагарьков, В.Н. Кисель, В.Н. Семененко // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 10. – С. 1119–1127.

2. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – М. : КД Либроком, 2014. – 304 с.

3. Engheta, N. Antenna radiation in the presence of a chiral sphere / N. Engheta, M.W. Kowarz // J. Appl. Phys. – 1990. – Vol. 67(2). – P. 639–647.

4. Шатров, А.Д. Модель биизотропной среды из резонансных сферических частиц с идеальной смешанной проводимостью поверхности вдоль спиральных линий / А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 10. – С. 1168–1170.

5. Костин, М.В. К теории киральной среды на основе сферических спирально проводящих частиц / М.В. Костин, В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника – 1998. – Т. 43, № 8. – С. 921–926.

6. Ерофеенко, В.Т. Электродинамическая модель расчета эффективных параметров композитов из сферических биизотропных частиц / В.Т. Ерофеенко // Информатика. – 2014. – № 1. – С. 45–58.

7. Ерофеенко, В.Т. Экранирование электромагнитных полей экранами из матричных композитов, содержащих биизотропные частицы / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Информатика. – 2014. – № 3. – С. 28–43.

8. Исимару, А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. Т. 2. Многократное рассеяние / А. Исимару. – М. : Мир, 1981. – 322 с.

9. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.

10. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 256 с.

Поступила 30.09.2015

Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by

V.T. Erofeenko

MODEL FOR CALCULATING EFFECTIVE PARAMETERS OF MATRIX COMPOSITES FROM BI-ISOTROPIC PARTICLES WITH REGARD MULTIPLE REFLECTIONS OF ELECTROMAGNETIC FIELD

A method for calculation of the effective material parameters of matrix composites, consisting of magnetodielectric conducting matrix with a set of bi-isotropic spherical fractions, is developed. Under the calculations of parameters, taking into account a multiple scattering of the field between particles, a new type of addition theorems, connecting basic spherical electromagnetic fields relating to different particles, is used. The developed method allows to calculate the effective parameters for the composites with sufficiently dense ensemble of the fractions.