

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.237: 681.3

В.И. Малюгин

АЛГОРИТМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ СОСТОЯНИЙ

Для векторных авторегрессионных моделей с циклическими переключениями состояний предлагается метод исключения краткосрочных колебаний состояния системы, который основывается на последовательном применении двух алгоритмов, реализующих подстановочное байесовское решающее правило поточечной классификации и статистический критерий проверки гипотезы о значении ожидаемой вероятности ошибки классификации. Результаты компьютерного моделирования демонстрируют работоспособность предлагаемого метода.

Введение

Под структурными изменениями, или структурными сдвигами, в статистических моделях понимаются скачкообразные изменения параметров модели сложной системы, обусловленные внешними «шоковыми» воздействиями [1]. Структурные изменения, как правило, не затрагивают фундаментальные зависимости между используемыми в модели переменными, т. е. не приводят к «разрушению» структуры модели, а отражаются только на значениях ее параметров. Целью анализа таких систем обычно является построение статистической модели с учетом установленных моментов структурных изменений с помощью соответствующих фиктивных переменных [2]. Методам анализа структурных изменений в статистических моделях при различных модельных предположениях посвящено значительное число исследований. Обзор наиболее важных результатов дается в [3].

Во многих приложениях актуальными являются сложные системы с фиксированным числом классов состояний и структурными сдвигами, приводящими к последовательной смене состояний. Такие сдвиги будем называть циклическими структурными изменениями. Для описания сложных систем в указанных условиях используются многомерные статистические модели с циклическими переключениями состояний (Regime Switching Models – RS-Models) [4]. Основными задачами анализа подобных систем являются: установление циклического характера смены классов состояний, оценивание моментов переключения состояний (датировка поворотных точек), а также оценивание параметров моделей [5].

Циклический характер смены состояний сложных систем обуславливает зависимость классов состояний. Традиционно предполагается, что эта зависимость описывается ненаблюдаемой однородной цепью Маркова. Это приводит к моделям с марковскими переключениями классов состояний (Markov Switching states model – MS model) [6]. В случае неизвестной модели зависимости либо высокой неопределенности относительно состояния системы в рамках марковской модели целесообразно использовать модели с независимыми классами состояний (Independent Switching states model – IS model) [7]. При наличии обучающих реализаций временных рядов, соответствующих различным классам состояний, для оценивания классов состояний могут применяться методы дискриминантного анализа указанных моделей [8]. Для решения перечисленных выше задач анализа при отсутствии классифицированной обучающей выборки активно используются EM-алгоритмы (expectation-maximization algorithms) расщепления смесей распределений наблюдений, описываемых многомерными статистическими моделями [5, 9, 10]. EM-алгоритмы обеспечивают совместное решение таких задач, как классификация многомерных наблюдений, описываемых статистическими моделями, на заданное число классов состояний и оценивание параметров моделей для различных классов состояний. Полученная в результате классификации наблюдений последовательность классов используется да-

лее для установления циклического характера изменения состояния и определения моментов переключения (поворотных точек).

Решение перечисленных выше задач с помощью методов статистической классификации временных рядов может осложняться недостаточной точностью лежащих в их основе статистических решающих правил классификации [10]. Вследствие этого возможно появление значительного числа «ложных сигналов», соответствующих изменениям, приводящим не к смене классов состояний, а к случайным колебаниям состояния системы, которые не должны приниматься во внимание. Доля ложных сигналов при использовании статистических решающих правил классификации ограничена снизу вероятностью ошибки соответствующего байесовского решающего правила, оптимального в смысле минимума вероятности ошибки [2]. Необходимость исключения краткосрочных колебаний может быть также обусловлена ограничениями, имеющими содержательную интерпретацию. Например, при анализе макроэкономических циклов с двумя классами состояния экономики (рост и рецессия) по квартальным временным рядам для перехода из состояния «рост» в состояние «рецессия» может устанавливаться ограничение: не менее двух кварталов пребывания экономической системы в состоянии «рецессия» [8].

Таким образом, при анализе сложных систем с циклической сменой состояний с помощью алгоритмов статистической классификации актуальной является задача тестирования установленных с помощью указанных алгоритмов моментов переключения состояний с целью исключения краткосрочных колебаний, не имеющих содержательной интерпретации. Решение данной задачи с помощью специальных статистических алгоритмов позволяет автоматизировать процесс обработки данных, не прибегая к экспертному анализу. В статье предлагается метод решения данной задачи, описываются реализующие его базовые алгоритмы и приводятся результаты экспериментального исследования эффективности алгоритмов на основе компьютерных модельных экспериментов.

1. Модели RS-VARX и задача тестирования циклических структурных изменений

Пусть сложная система в момент времени t характеризуется случайным вектором наблюдений $\mathbf{y}_t \in \mathfrak{R}^n$, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, где Ω – пространство элементарных объектов ($\omega \in \Omega$ – элементарный объект); \mathfrak{F} – σ -алгебра подмножеств из Ω ; \mathbf{P} – вероятностная мера: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{\omega \in A\}$, $A \in \mathfrak{F}$. Пусть $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{L-1}\}$ – разбиение Ω на конечное число непустых непересекающихся подмножеств, таких что $\Omega_l \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}\{\Omega_l\} = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega_l\}) > 0$, $\Omega_l \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}\{\Omega_l\} = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega_l\}) > 0$, $\bigcup_{l \in S(L)} \Omega_l = \Omega$, $S(L) = \{0, \dots, L-1\}$. Подмножества $\{\Omega_l\} (l \in S(L))$

называются *классами состояний сложной системы*, число которых равно L .

Предполагается, что случайный вектор наблюдений допускает разбиение $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$ (где $'$ – знак транспонирования, $n = N + M$, $N \geq 1$, $M \geq 1$) на подвекторы эндогенных переменных $\mathbf{x}_t = (x_{ij}) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{R}^N$, характеризующих состояние сложной системы, и экзогенных переменных $\mathbf{z}_t = (z_{ik}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$, описывающих внешние воздействия на систему. В качестве базовой модели наблюдений будем использовать модель векторной авторегрессии с неоднородной циклически изменяющейся эндогенно-экзогенной структурой [4]. В общем случае будем полагать, что временной ряд $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)'$ описывается моделью RS-VARX $(p)(p \geq 1)$ вида

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^p A_{d(t),i} \mathbf{x}_{t-i} + B_{d(t)} \mathbf{z}_t + \boldsymbol{\eta}_{d(t),t}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_{1-p}, \dots, \mathbf{x}_0 \in \mathfrak{R}^N$ – заданные начальные значения; $\boldsymbol{\eta}_{d(t),t} \in \mathfrak{R}^N$ – определенные на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ случайные величины, соответствующие ошибкам наблюдения; $d(t) \equiv d_t \in S(L) = \{0, \dots, L-1\}$ – номер класса состояния; $\mathbf{D} = (d_t) \in S^T(L)$ – вектор состояний сложной системы на заданном временном интервале.

Относительно модели (2) сделаем следующие предположения:

М.1. Матрицы коэффициентов авторегрессии $\{A_{l,i}\}$ ($i=1,\dots,p$) для каждого класса состояний $l \in S(L)$ удовлетворяют условию стационарности модели VAR(p) [1].

М.2. Ошибки наблюдения $\{\boldsymbol{\eta}_{l,r}\}$ ($t=1,\dots,T$) являются независимыми в совокупности гауссовскими случайными векторами с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей $\Sigma_l : \mathbf{E}\{\boldsymbol{\eta}_{l,r}\} = \mathbf{0}_N \in \mathfrak{R}^N$, $\mathbf{E}\{\boldsymbol{\eta}_{l,r}\boldsymbol{\eta}'_{l,s}\} = \delta_{r,s}\Sigma_l$ ($r,s=1,\dots,T, l \in S(L)$), $\delta_{r,s}$ – символ Кронекера.

М.3. Значения экзогенных переменных $\mathbf{z}_t = (z_{t1}, \dots, z_{tM})' \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$ являются заданными.

М.4. Выполняется условие структурной параметрической неоднородности модели, которое означает, что для разных классов состояний $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{L-1}\}$ параметры модели частично либо полностью различны: $A_l \neq A_k$ и (или) $B_l \neq B_k \quad \forall k \neq l, k, l \in S(L)$.

При выполнении предположений М.1–М.4 модель RS-VARX вида (1) является кусочно-стационарной [3]. Будем рассматривать кусочно-стационарные модели с L классами состояний, для которых $2 \leq L < s+1$, где $s \geq 1$ – число структурных изменений, соответствующих смене классов состояний, в неизвестные моменты времени $1 < \tau_1 < \dots < \tau_s < T$. Относительно номеров классов состояний $d_t \in S(L)$ ($t=1,\dots,T$) возможны два типа предположений:

d.1. $\{d_t\}$ ($t=1,\dots,T$) – ненаблюдаемые независимые в совокупности случайные величины с распределением вероятностей $P\{d_t=l\} = \pi_l > 0$ ($l \in S(L)$), $\sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1$.

d.2. $\{d_t\}$ ($t=1,\dots,T$) – ненаблюдаемая однородная эргодическая цепь Маркова (ОЦМ) с распределением, которое определяется вектором вероятностей начального состояния $\boldsymbol{\pi}$ и матрицей вероятностей одношаговых переходов P соответственно:

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_l), \pi_l = \mathbf{P}\{d_1=l\} > 0 \quad (l \in S(L)), \sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1;$$

$$P = (p_{kl}), p_{kl} = \mathbf{P}\{d_{t+1}=l \mid d_t=k\} \geq 0 \quad (k,l \in S(L)), \sum_{l \in S(L)} p_{kl} = 1, k \in S(L).$$

В случае двух классов состояний ($L=2$) будем использовать следующие предположения относительно параметров вероятностной модели для $\{d_t\}$:

$$d.1. \pi_0 = \pi_1 = 0,5; \quad d.2. \pi_0 = \pi_1 = 0,5; \quad P = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega \\ \omega & 1-\omega \end{pmatrix} \quad (0 < \omega < 0,5). \quad (2)$$

При условии d.1 модель (1) будем называть *моделью VARX с независимыми случайными переключениями состояний (IS-VARX)*, а в случае d.2 – *моделью VARX с марковскими переключениями состояний (MS-VARX)*.

Истинные значения параметров $\{A_l, B_l, \Sigma_l\}$ ($l \in S(L)$), $\boldsymbol{\pi}, P$, а также моменты структурных изменений $1 < \tau_1 < \dots < \tau_s < T$ в тестируемом временном ряде $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$ ($t=1,\dots,T$) неизвестны. Имеются обучающие реализации временных рядов для каждого класса состояний $\mathbf{Y}_l = (\mathbf{X}'_l, \mathbf{Z}'_l)' \in \mathfrak{X}^{T^l} \times \mathfrak{Z}^{T^l} \subseteq \mathfrak{R}^{nT^l}$ ($l \in S(L)$), где $\mathbf{X}'_l = (\mathbf{x}'_{l1}, \dots, \mathbf{x}'_{lT_l}) \in \mathfrak{X}^{T_l}$, $\mathbf{Z}'_l = (\mathbf{z}'_{l1}, \dots, \mathbf{z}'_{lT_l}) \in \mathfrak{Z}^{T_l}$, T_l – длина временных рядов для класса Ω_l , $T^L = T_1 + \dots + T_L$ – суммарная длина временных рядов. Будем называть совокупность наблюдений $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$ ($l \in S(L)$) *классифицированной обучающей выборкой* наблюдений объема T^L .

Имеют место следующие основные задачи анализа рассматриваемых моделей:

1) оценивание вектора состояний сложной системы $\mathbf{D} = (d_t) \in S^T(L)$ для тестируемого временного ряда $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$ ($t=1, \dots, T$) с помощью решающих правил статистической классификации и нахождения оценок числа \hat{s} и моментов структурных изменений $\{\hat{\tau}_i\}$ ($i=1, \dots, \hat{s}$) на основании полученной оценки $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{d}_t) \in S^T(L)$;

2) тестирование оценок моментов структурных изменений $\{\hat{\tau}_i\}$ ($i=1, \dots, \hat{s}$) с целью исключения краткосрочных колебаний состояния сложной системы и определения точек переключения состояний $\{\tilde{\tau}_i\}$ ($i=1, \dots, \tilde{s}$, $\tilde{s} \leq \hat{s}$).

Предполагается, что классифицированная обучающая выборка при ее отсутствии может быть сформирована на основе ретроспективных данных с помощью EM-алгоритмов для рассматриваемых моделей RS-VARX [2] и экспертного анализа. Обучающая выборка $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$ ($l \in S(L)$) используется для построения «подстановочного» решающего правила классификации и оценивания его условных вероятностей ошибок в рамках задачи 1, которые применяются в предлагаемом методе тестирования краткосрочных колебаний при решении задачи 2.

2. Метод и алгоритмы тестирования структурных изменений в модели RS-VARX

Метод тестирования моментов циклических структурных изменений основан на последовательном решении задач классификации многомерных авторегрессионных наблюдений и тестирования моментов структурных изменений с помощью предлагаемого ниже статистического критерия проверки гипотезы о значении ожидаемой вероятности ошибки классификации для применяемого решающего правила классификации. Детальное описание и исследование используемых решающих правил поточечной и групповой классификации для моделей RS-VARX приводится в [9]. Поэтому далее дается лишь краткое описание применяемого решающего правила, а основное внимание уделяется обоснованию предлагаемого статистического критерия.

2.1. Решающее правило поточечной классификации

Задача поточечной классификации векторных авторегрессионных наблюдений, описываемых моделью (1), заключается в оценивании номера класса состояния сложной системы $d_t \in S(L)$ по наблюдениям $(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$ при заданных значениях экзогенных переменных $\mathbf{x}_{t-p}, \dots, \mathbf{x}_{t-1}$ ($t=1, \dots, T$).

В работе [9] установлено, что если модель (1) удовлетворяет предположениям М.1–М.4, д.1, а $\{A_{l,i}\}$, $\{B_l\}$, $\{\pi_l\}$ ($i=1, \dots, p$; $l \in S(L)$) – истинные значения параметров модели, то оптимальное в смысле минимума вероятности ошибки байесовское решающее правило (БРП) поточечной классификации наблюдений (x_t, z_t) ($t=1, \dots, T$) единственное и определяется соотношениями

$$d_t \equiv d(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) = \arg \min_{l \in S(L)} \left\{ \text{tr}(\Sigma_t^{-1} S_t) + \ln |\Sigma_t| - 2 \ln \pi_l \right\}, \quad S_t = \bar{\boldsymbol{\eta}}_{l,t} \bar{\boldsymbol{\eta}}'_{l,t}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}_{l,t} = \mathbf{x}_t - \sum_{i=1}^p A_{l,i} \mathbf{x}_{t-i} - B_l \mathbf{z}_t, \quad (3)$$

где для класса Ω_l $\boldsymbol{\eta}_{l,t} \in \mathfrak{R}^N$ – случайный вектор отклонений в момент t значений эндогенных переменных от модельных значений; S_t – матричная сумма квадратов отклонений.

В предположениях М.1–М.4, д.1 для модели (1) могут быть получены состоятельные оценки максимального правдоподобия параметров $\{\hat{A}_{l,i}\}$, $\{\hat{B}_l\}$, $\{\hat{\pi}_l\}$ ($i=1, \dots, p$, $l \in S(L)$) по классифицированной обучающей выборке $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$ ($l \in S(L)$) [2]. Путем подстановки оценок параметров в БРП (3) получается состоятельное в смысле минимума вероятности ошибки подстановочное байесовское решающее правило (ПБРП) поточечной классификации наблюдений $(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$: $\hat{d}_t \equiv \hat{d}(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$ ($t=1, \dots, T$). В качестве характеристик точности решающих правил классификации используются условные вероятности ошибок для альтернативных классов состоя-

ний. Для простоты описания далее рассматривается случай двух классов, т. е. полагается, что $L=2$, $d_t \in S(2) = \{0, 1\}$ ($t=1, \dots, T$).

Введем обозначения: $r_0^{(l)} = \mathbf{P}\{d_t = 1-l | d_t^0 = l\}$ – условная вероятность ошибки при классификации наблюдений из класса Ω_l ($l \in \{0, 1\}$), где $d_t^0 \in \{0, 1\}$ – истинный номер класса состояния системы в момент времени t ; $r_1^{(l)}$ ($r_1^{(l)} > r_0^{(l)}$) – недопустимое значение вероятности ошибки классификации для класса Ω_l , которое интерпретируется как переход системы в альтернативный класс Ω_{1-l} и, соответственно, определяется по формуле

$$r_1^{(l)} = \mathbf{P}\{d_t = 1-l | d_t^0 = 1-l\} = 1 - \mathbf{P}\{d_t = l | d_t^0 = 1-l\} = 1 - r_0^{(1-l)}. \quad (4)$$

Условные вероятности ошибок $\{r_0^{(l)}, r_1^{(l)}\}$ ($l \in \{0, 1\}$) неизвестны и могут быть оценены по обучающей выборке $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$ ($l \in S(L)$) при построении ПБРП [9].

2.2. Алгоритм тестирования моментов циклических структурных изменений

Пусть имеются тестируемый временной ряд $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$ ($t=1, \dots, T$), описываемый моделью RS-VARX (1), М.1–М.4 в предположениях $d.1$ или $d.2$, и классифицированная обучающая выборка $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$ ($l \in S(L)$). Предлагаемый алгоритм тестирования структурных изменений основан на использовании ПБРП поточечной классификации, а также оценок его условных вероятностей ошибок по выборке $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$ ($l \in S(L)$). Он реализуется посредством выполнения следующих этапов:

1. Построение ПБРП и оценивание условных вероятностей ошибок. По обучающей выборке строится ПБРП поточечной классификации $\hat{d}_t \equiv \hat{d}(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$ вида (3). Оценки условных вероятностей ошибок $\{\hat{r}_0^{(l)}\}$ вычисляются по формуле

$$\hat{r}_0^{(l)} = 1 - \frac{1}{T_l} \sum_{t=1}^{T_l} \delta_{l, \hat{d}_t} \quad (l \in S(2)). \quad (5)$$

2. Классификация тестируемого временного ряда. С помощью оцененного на этапе 1 решающего правила ПБРП $\hat{d}(\cdot; \cdot)$ осуществляется поточечная классификация тестируемого временного ряда $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$ ($t=1, \dots, T$), в результате чего находится оценка вектора состояний сложной системы $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_T)' \in S^T(2)$. Для упрощения записи далее для оценок и истинных значений рассматриваемых характеристик используются одинаковые обозначения $\{r_0^{(l)}\}$ и $\{d_t\}$.

3. Оценивание условных вероятностей ошибок в сериях наблюдений. Случайная последовательность $d_1, \dots, d_T \in \{0, 1\}$ разбивается на $\gamma = T/m$ серий $\mathbf{D}_j = (d_{(j-1)m+1}, \dots, d_{jm})' \in \mathfrak{R}^m$ ($j=1, \dots, \gamma$) фиксированной длины m ($p+1 < m \ll T$). Для простоты описания алгоритма считается, что T кратно m . Будем полагать, что в момент наблюдения серии \mathbf{D}_j Ω_l – текущее состояние системы (исходное), а Ω_{1-l} – альтернативное ($l \in \{0, 1\}$). Для каждой серии \mathbf{D}_j вычисляются число решений в пользу альтернативного класса состояния Ω_{1-l} , обозначаемое $k_j^{(l)}(m) \in \{0, 1, \dots, m\}$, а также доля таких решений (оценка условной вероятности ошибки) $k_{j,m}^{(l)} \in (0, 1)$ по формулам

$$k_{j,m}^{(l)} = \frac{k_j^{(l)}}{m}, \quad k_j^{(l)} = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \delta_{d_i, 1-l} \quad (j=1, \dots, \gamma). \quad (6)$$

4. Тестирование моментов структурных изменений. Тестирование осуществляется с помощью статистического критерия на основе сравнения ожидаемой и оцененной условной веро-

ятностей ошибки для текущего состояния системы. Опишем соответствующую задачу статистической проверки гипотез. Пусть Ω_l ($l \in \{0, 1\}$) – текущее состояние системы, $r^{(l)}$ – неизвестное фактическое значение условной вероятности ошибки в пользу альтернативного класса Ω_{1-l} при оценивании состояния системы по серии D_j ; $r_0^{(l)}$ – условная вероятность ошибки ПБРП (3), которая интерпретируется как ожидаемое значение вероятности ошибки для состояния Ω_l ; $r_1^{(l)}$ – недопустимое значение вероятности ошибки для класса Ω_l .

Задача проверки гипотезы об отсутствии циклического структурного изменения, приводящего к изменению состояния системы, формулируется следующим образом: в состоянии системы Ω_l по серии наблюдений D_j ($j=1, \dots, \gamma$) для заданного значения вероятности ошибки первого рода α_0 ($0 < \alpha_0 < 0,5$) проверить гипотезу

$$H_0 : r^{(l)} = r_0^{(l)} \text{ при альтернативе } H_1 : r^{(l)} = r_1^{(l)} > r_0^{(l)}. \quad (7)$$

Имеет место следующая интерпретация гипотез в (7). Если доля решений в пользу альтернативного класса состояния системы Ω_{1-l} соответствует вероятности ошибки решающего правила для класса Ω_l , то гипотеза H_0 не отклоняется и, следовательно, нет оснований предполагать наличие смены состояния на тестируемом отрезке временного ряда. В этом случае считается, что момент переключения состояния $\tau > jm$ и осуществляется переход к тестированию следующей $(j+1)$ -й серии. Если доля решений в пользу альтернативного класса больше условной вероятности ошибки решающего правила для класса Ω_l , то это может быть следствием перехода системы из состояния Ω_l в альтернативное состояние Ω_{1-l} в момент времени $\bar{\tau} \in [(j-1)m+1, \dots, jm]$. В этом случае гипотеза H_0 отклоняется.

5. Выявление ложных сигналов» о смене класса состояния системы. Как отмечалось ранее, в ходе поточечной классификации временных рядов возможно появление «ложных сигналов» о смене класса состояния системы. В рамках предлагаемой процедуры сигнал о смене состояния Ω_l на Ω_{1-l} в некоторый момент времени τ считается ложным, если при тестировании очередной серии наблюдений было принято решение о возврате системы из состояния Ω_{1-l} в состояние Ω_l . Такие изменения состояния системы называются *случайными краткосрочными колебаниями*. В противном случае при сохранении нового состояния системы Ω_{1-l} в течение двух и более серий момент времени τ считается истинным моментом смены класса состояния (моментом циклического структурного изменения). Таким образом, в одной серии наблюдений длины m ($m \ll T$) не может быть более одного циклического структурного изменения, что исключает зависимость классов состояний внутри серий и дает возможность использовать решающее правило (3) поточечной классификации для случая независимых переключений состояний сложной системы.

2.3. Статистический критерий циклических структурных изменений

Сформулируем статистический критерий для решения задачи (7). Обозначим через $B(r_0^{(l)}, m, 1-\alpha_0)$ квантиль уровня $1-\alpha_0$ биномиального закона распределения с параметрами $m, r_0^{(l)}$.

Теорема. Если тестируемый временной ряд $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{R}^n$ ($t=1, \dots, T$) описывается моделью RS-VARX (1), M.1–M.4 в предположениях d.1 или d.2, а описанный выше алгоритм тестирования циклических структурных изменений удовлетворяет следующим условиям: 1) для поточечной классификации наблюдений $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t\}$ ($t=1, \dots, T$) используется ПБРП вида (3) для независимых классов состояний с условными вероятностями ошибок $\{r_0^{(l)}\}$ ($l \in S(2)$); 2) серии наблюдений $\mathbf{D}_j = (d_{(j-1)m+1}, \dots, d_{jm})' \in \mathcal{R}^m$ ($j=1, \dots, \gamma$) имеют длину m ($p+1 < m \ll T$), исключая возможность существования нескольких циклических структурных изменений

внутри серии, то статистический критерий проверки гипотез H_0, H_1 вида (7), имеющий заданный размер α_0 , формулируется следующим образом:

$$\text{гипотеза } H_0 \begin{cases} \text{не отклоняется, если } k_j^{(l)}(m) < B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0); \\ \text{отклоняется, если } k_j^{(l)}(m) \geq B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0). \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство. Число ошибочных решений $k_j^{(l)}(m) \in \{0, 1, \dots, m\} (l \in S(2))$ при оценке состояния системы по серии $\mathbf{D}_j (j=1, \dots, \gamma)$ соответствует числу наступлений некоторого события в серии из m независимых экспериментов при условии, что вероятность наступления события равна некоторой величине $r^{(l)}$. Это означает, что при верной гипотезе H_0 случайная величина $k_j^{(l)}(m) \in \{0, 1, \dots, m\}$ имеет биномиальный закон распределения с параметрами $m, r_0^{(l)}$ ($l \in S(2)$). Тогда задача (7) заключается в проверке гипотезы H_0 о значении параметра биномиального закона распределения при простой альтернативе H_1 по серии наблюдений длиной m . В этом случае в соответствии с определением квантиля уровня $1 - \alpha_0$ распределения случайной величины $k_j^{(l)}(m)$ получаем

$$\mathbf{P}\{k_j^{(l)}(m) \leq B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0) | H_0\} = \mathbf{P}\{H_0 | H_0\} = 1 - \alpha_0,$$

откуда следует, что размер критерия (7) равен $\mathbf{P}\{H_1 | H_0\} = \alpha_0$. ■

Следствие 1. Для заданного значения $1 - \beta_0$ мощности критерия (8) длина серии m находится из уравнения

$$\pi(m) = 1 - \mathbf{P}\{H_0 | H_1\} = \mathbf{P}\{H_1 | H_1\} = \mathbf{P}\{k_j^{(l)}(m) \geq B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0) | H_1\} = 1 - \beta_0. \quad (9)$$

Доказательство. Формула (9) следует из определения мощности критерия. ■

Для вычисления квантилей биномиального закона могут применяться как точные формулы, основанные на использовании бета-распределения [11], так и приближенные формулы, для получения которых применяются различные аппроксимации биномиального распределения. На практике часто удобнее использовать аппроксимацию биномиального распределения нормальным законом. В этом случае асимптотическое распределение случайной величины $k_j^{(l)}(m) (j=1, \dots, \gamma)$ вида (6) при $m \rightarrow \infty$ и верной нулевой гипотезе в (7) согласно формуле Муавра – Лапласа удовлетворяет следующему соотношению [12]:

$$\mathbf{P}\{k_j^{(l)}(m) \leq k/m | H_0\} = \sum_{h=0}^k \binom{m}{h} (r_0^{(l)})^h (1 - r_0^{(l)})^{m-h} = \Phi\left(\frac{k/m - r_0^{(l)} + c}{\sqrt{r_0^{(l)}(1 - r_0^{(l)})/m}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right), \quad (10)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Следствие 2. Если используется аппроксимация (10) биномиального закона нормальным распределением, для критерия (8) справедливо представление

$$\text{гипотеза } H_0 \begin{cases} \text{не отклоняется, если } k_j^{(l)} < k^{(l)}; \\ \text{отклоняется, если } k_j^{(l)} \geq k^{(l)}, \end{cases} \quad (11)$$

где для заданных значений $\alpha_0, \beta_0 (0 < \alpha_0, \beta_0 < 0,5)$ статистика критерия $k_j^{(l)}$ вычисляется согласно (6), пороговое значение $k^{(l)}$ критерия находится из ограничения на вероятность ошибки первого рода $\mathbf{P}(H_1 | H_0) = \mathbf{P}(d_l = 1 - l | d_l^0 = l) = \alpha_0$ и имеет вид

$$k^{(l)} = r_0^{(l)} + \frac{0,5}{m} + \Phi^{-1}(1 - \alpha_0) \frac{\sigma_0}{\sqrt{m}}, \quad \sigma_0 = \sqrt{r_0^{(l)}(1 - r_0^{(l)})}; \quad (12)$$

длина серии m , необходимая для достижения требуемого значения мощности критерия $\pi(m) = 1 - \mathbf{P}(H_0 | H_1) = 1 - \mathbf{P}(d_i = l | d_i^0 = 1 - l) = 1 - \beta_0$ при заданном значении $r_1^{(l)}$, определяется по формуле

$$m = \left(\frac{\sigma_0 \Phi^{-1}(1 - \alpha_0) + \sigma_1 \Phi^{-1}(1 - \beta_0)}{\rho} \right)^2, \quad \sigma_i = \sqrt{r_i^{(l)}(1 - r_i^{(l)})} (i = 0, 1), \quad \rho = r_1^{(l)} - r_0^{(l)}. \quad (13)$$

Доказательство. С учетом введенных обозначений при использовании аппроксимации (10) выражения (11)–(13) непосредственно следуют из (8) и (9) согласно [12]. ■

Нормальная аппроксимация вида (10) биномиального распределения имеет скорость сходимости $O(1/\sqrt{m})$ и, как отмечается в [11], является удовлетворительной в смысле точности вычисления значений функции распределения, если $mr^{(l)}(1 - r^{(l)}) \geq 9$. В то же время, как показывает экспериментальное исследование предлагаемых алгоритмов [2], нормальная аппроксимация биномиального распределения обеспечивает приемлемую точность вычисления характеристик в контексте решаемой задачи в условиях структурных изменений, приводящих к существенным различиям в значениях параметров модели для различных классов состояний.

2.4. Задание и интерпретация управляемых параметров

Пусть в алгоритме тестирования структурных изменений используется ПБРП с оценками условных вероятностей ошибок $\{\tilde{r}_0^{(l)}\} (l \in \{0, 1\})$ по обучающим выборкам объема $\{T_l^L\} (l \in S(L))$. Выбор значений управляемых параметров описанной выше процедуры основывается на минимаксной стратегии, в соответствии с которой

$$r_0^{(l)} = \begin{cases} \tilde{r}_0^{(l)}, & \text{если } T_l^L > 500, \\ \delta_l^+(q, T_l^L), & \text{если } T_l^L \leq 500; \end{cases} \quad r_1^{(l)} = \begin{cases} 1 - \tilde{r}_0^{(1-l)}, & \text{если } T_{1-l}^L > 500, \\ 1 - \delta_{1-l}^+(q, T_{1-l}^L), & \text{если } T_{1-l}^L \leq 500, \end{cases} \quad (14)$$

где $[\delta_l^-(q, T_l^L), \delta_l^+(q, T_l^L)] (l \in \{0, 1\})$ – доверительные интервалы с доверительной вероятностью q для условных вероятностей ошибок ПБРП $\{r_0^{(l)}\}: \mathbf{P}\{r_0^{(l)} \in [\delta_l^-(q, \tilde{T}_l), \delta_l^+(q, \tilde{T}_l)]\} = q$. Для вычисления границ доверительных интервалов в случае аппроксимации (10) удобно применять приближенную формулу [11]

$$\delta_l^\mp(q, \tilde{T}_l) = \frac{1}{\tilde{T}_l + \phi_q^2} \times \left(k_l + \frac{\phi_q^2}{2} \mp \phi_q \sqrt{\frac{k_l(\tilde{T}_l - k_l) + \phi_q^2}{\tilde{T}_l} + \frac{\phi_q^2}{4}} \right) (l \in S(L)), \quad (15)$$

где k_l – число ошибок при поточечной классификации \tilde{T}_l наблюдений из класса Ω_l ; $\phi_q \equiv \Phi^{-1}(q)$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня q .

В контексте рассматриваемой проблемы параметры α_0, β_0 имеют важную содержательную интерпретацию. Размер α_0 критерия (8) определяет среднюю длину серий (СДС) наблюдений между ложными сигналами о структурном изменении $L_0 = 1/\alpha_0$, а значение $1 - \beta_0$ мощности данного критерия – среднее число серий наблюдений, необходимое для обнаружения структурного изменения, если оно наступило, $L_1 = 1/(1 - \beta_0)$. Таким образом, параметры α_0, β_0 задают ограничения соответственно на число ложных сигналов о структурном изменении и скорость обнаружения структурного изменения, определяемую необходимыми для этого значениями СДС. Параметр q существенно влияет на ширину доверительного интервала (15) и согласно (13) – на длину серии m : чем больше q , тем больше значение m . Очевидно, большие значения m могут приводить к более позднему обнаружению структурного изменения в реальном времени. Для рассматриваемых задач целесообразными представляются значения $L_0 \in \{10, 20\}, L_1 \in \{1, 05; 1, 1\}, q \in \{0, 95; 0, 975\}$.

3. Результаты компьютерного моделирования

Для описания циклических изменений временных рядов $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{x}_t = (x_{ij}) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{R}^N$, $\mathbf{z}_t = (z_{ik}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$ ($n = N + M$, $t = 1, \dots, T$) используется модель MS-VARX с двумя ($L = 2$) чередующимися классами состояний Ω_0 и Ω_1 , которым соответствуют рост и снижение значений анализируемых эндогенных переменных. В задачах анализа циклических изменений экономических систем указанные состояния интерпретируются как фазы роста и спада экономического цикла. Предполагается, что смена состояний происходит в случайные моменты времени $\{\tau_i\}$ ($i = 1, \dots, s$), причем количество s циклических структурных изменений, приводящих к смене состояния системы, априори неизвестно. Для классификации временных рядов $\{y_t\}$ используется алгоритм EM MS-VARX [10].

Приведем результаты численных экспериментов, целью которых является исследование эффективности предлагаемого метода тестирования циклических структурных изменений на тестовых модельных данных.

3.1. Описание тестовых модельных данных

Рассматриваются модели MS-VARX вида (1) с циклическими структурными изменениями в матрице регрессионных коэффициентов. При статистическом моделировании тестовых данных предполагается, что вектор экзогенных переменных $\mathbf{z}_t = (z_{ij}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$ является случайным и имеет равномерное распределение в области $\mathfrak{Z} = Z^M \in \mathfrak{R}^M$, $Z = [1, 10]$. Рассматриваются различные варианты спецификации модели MS-VARX, различающиеся сложностью задачи обнаружения структурных изменений. Степень сложности задачи характеризуется значением межклассового расстояния $\Delta(\tilde{\mathbf{z}}) = \sqrt{\tilde{\mathbf{z}}'(B_1 - B_0)' \Sigma^{-1} (B_1 - B_0) \tilde{\mathbf{z}}}$, $\tilde{\mathbf{z}} = (5,5; 5,5; 5,5)'$, и параметром ОЦМ ω . В работе [10] было показано, что, если $\Delta(\tilde{\mathbf{z}}) \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0,5$, задача классификации усложняется и точность алгоритма классификации EM MS-VARX снижается. С учетом этих особенностей используются девять тестовых примеров, определяемых следующими наборами параметров модели:

- размерность модели: $L = 2$, $N = 2$, $M = 3$; число оцениваемых параметров 29;
- матрицы параметров VARX и переходных вероятностей:

$$A_1 = A_0 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

- матрицы коэффициентов регрессии:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_0 + H,$$

$$1) H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2) H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3) H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. структурное изменение касается только параметров второго уравнения.

В табл. 1 для вариантов модели, определяемых матрицей H , приводятся значения межклассового расстояния $\Delta(\tilde{\mathbf{z}})$, условных вероятностей ошибок классификации $r_0(\tilde{\mathbf{z}})$ для БРП, не учитывающего марковскую зависимость номеров классов состояний, а также ожидаемое число «ложных сигналов» на 1000.

Таблица 1

Характеристики сложности задачи классификации

Вариант	$\Delta(\tilde{\mathbf{z}})$	$r_0(\tilde{\mathbf{z}})$	Ожидаемое число «ложных сигналов»
1	1,23	0,269	269
2	2,46	0,109	109
3	4,92	0,007	7

3.2. Тестирование моментов смены состояний

Для каждого варианта модели используются по три тестовых примера (ТП), различающихся значениями параметра ОЦМ $\{d_t\}(t=1,\dots,T)$: $\omega \in \{0,02; 0,05; 0,1\}$. В табл. 2 приведены вычисленные по обучающим реализациям временных рядов длиной $T_0^L = T_1^L = 300$ точечные оценки условных вероятностей ошибок $\{\hat{r}_0^{(l)}\}(l \in \{0, 1\})$ и границы доверительных интервалов (15) для доверительной вероятности $q=0,95$. Полученные оценки применяются для расчета длин серий и пороговых значений критериев. При вычислении пороговых значений критерия (8), а также длины серий m полагается $\alpha_0=0,05$ ($L_0=20$), $\beta_0=0,1$ ($L_1=1,1$). В формулах (12), (13) им соответствуют значения квантилей стандартного нормального распределения: $\Phi^{-1}(0,95)=1,64$, $\Phi^{-1}(0,9)=1,29$. Результаты расчетов представлены в табл. 3.

Таблица 2
Оценки вероятностей ошибок и числа циклических структурных изменений

Тестовый пример	δ_0^-	$\hat{r}_0^{(0)}$	δ_0^+	δ_1^-	$\hat{r}_0^{(1)}$	δ_1^+
$\omega = 0,02, T^E = 200, s = 5$						
1.1	0,023	0,041	0,067	0,009	0,025	0,055
2.1	0,000 07	0,003	0,015	0,050	0,017	0,043
3.1	0,000 07	0,003	0,015	0,000	0,000	0,016
$\omega = 0,05, T^E = 300, s = 12$						
1.2	0,056	0,084	0,012	0,033	0,057	0,091
2.2	0,003	0,012	0,032	0,002	0,011	0,031
3.2	0,0008	0,006	0,022	0,020	0,004	0,002
$\omega = 0,1, T^E = 100, s = 11$						
1.3	0,129	0,174	0,226	0,038	0,061	0,091
2.3	0,009	0,024	0,051	0,018	0,035	0,060
3.3	0,002	0,012	0,034	0,000 07	0,003	0,016

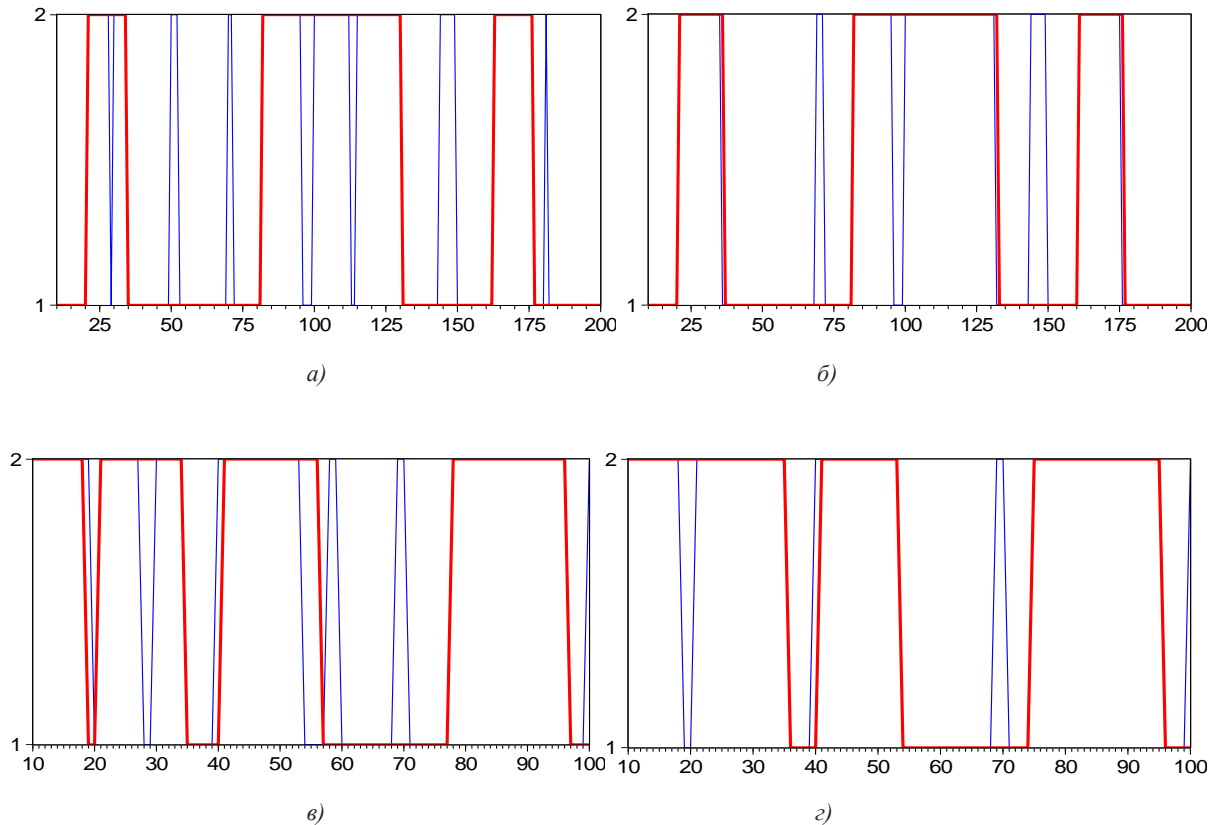
Таблица 3
Расчет длины серии и порогового значения критерия (текущее состояние Ω_0)

Тестовый пример	$r_0^{(0)} \equiv \delta_0^+$	$r_1^{(0)} \equiv 1 - \delta_1^+$	ρ	σ_0	σ_1	$[m]+1$	κ_+^1
$\omega = 0,02, T^E = 200, s = 5$							
1.1	0,067	0,945	0,878	0,25	0,227	4	0,398
2.1	0,015	0,957	0,942	0,122	0,202	4	0,241
3.1	0,015	0,984	0,969	0,122	0,124	4	0,241
$\omega = 0,05, T^E = 300, s = 12$							
1.2	0,121	0,909	0,788	0,325	0,288	4	0,513
2.2	0,032	0,969	0,937	0,175	0,173	4	0,301
3.2	0,022	0,980	0,958	0,148	0,139	4	0,269
$\omega = 0,1, T^E = 100, s = 11$							
1.3	0,226	0,909	0,683	0,418	0,288	4	0,696
2.3	0,051	0,940	0,889	0,220	0,237	4	0,357
2.4	0,034	0,984	0,950	0,182	0,125	4	0,309

Анализ условных вероятностей ошибок ПБРП $\hat{r}_0^{(l)}(l \in \{0, 1\})$ из табл. 3, полученных для различных вариантов значений $\Delta(\bar{z})$ и ω , подтверждает установленную в [10] закономерность: снижение точности классификации при уменьшении межклассового расстояния и ослаблении

зависимости классов наблюдений. В то же время наличие марковской зависимости номеров классов обуславливает достаточно малые значения межклассовых расстояний и минимально допустимую длину серий во всех рассматриваемых экспериментах.

На рисунке показаны результаты работы предлагаемого алгоритма тестирования моментов структурных изменений для четырех из описанных выше тестовых примеров, имеющих место при $\Delta(\tilde{z}) \in \{2,46; 4,92\}$ и $\omega \in \{0,05; 0,1\}$. По оси абсцисс откладывается порядковый номер наблюдения t ($t=1, \dots, T^E$), а по оси ординат – переменные $\hat{d}_t + 1, \tilde{d}_t + 1$ ($t=1, \dots, T^E$), указывающие на класс состояний сложной системы.



Результаты тестирования моментов структурных изменений:

- а) ТП 2.2: $\Delta(\tilde{z}) = 2,46$, $\omega = 0,05$, $\hat{s} = 22$, $\tilde{s} = 6$; б) ТП 3.2: $\Delta(\tilde{z}) = 4,92$, $\omega = 0,05$, $\hat{s} = s = 12$, $\tilde{s} = 6$;
 в) ТП 2.3: $\Delta(\tilde{z}) = 2,46$, $\omega = 0,1$, $\hat{s} = 15$, $\tilde{s} = 6$; г) ТП 3.3: $\Delta(\tilde{z}) = 4,92$, $\omega = 0,1$, $\hat{s} = s = 11$, $\tilde{s} = 6$

Тонкие линии на графиках соответствуют значениям номеров классов $\{\hat{d}_t\}$, полученных с помощью алгоритма EM MS-VARX, жирные линии – номерам классов состояний $\{\tilde{d}_t\}$ ($t=1, \dots, T^E$) после исключения краткосрочных колебаний с помощью предлагаемого алгоритма тестирования. Значения переменных \hat{s} и \tilde{s} указывают на число структурных изменений до и после исключения краткосрочных колебаний.

Заключение

Модели с циклическими переключениями состояний семейства RS-VARX в настоящее время применяются для анализа экономических циклов и циклических изменений в экономических системах, вызванных шокowymi воздействиями. Предлагаемые в статье алгоритмы классификации и тестирования моментов переключения состояний моделируемой системы позволяют отличать краткосрочные колебания в состоянии системы от долгосрочных циклических изменений. В основе алгоритмов лежат подстановочное байесовское решающее правило

поточечной классификации и статистический критерий проверки гипотезы о значении ожидаемой вероятности ошибки классификации.

Список литературы

1. Харин, Ю.С. Эконометрическое моделирование / Ю.С. Харин, В.И. Малюгин, А.Ю. Харин. – Минск : БГУ, 2003. – 318 с.
2. Малюгин, В.И. Методы анализа многомерных эконометрических моделей с неоднородной структурой / В.И. Малюгин. – Минск : БГУ, 2014. – 351 с.
3. Perron, P. Dealing with structural breaks / P. Perron // *Palgrave handbook of econometrics*. – Vol. 1: *Econometric Theory*. – Basingstoke : Palgrave Macmillan, 2006. – P. 278–352.
4. Hamilton, J.D. Regime switching models / J.D. Hamilton // *New Palgrave Dictionary of Economics*. – 2nd edition. – Basingstoke : Palgrave Macmillan, 2008. – P. 1755–1804.
5. Krolzig, H.-M. Markov switching vector autoregressions. Modelling statistical inference and application to business cycle analysis / H.-M. Krolzig. – Berlin : Springer, 1997. – 166 p.
6. Hamilton, J.D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle / J.D. Hamilton // *Econometrica*. – 1989. – Vol. 57(2). – P. 357–384.
7. Малюгин, В.И. Об оптимальности классификации случайных наблюдений, различающихся уравнениями регрессии / В.И. Малюгин, Ю.С. Харин // *Автоматика и телемеханика*. – 1986. – № 7. – С. 61–69.
8. Малюгин, В.И. Дискриминантный анализ многомерных авторегрессионных моделей с неоднородной структурой / В.И. Малюгин // *Известия НАН Беларуси. Сер. 1: Физ. Мат. Информ.* – 2013. – № 3. – С. 43–53.
9. Малюгин, В.И. Статистический анализ смесей распределений регрессионных наблюдений / В.И. Малюгин // *Информатика*. – 2008. – № 4(20). – С. 79–88.
10. Малюгин, В.И. Анализ многомерных статистических моделей с неоднородной структурой в случае скрытой марковской зависимости состояний / В.И. Малюгин, А.Ю. Новопольцев // *Известия НАН Беларуси. Сер. 1: Физ. Мат. Информ.* – 2015. – № 2. – С. 26–36.
11. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.
12. Браунли, К.А. Статистический анализ и методология в науке и технике / К.А. Браунли. – М. : Наука, 1977. – 407 с.

Поступила 31.07.2015

*НИИ прикладных проблем математики
и информатики Белорусского
государственного университета,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: Malugin@bsu.by*

V.I. Malugin

TESTING OF CYCLIC STRUCTURAL CHANGES IN SWITCHING REGIME VECTOR AUTOREGRESSIVE MODELS

For vector autoregressive models RS-VARX with cyclic regime switching of states the method of excluding of short-term system state fluctuations is proposed. The method is based on a sequential application of two algorithms, realizing the Bayesian “plug-in” decision rule of point wise classification and a statistical test for expected probability of misclassification. Accuracy of the approach is examined by means of computer simulation experiments.