

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.8.958:537.8:621.958:621.372.81.09

В.Т. Ерофеев, А.К. Синицын

**ПРОХОЖДЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ  
БИАНИЗОТРОПНО-ГИРОТРОПНУЮ ПЕРЕГОРОДКУ В КРУГЛОМ  
ВОЛНОВОДЕ С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

*Предлагается методика решения краевой задачи прохождения парциальных симметричных  $E$ - и  $H$ -волн круглого регулярного волновода с идеально проводящими стенками через азимутально-симметричную неоднородную перегородку из бианизотропно-гиротропного материала с импедансными граничными условиями в области перегородки, учитывающими поглощение электромагнитной энергии проводящим материалом стенки волновода. Решение задачи сводится к численному решению системы уравнений с частными производными для скалярных потенциалов. Исследуются условия взаимного преобразования  $H_{01}$ - и  $E_{01}$ -волн при прохождении через плоскую перегородку с различными свойствами бианизотропии и поглощения стенкой волновода.*

**Введение**

В настоящее время для математического моделирования актуальным является исследование взаимодействий электромагнитных волн со сложно структурированными материалами: композитными [1]; анизотропными, биизотропными и бианизотропными [2–5]. Практический интерес вызывают исследования электродинамических свойств анизотропных сред, включающих кристаллы, ферриты, намагниченную плазму и гиротропные материалы [6]. Исследуются однослойные и многослойные экраны из анизотропных и бианизотропных материалов [7–10]. В технических устройствах радиотехники широко используются волноводы и волноведущие структуры [11, 12]. В частности, волноводы применяются для исследования свойств материалов, которые включаются в волновод в виде диафрагмы. Также волноводы с перегородками и включениями используются как фильтры и преобразователи типов волн [13–17]. Как правило, исследуются волноводы с идеально проводящими стенками, что облегчает аналитическое моделирование. Для построения более точных моделей необходимо учитывать поглощение энергии стенками волноводов, которые выполнены из различных материалов. Классическим методом моделирования поглощения в стенке является метод импедансных граничных условий Щукина – Леонтовича [18]. Этот метод получил развитие применительно к различным типам электромагнитных полей и материалам массивных поверхностей. Получены импедансные граничные условия для анизотропных поверхностей [19], для поверхностей с многослойными покрытиями [20, 21], для искривленных поверхностей с учетом кривизны [22] в случае монохроматических полей и интегральные граничные условия для нестационарных и импульсных полей [23–27].

В предлагаемой статье сформулированы импедансные граничные условия для скалярных потенциалов на стенке волновода с учетом кривизны поверхности при воздействии монохроматических полей из бианизотропной перегородки. Решение задачи отражения и прохождения симметричных  $E$ - и  $H$ -парциальных волн круглого волновода через бианизотропно-гиротропную перегородку сведено к численному решению прямым сеточным методом блочной матричной прогонки [28] краевой задачи для системы двух эллиптических уравнений с интегральными граничными условиями излучения [29] на торцах волновода с учетом импедансных граничных условий.

**1. Краевая задача для симметричных волн в круглом волноводе с бианизотропно-гиротропной перегородкой**

Рассмотрим полый цилиндрический волновод круглого поперечного сечения радиуса  $b'$  с идеально проводящей границей, в котором находится азимутально-симметричная бианизотропная перегородка конечной толщины. Вне перегородки волновод заполнен вакуумом (рис. 1).

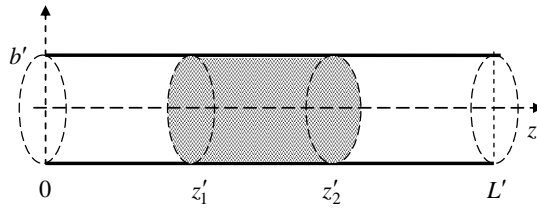


Рис. 1. Круглый волновод с бианизотропной перегородкой

Предполагаем, что слева из области  $z' < 0$  на перегородку в интервале  $z'_1 < z' < z'_2$  набегают парциальная волна волновода с осевой симметрией  $\dot{\vec{E}}'_0, \dot{\vec{H}}'_0$  с частотой  $\omega = 2\pi f$ . Вследствие ее взаимодействия с перегородкой внутри волновода образуется подлежащее определению результирующее электромагнитное поле  $(\vec{E}', \vec{H}') = \text{Re}\left\{\left(\dot{\vec{E}}', \dot{\vec{H}}'\right) \exp(j\omega t')\right\}$ , представляющее в расчетной области  $0 < z' < L'$  суперпозицию набегающей  $\dot{\vec{E}}'_0, \dot{\vec{H}}'_0$ ,  $z' < z'_1$ , отраженной  $\dot{\vec{E}}'_1, \dot{\vec{H}}'_1$ ,  $z' < z'_1$ , и проходящей  $\dot{\vec{E}}'_2, \dot{\vec{H}}'_2$ ,  $z' > z'_2$ , волн. Здесь точкой сверху помечены комплексные переменные, штрихом – размерные переменные, имеющие одинаковое наименование с соответствующими безразмерными переменными.

Запишем материальные уравнения бианизотропно-гиротропной среды в виде

$$\dot{\vec{B}}' = \mu_0 \ddot{\mu} \cdot \dot{\vec{H}}' + \ddot{\chi}_e / c \cdot \dot{\vec{E}}'; \quad \dot{\vec{D}}' = \varepsilon_0 \ddot{\varepsilon} \cdot \dot{\vec{E}}' + \ddot{\chi}_h / c \cdot \dot{\vec{H}}', \quad (1)$$

где

$$\ddot{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & -\mu_2 & 0 \\ \mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\chi}_e = \begin{bmatrix} \chi_{e1} & -\chi_{e2} & 0 \\ \chi_{e2} & \chi_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{e3} \end{bmatrix}; \quad \ddot{\chi}_h = \begin{bmatrix} \chi_{h1} & -\chi_{h2} & 0 \\ \chi_{h2} & \chi_{h1} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{h3} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\mu_0, \varepsilon_0$  – магнитная и диэлектрическая постоянные вакуума;  $\ddot{\mu}, \ddot{\varepsilon}$  – комплексные относительные магнитная и диэлектрическая тензорные проницаемости среды;  $\ddot{\chi}_e, \ddot{\chi}_h$  – комплексные безразмерные тензоры, характеризующие бианизотропность среды;  $c$  – скорость света. Для вакуума  $\ddot{\varepsilon} = I, \ddot{\mu} = I, \ddot{\chi}_e = 0, \ddot{\chi}_h = 0, I$  – единичная матрица.

Для описания результирующего электромагнитного поля на заданной частоте в рассматриваемом волноводе будем использовать безразмерные уравнения Максвелла для комплексных амплитуд вида

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{E}}' &= -jW \left[ \ddot{\mu}(z) \dot{\vec{H}}' + \ddot{\chi}_e(z) \dot{\vec{E}}' \right]; \quad \text{rot } \dot{\vec{H}}' = jW \left[ \ddot{\varepsilon}(z) \dot{\vec{E}}' + \ddot{\chi}_h(z) \dot{\vec{H}}' \right], \quad z'_1 < z' < z'_2; \\ \text{rot } \dot{\vec{E}}'_1 &= -jW \dot{\vec{H}}'_1; \quad \text{rot } \dot{\vec{H}}'_1 = jW \dot{\vec{E}}'_1, \quad z' < z'_1; \quad \text{rot } \dot{\vec{E}}'_2 = -jW \dot{\vec{H}}'_2; \quad \text{rot } \dot{\vec{H}}'_2 = jW \dot{\vec{E}}'_2, \quad z' > z'_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Для результирующих полей на разделах сред  $z = z_1, z = z_2$  удовлетворяются граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих, а на границах расчетной области  $z = 0, z = L$  для отраженных и проходящих полей выполняются условия излучения. На стенках волновода выполнено условие  $\left[ \dot{\vec{E}}', \vec{r}_0 \right]_{r=b} = 0$ . В области перегородки будем использовать импедансные граничные условия, учитывающие поглощение электромагнитной энергии стенкой волновода. Вывод граничных условий будет описан в разд. 4.

Здесь  $W = \omega / \omega_0$ ,  $\omega$  – рабочая частота,  $\omega_0 = 2\pi c / \lambda_0$  – опорная частота,  $\lambda_0$  – опорная длина волны, выбранные для перехода к безразмерным переменным. Используется цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$ . Введены следующие соотношения между размерными величинами (со штрихом) и соответствующими им безразмерными (без штриха):  $t = \omega_0 t'$  – время,

$(r, z, z_1, z_2, b, L) = (r', z', z'_1, z'_2, b', L') \cdot 2\pi / \lambda_0$ ,  $b'$  – радиус волновода,  $L'$  – длина отрезка волновода, на котором производится расчет,  $z'_1, z'_2$  – крайние границы бианизотропной вставки ( $0 < z_1 < z_2 < L$ );  $\dot{E} = \dot{E}' / E_m$ ,  $\dot{H} = \mu_0 c \dot{H}' / E_m$ ,  $E_m$  – характерная амплитуда электрического поля;  $\dot{E}'$ ,  $\dot{H}'$  – комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного полей с физической размерностью;  $\dot{E}$ ,  $\dot{H}$  – безразмерные комплексные амплитуды векторов поля.

Материальные параметры на границах перегородки испытывают разрыв первого рода, однако при этом выполняется непрерывность тангенциальных составляющих полей. При численном решении уравнений (2) в области  $0 < z < L$  методом сеток обеспечение «внутренних» граничных условий осуществляется за счет однородной консервативной конечноразностной схемы «сквозного» счета, полученной на основе интегроинтерполяционного метода [28].

Для формулировки граничных условий на стенке волновода  $r = b$  и в поперечных сечениях  $z = 0$ ,  $z = L$ , ограничивающих расчетную область  $\Omega = \{0 \leq r \leq b; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq L\}$ , воспользуемся условием азимутальной симметрии и для частного случая симметричных волн преобразуем векторную систему (2) к системе двух связанных скалярных уравнений.

## 2. Система уравнений для потенциалов электромагнитного поля

Представим векторы полей в виде

$$\dot{E} = E_r \vec{r}_0 + E_\varphi \vec{\Phi}_0 + E_z \vec{z}_0, \quad \dot{H} = H_r \vec{r}_0 + H_\varphi \vec{\Phi}_0 + H_z \vec{z}_0, \quad (3)$$

где  $\vec{r}_0, \vec{\Phi}_0, \vec{z}_0$  – орты цилиндрической системы координат. Будем рассматривать симметричные волны, для которых все компоненты полей (3) не зависят от координаты  $\varphi$ .

Введем потенциалы

$$\bar{u} = rE_\varphi, \quad \bar{v} = rH_\varphi \quad (4)$$

и выразим через них компоненты поля, рассматривая исходные материальные тензоры в базисе  $\vec{r}_0, \vec{\Phi}_0, \vec{z}_0$ :

$$E_r = \frac{1}{r} \left[ \frac{j}{Wg_1} (\chi_{h1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}) - \alpha_{11} \bar{u} - \alpha_{12} \bar{v} \right], \quad H_r = -\frac{1}{r} \left[ \frac{j}{Wg_1} (\varepsilon_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \chi_{e1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}) - \alpha_{21} \bar{u} - \alpha_{22} \bar{v} \right], \quad (5)$$

$$E_z = -\frac{j}{rWg_3} (\chi_{h3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \mu_3 \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}), \quad H_z = \frac{j}{rWg_3} (\varepsilon_3 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \chi_{e3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}),$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{1}{g_1} (\chi_{h1} \chi_{e2} - \mu_1 \varepsilon_2), \quad \alpha_{12} = \frac{1}{g_1} (\mu_2 \chi_{h1} - \mu_1 \chi_{h2}),$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{g_1} (\varepsilon_1 \chi_{e2} - \varepsilon_2 \chi_{e1}), \quad \alpha_{22} = \frac{1}{g_1} (\varepsilon_1 \mu_2 - \chi_{e1} \chi_{h2}),$$

$$g_1 = \mu_1 \varepsilon_1 - \chi_{e1} \chi_{h1}, \quad g_3 = \mu_3 \varepsilon_3 - \chi_{e3} \chi_{h3}.$$

Используя соотношения (5), преобразуем уравнения Максвелла (2) для бианизотропно-гиротропной среды к эллиптической системе двух скалярных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\chi_{h3}}{g_3 r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\chi_{h1}}{g_1 r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_3}{g_3 r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_1}{g_1 r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) +$$

$$+ jW \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha_{11}}{r} \bar{u} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha_{12}}{r} \bar{v} \right) + \frac{c_1}{g_1 r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{c_2}{g_1 r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] + \frac{W^2}{r} (c_3 \bar{u} + c_4 \bar{v}) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varepsilon_3}{g_3 r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\varepsilon_1}{g_1 r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\chi_{e3}}{g_3 r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\chi_{e1}}{g_1 r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \\ & + jW \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha_{21}}{r} \bar{u} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha_{22}}{r} \bar{v} \right) + \frac{b_1}{g_1 r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{b_2}{g_1 r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] + \frac{W^2}{r} (b_3 \bar{u} + b_4 \bar{v}) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \chi_{h1} \chi_{e2} - \varepsilon_1 \mu_2, \quad c_2 = \mu_1 \chi_{e2} - \chi_{e1} \mu_2, \\ c_3 &= \mu_2 \alpha_{21} - \chi_{e2} \alpha_{11} + \chi_{e1}, \quad c_4 = \mu_2 \alpha_{22} - \chi_{e2} \alpha_{12} + \mu_1, \\ b_1 &= \chi_{h1} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \chi_{h2}, \quad b_2 = \mu_1 \varepsilon_2 - \chi_{e1} \chi_{h2}, \\ b_3 &= \chi_{h2} \alpha_{21} - \varepsilon_2 \alpha_{11} + \varepsilon_1, \quad b_4 = \chi_{h2} \alpha_{22} - \varepsilon_2 \alpha_{12} + \chi_{h1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для удобства численного решения системы (6) сделаем замену переменных  $\rho=r/b$ ,  $u(\rho, z) = \rho E_\varphi = \bar{u}/b$ ,  $v(\rho, z) = \rho H_\varphi = \bar{v}/b$ , которая отображает рассматриваемый волновод на волновод единичного радиуса. Уравнения (6) в области  $D = \{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq L\}$  запишем в стандартном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left( a_{11} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( a_{13} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{14} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ & + W \left[ \frac{\partial}{\partial z} (c_{11} u) + \frac{\partial}{\partial z} (c_{12} v) + c_{13} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{14} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + W^2 (b_{11} u + b_{12} v) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \rho} \left( a_{21} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{22} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( a_{23} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a_{24} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ & + W \left[ \frac{\partial}{\partial z} (c_{21} u) + \frac{\partial}{\partial z} (c_{22} v) + c_{23} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{24} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + W^2 (b_{21} u + b_{22} v) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\chi_{h3}}{g_3 \rho b^2}, \quad a_{12} = \frac{\chi_{h1}}{g_1 \rho}, \quad a_{13} = \frac{\mu_3}{g_3 \rho b^2}, \quad a_{14} = \frac{\mu_1}{g_1 \rho}, \\ c_{11} &= \frac{j\alpha_{11}}{\rho}, \quad c_{12} = \frac{j\alpha_{12}}{\rho}, \quad c_{13} = \frac{jc_1}{g_1 \rho}, \quad c_{14} = \frac{jc_2}{g_1 \rho}, \quad b_{11} = \frac{c_3}{\rho}, \quad b_{12} = \frac{c_4}{\rho}, \\ a_{21} &= \frac{\varepsilon_3}{g_3 \rho b^2}, \quad a_{22} = \frac{\varepsilon_1}{g_1 \rho}, \quad a_{23} = \frac{\chi_{e3}}{g_3 \rho b^2}, \quad a_{24} = \frac{\chi_{e1}}{g_1 \rho}, \\ c_{21} &= \frac{j\alpha_{21}}{\rho}, \quad c_{22} = \frac{j\alpha_{22}}{\rho}, \quad c_{23} = \frac{jb_1}{g_1 \rho}, \quad c_{24} = \frac{jb_2}{g_1 \rho}, \quad b_{21} = \frac{b_3}{\rho}, \quad b_{22} = \frac{b_4}{\rho}. \end{aligned} \quad (9)$$

В областях волновода, заполненных вакуумом ( $\vec{\chi}_e = 0$ ,  $\vec{\chi}_h = 0$ ,  $\vec{\varepsilon} = I$ ,  $\vec{\mu} = I$ ), система (8) распадается на два независимых уравнения: первое из них описывает симметричные  $H$ -волны, второе –  $E$ -волны. В области, занятой бианизотропной средой, эти волны оказываются связанными и взаимодействуют друг с другом. Заметим, что полученная система уравнений описывает распространение волн через аксиально-симметричную бианизотропную среду при неоднородном распределении ее свойств, в частности при наличии разрывов материальных коэффициентов. При этом уравнения (8) справедливы, когда матричные элементы тензоров в (1) являются функциями от  $r'$ ,  $z'$ . В этом случае в (7), (9) следует произвести замену пере-

менных  $r' = \frac{cb}{\omega_0} \rho$ ,  $z' = \frac{c}{\omega_0} z$ .

### 3. Разложение потенциалов по собственным функциям волновода

Для исследования структуры отраженного и прошедшего через перегородку полей представим потенциалы в виде рядов по бесконечной системе собственных симметричных функций регулярного волновода, заполненного вакуумом. Собственные волны  $\dot{E}^0, \dot{H}^0$  регулярного пустого волновода круглого сечения, являющиеся решениями уравнений Максвелла (2) в областях  $-\infty < z < z_1, z_2 < z < +\infty$  при граничных условиях  $[\vec{r}_0 \cdot \dot{E}^0]_{|\rho=1} = 0$ , описаны в работе [11].

Решение для результирующего поля  $\dot{E}, \dot{H}$  в сечениях  $z = \text{const}$  представим в виде разложения по мембранным вектор-функциям с коэффициентами, зависящими от  $z$  [15]. В результате для потенциалов  $u, v$  получим разложения по мембранным функциям  $J_1(\mu_{0i}\rho), J_1(\nu_{0i}\rho)$ , соответствующим собственным волнам:

$$u(\rho, z) = \rho \dot{E}_{0\phi}(\rho, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{U}_i(z) \rho J_1(\mu_{0i}\rho), \quad v(\rho, z) = \rho \dot{H}_{0\phi}(\rho, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{V}_i(z) \rho J_1(\nu_{0i}\rho), \quad (10)$$

где  $\nu_{0i}$  – корни уравнения  $J_0(\nu) = 0, \nu > 0$ ;  $\mu_{0i}$  – корни уравнения  $J'_0(\mu) = 0, \mu > 0$ ;  $J_m(x)$  – функция Бесселя.

На регулярных участках  $-\infty < z < z_1, z_2 < z < \infty$  амплитуды  $\dot{U}_i(z), \dot{V}_i(z)$  представляются в виде разложения по системе прямых (знак « $\leftarrow$ » в экспоненте) и обратных (знак « $\rightarrow$ » в экспоненте) собственных  $E_{0i}$ - и  $H_{0i}$ -волн:

$$\dot{U}_i(z) = W \left( a_i^{m+} \exp(-jk_i^m z) + a_i^{m-} \exp(+jk_i^m z) \right), \quad k_i^m = \begin{cases} + \sqrt{W^2 - (\mu_{0i}/b)^2}, & W > \mu_{0i}/b, \\ -j\sqrt{(\mu_{0i}/b)^2 - W^2}, & W < \mu_{0i}/b; \end{cases} \quad (11)$$

$$\dot{V}_i(z) = W \left( a_i^{e+} \exp(-jk_i^e z) + a_i^{e-} \exp(+jk_i^e z) \right), \quad k_i^e = \begin{cases} + \sqrt{W^2 - (\nu_{0i}/b)^2}, & W > \nu_{0i}/b, \\ -j\sqrt{(\nu_{0i}/b)^2 - W^2}, & W < \nu_{0i}/b, \end{cases}$$

где  $a_i^{m\pm}, a_i^{e\pm}$  – амплитуды прямой и обратной собственных волн;  $k_i^m, k_i^e$  – волновые числа.

Предполагаем, что на начальном сечении при  $z = 0$  заданы набегающие слева  $H_{0i}$ -волны с индексами  $p$  и заданными амплитудами  $a_{0p}^{m+}, a_{0i(i \neq p)}^{m+} = 0$  и  $E_{0i}$ -волны с индексами  $r$  и заданными амплитудами  $a_{0r}^{e+}$  ( $a_{0i(i \neq r)}^{e+} = 0$ ). Это означает, что первичное поле  $\dot{E}_0, \dot{H}_0$  набегающей на перегородку симметричной волны определяется потенциалами

$$u_0 = \rho \dot{E}_{0\phi}(\rho, z) = W \sum_p a_{0p}^{m+} \exp(-jk_p^e z) \rho J_1(\mu_{0p}\rho),$$

$$v_0 = \rho \dot{H}_{0\phi}(\rho, z) = W \sum_r a_{0r}^{e+} \exp(-jk_r^e z) \rho J_1(\nu_{0r}\rho).$$

### 4. Модели импедансных граничных условий на поверхности волновода

В области перегородки ( $\rho = 1; z_1 < z < z_2$ ) стенка волновода выполнена из материала с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon'_s = \epsilon_0 \epsilon_s = \epsilon_0 (\epsilon_I - j\epsilon_{II})$  и магнитной проницаемостью  $\mu'_s = \mu_0 \mu_s = \mu_0 (\mu_I - j\mu_{II})$ . Будем предполагать, что толщина проводящей стенки волновода значительно больше глубины проникновения электромагнитного поля в материал, из которого она изготовлена. Поле в стенке волновода представим через базисные цилиндрические поля [26, с. 129] в принятых безразмерных переменных

$$\dot{E}_s = q_1 \tilde{U}_0^{(1)}(\vec{r}, k_s) + q_2 \tilde{U}_0^{(2)}(\vec{r}, k_s), \quad \dot{H}_s = j \frac{n_s}{\mu_s} \left( q_1 \tilde{U}_0^{(2)}(\vec{r}, k_s) + q_2 \tilde{U}_0^{(1)}(\vec{r}, k_s) \right), \quad 1 < \rho < \infty, \quad (12)$$

где  $q_1, q_2 = \text{const}$ ,  $n_s = \sqrt{\varepsilon_s \mu_s}$ ,  $-\pi < \arg n_s < 0$ ;

$$\tilde{U}_0^{(1)}(\vec{r}, k_s) = A(\lambda, \rho) \bar{\varphi}_0, \quad \tilde{U}_0^{(2)}(\vec{r}, k_s) = B(\lambda, \rho) \bar{r}_0 - C(\lambda, \rho) \bar{z}_0,$$

$$A(\lambda, \rho) = K_1(W w(\lambda) b \rho) \exp(jWz), \quad B(\lambda, \rho) = -\frac{j\lambda}{n_s} K_1(W w(\lambda) b \rho) \exp(jWz),$$

$$C(\lambda, \rho) = \frac{w(\lambda)}{n_s} K_0(W w(\lambda) b \rho) \exp(jWz), \quad w(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon_s \mu_s}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg w \leq \frac{\pi}{2},$$

$\lambda$  – параметр,  $K_m(\cdot)$  – функция Макдональда [30].

Теперь запишем тангенциальные составляющие полей (12) на поверхности волновода ( $\rho = 1$ ):

$$\dot{E}_{s,\tau} = q_1 A(\lambda, 1) \bar{\varphi}_0 - q_2 C(\lambda, 1) \bar{z}_0, \quad \dot{H}_{s,\tau} = j \frac{n_s}{\mu_s} (q_1 A(\lambda, 1) \bar{\varphi}_0 - q_2 C(\lambda, 1) \bar{z}_0). \quad (13)$$

Тангенциальные составляющие полей (3), примыкающих к поверхности из внутренней области волновода, имеют вид

$$\dot{E}_\tau \Big|_{\rho=1} = E_\varphi \bar{\varphi}_0 + E_z \bar{z}_0, \quad \dot{H}_\tau \Big|_{\rho=1} = H_\varphi \bar{\varphi}_0 + H_z \bar{z}_0. \quad (14)$$

В силу непрерывности тангенциальных составляющих на поверхности раздела сред приравняем поля (13), (14). Получим скалярные соотношения

$$E_\varphi = q_1 A(\lambda, 1), \quad E_z = -q_2 C(\lambda, 1), \quad H_\varphi = j q_2 \frac{n_s}{\mu_s} A(\lambda, 1), \quad H_z = -j q_1 \frac{n_s}{\mu_s} C(\lambda, 1). \quad (15)$$

Параметр  $\lambda$  определяет наклон потока энергии, под которым энергия утекает во внешнее пространство. В формулах (15) положим  $\lambda = 0$ , так как при моделировании будем предполагать, что энергия движется в радиальном направлении, т. е. ортогонально поверхности волновода. Такое допущение используется в импедансных граничных условиях Щукина – Леонтовича [18]. Исключая коэффициенты  $q_1, q_2$ , получим импедансные граничные условия, учитывающие кривизну поверхности  $\rho = 1$  [22]:

$$E_\varphi = Z_1 H_z, \quad E_z = -Z_2 H_\varphi, \quad (16)$$

где  $Z_1 = Q \mu_s / n_s$ ,  $Z_2 = \mu_s / (n_s Q)$ ,  $w(0) = j n_s$ ,  $Q = K_1(j W n_s b) / K_0(j W n_s b)$ ,  $Q \approx \left( 1 + \frac{3}{8} q - \frac{15}{128} q^2 \right) / \left( 1 - \frac{1}{8} q + \frac{9}{128} q^2 \right)$ ,  $q = 1 / (j W n_s b)$ ,  $b$  – безразмерный радиус кривизны поверхности вдоль координаты  $\varphi$  (совпадает с радиусом волновода).

В случае среды с электрическими потерями имеем  $\mu_I > 0$ ,  $\mu_{II} = 0$ ,  $\varepsilon_I > 0$ ,  $\varepsilon_{II} > 0$ ,  $\varepsilon_s = \varepsilon_I (1 - j \text{tg} \Delta_\sigma)$ ,  $\text{tg} \Delta_\sigma = \varepsilon_{II} / \varepsilon_I$ ,  $\Delta_\sigma$  – угол электрических потерь [6, с. 121],  $n_s = n_I - j n_{II}$ ,

$n_I = \sqrt{\frac{\mu_I}{2} (|\varepsilon_s| + \varepsilon_I)}$ ,  $n_{II} = \sqrt{\frac{\mu_I}{2} (|\varepsilon_s| - \varepsilon_I)}$ . Если  $\sigma'$  – удельная электрическая проводимость стенки волновода, то  $\varepsilon_{II} = \frac{\sigma'}{W \omega_0 \varepsilon_0} = \frac{\sigma' \lambda_0}{2\pi W c \varepsilon_0}$ .

Если не учитывать кривизну поверхности, то, положив  $Q = 1$ , получим граничные условия Щукина – Леонтовича:  $Z_1 = Z_2 = Z = (1 + j) \sqrt{\frac{W \mu_s \omega_0 \varepsilon_0}{2\sigma'}}$ .

Используя формулы (4), (5), преобразуем (16) к импедансным граничным условиям для потенциалов  $u$ ,  $v$  в области перегородки ( $z_1 < z < z_2$ ,  $\rho = 1$ ):

$$u|_{\rho=1} = \frac{jZ_1}{bWg_3} \left( \varepsilon_3 \frac{\partial u}{\partial \rho} + \chi_{e3} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_{\rho=1}, \quad v|_{\rho=1} = \frac{j}{bWg_3Z_2} \left( \chi_{h3} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \mu_3 \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_{\rho=1}. \quad (17)$$

На идеально проводящей стенке волновода выполняются условия

$$u|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad 0 < z < z_1, \quad z_2 < z < L. \quad (18)$$

При этом на оси цилиндра выполняются условия  $u|_{\rho=0} = 0$ ;  $v|_{\rho=0} = 0$ . Вместо условий идеальной проводимости (18) могут использоваться граничные условия

$$u|_{\rho=1} = \frac{jZ_1}{bW} \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}, \quad v|_{\rho=1} = \frac{j}{bWZ_2} \frac{\partial v}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}.$$

### 5. Условия излучения для потенциалов в торцах волновода

При формулировке интегральных условий излучения на начальном ( $z = 0$ ) и конечном ( $z = L$ ) сечениях расчетной области волновода используются следующие граничные условия:

1. На сечении  $z = 0$  интегральные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial z} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{jk_i^m}{h_{0i}} \rho J_1(\mu_{0i}\rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, 0) J_1(\mu_{0i}\bar{\rho}) d\bar{\rho} &= -2jW \sum_p k_p^m a_{0p}^{m+} \rho J_1(\mu_{0p}\rho), \\ \frac{\partial v(\rho, 0)}{\partial z} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{jk_i^e}{e_{0i}} \rho J_1(\nu_{0i}\rho) \int_0^1 v(\bar{\rho}, 0) J_1(\nu_{0i}\bar{\rho}) d\bar{\rho} &= -2jW \sum_r k_r^e a_{0r}^{e+} \rho J_1(\nu_{0r}\rho). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $h_{0i} = \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{0i})$ ,  $e_{0i} = \frac{1}{2} J_1^2(\nu_{0i})$ .

2. Если предположить, что на сечении  $z = L$  заданы набегающие справа  $H$ -волны с индексами  $p$  и заданными амплитудами  $a_{0p}^{m-}$  ( $a_{Li(i \neq p)}^{m-} = 0$ ) и  $E$ -волны с индексами  $r$  и заданными амплитудами  $a_{0r}^{e-}$  ( $a_{Li(i \neq r)}^{e-} = 0$ ), то интегральные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho, L)}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{jk_i^m}{h_{0i}} \rho J_1(\mu_{0i}\rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, L) J_1(\mu_{0i}\bar{\rho}) d\bar{\rho} &= 2jW \sum_p k_p^m a_{Lp}^{m-} \rho J_1(\mu_{0p}\rho), \\ \frac{\partial v(\rho, L)}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{jk_i^e}{e_{0i}} \rho J_1(\nu_{0i}\rho) \int_0^1 v(\bar{\rho}, L) J_1(\nu_{0i}\bar{\rho}) d\bar{\rho} &= 2jW \sum_r k_r^e a_{Lr}^{e-} \rho J_1(\nu_{0r}\rho). \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что при условии полного согласования в выходном сечении  $z = L$  набегающие справа волны отсутствуют и  $a_{Lp}^{m-} = 0$ ,  $a_{Lr}^{e-} = 0$ . При получении условий (19), (20) учтены наряду с распространяющимися и закрытые волны, которые присутствуют вблизи перегородки. В связи с этим их можно ставить достаточно близко от границ перегородки, что позволяет значительно уменьшить расчетную область, особенно вблизи границы полосы прозрачности.

Таким образом, для системы уравнений (8) получена краевая задача в области  $D = \{0 < \rho < 1; 0 < z < L\}$  с условиями на стенке и на оси волновода (17), (18), а также с условиями излучения на начальном и выходном сечениях волновода (19), (20). Ввиду того что коэффициенты системы (8) имеют разрывы первого рода, при ее решении сеточным методом блочной матричной прогонки используется однородная конечноразностная схема, учитывающая непрерывность потока электромагнитной энергии на границах разрыва.

## 6. Коэффициенты отражения и прохождения по мощности

Для тестирования бианизотропных материалов представляет интерес исследование потоков электромагнитной энергии вдоль волновода с перегородкой и распределение энергии по поляризациям.

Мощность энергии, проходящей через поперечное сечение  $z$  волновода внутри бианизотропно-гиротропной перегородки, определяется формулой

$$P_s(z) = \operatorname{Re} \int_0^1 \left[ \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right]_{\perp z} \rho d\rho = P_s^m(z) + P_s^e(z) =$$

$$= \operatorname{Re} \int_0^1 \left( \frac{j}{g_1 W} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \chi_{e1} \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \alpha_{21} u - \alpha_{22} v \right)^* u \frac{d\rho}{\rho} + \operatorname{Re} \int_0^1 \left( \frac{j}{g_1 W} \left( \chi_{h1} \frac{\partial u}{\partial z} + \mu_1 \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \alpha_{11} u - \alpha_{12} v \right) v^* \frac{d\rho}{\rho},$$
(21)

где \* – знак сопряжения.

Вне перегородки мощности  $H$ - и  $E$ -волн разделяются:

$$P_s^m(z) = \frac{1}{W} \operatorname{Im} \int_0^1 u \frac{\partial u^*}{\partial z} \frac{d\rho}{\rho}, \quad P_s^e(z) = -\frac{1}{W} \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial z} v^* \frac{d\rho}{\rho},$$
(22)

где  $P_s^m(z)$  – мощность  $H$ -волны,  $P_s^e(z)$  – мощность  $E$ -волны,  $P_s(z) = P_s^m(z) + P_s^e(z)$ .

Определим мощности:  $P_0^+$  – мощность поданной на сечение  $z = 0$  волны, энергия которой движется в положительном направлении оси  $0z$ ;  $P_0^-$  – мощность отраженной волны, проходящей сечение  $z = 0$  в отрицательном направлении оси  $0z$ . Имеют место соотношения  $P_s(0) = P_0^+ - P_0^-$ ,  $P_0^+ = P_0^{m+} + P_0^{e+} = W \sum_p \left| a_{0p}^{m+} \right|^2 k_p^m h_{0p} + W \sum_r \left| a_{0r}^{e+} \right|^2 k_r^e e_{0r}$ , где суммирование производится по распространяющимся волнам.

Коэффициент отражения по мощности  $K_0$  при полном согласовании на выходе волновода (при  $z = L$ ,  $a_{Lr}^{e-} = 0$ ,  $a_{Lp}^{m-} = 0$ ) вычисляется теперь по формуле

$$K_0 = K_{0u} + K_{0v} = P_0^- / P_0^+ = 1 - P_s(0) / P_0^+.$$
(23)

Если на вход подается одна парциальная  $H$ -волна, то  $K_{0u} = 1 - P_s^m(0) / P_0^+$ ,  $K_{0v} = -P_s^e(0) / P_0^+$ .

Если на вход подается одна  $E$ -волна, то  $K_{0u} = -P_s^m(0) / P_0^+$ ,  $K_{0v} = 1 - P_s^e(0) / P_0^+$ .

Коэффициент прохождения по мощности  $K_{\Pi}$  вычисляется следующим образом:

$$K_{\Pi} = K_{\Pi u} + K_{\Pi v} = P_s(L) / P_0^+, \quad K_{\Pi u} = P_s^m(L) / P_0^+, \quad K_{\Pi v} = P_s^e(L) / P_0^+.$$
(24)

## 7. Вычислительный эксперимент

Описанная выше методика реализована в виде программного комплекса, позволяющего рассчитывать процессы прохождения и отражения симметричных электромагнитных  $H$ - и  $E$ -полей заданной частоты через азимутально-симметричную бианизотропную перегородку с заданными материальными комплексными коэффициентами и выполнять оптимизацию пара-



метров по заданным критериям, например минимизировать коэффициент прохождения одной волны при максимизации коэффициента прохождения другой. Расчеты проводились в безразмерных переменных (2), в частности геометрические размеры задавались в единицах  $\lambda_0/(2\pi)$ , поэтому результаты можно масштабировать на любую требуемую частоту.

Рассмотрен волновод с плоской перегородкой (рис. 1). Радиус волновода  $b$  задавался таким образом, чтобы обеспечить одномодовый режим распространения  $H_{01}$ - и  $E_{01}$ -волн ( $\mu_{01} = 3,83 < b < \nu_{02} = 5,52$ ). На входе ( $z = 0$ ) задавалась  $H_{01}$ -волна единичной амплитуды, т. е. в (19)  $a_{01}^{m+} = 1, p = 1, r = 0$ . Для выходного сечения ( $z = L$ ) в (20) задавалось условие полного согласования. Для выяснения влияния условий поглощения в стенке волновода в области перегородки расчеты проводились для значений удельной электрической проводимости стенки в диапазоне от  $\sigma' = 5,7 \cdot 10^7$  сим/м (медь) до  $\sigma' = 10^3$  сим/м,  $\mu_s = 1, \epsilon_1 = 1$ .

Выполненные тестовые расчеты для биизотропной перегородки (в этом случае тензоры материальных коэффициентов (1) имеют только по три одинаковых диагональных элемента) при  $\sigma' > 10^6$  сим/м полностью повторяют результаты статьи [17], в которой показана возможность практически полного преобразования симметричной  $H_{01}$ -волны в  $E_{01}$ -волну и наоборот с помощью перегородки из кирального материала. Такие устройства могут быть востребованы, например, в выходной секции черенковских генераторов для преобразования полученной мощности СВЧ в виде симметричной  $E_{01}$ -волны в  $H_{01}$ -волну, более удобную для последующего использования. Однако композитные киральные материалы еще только находятся в стадии разработки.

Среди гиротропных материалов, описываемых тензорами (1), в настоящее время хорошо освоена технология изготовления ферритовых диэлектриков, которые получили широкое использование в технике СВЧ [31]. Рассмотрим перегородку (см. рис. 1) из феррита, помещенного в продольное постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$ , постоянная намагниченность которого  $\vec{M}_0 = \chi_m H_0 \vec{z}_0$ . По отношению к переменному полю электромагнитной волны материальные тензоры (1) внутри такой перегородки без учета поглощения имеют вид [6 (с. 510), 31]

$$\vec{\chi}_e = 0; \vec{\chi}_h = 0; \vec{\epsilon} = \epsilon_m I; \vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_T & -j\alpha & 0 \\ j\alpha & \mu_T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где  $\mu_T = 1 - \frac{\Omega_0^2 \chi_m}{W^2 - \Omega_0^2}$ ,  $\alpha = \frac{W \Omega_0 \chi_m}{W^2 - \Omega_0^2}$ ;  $\Omega_0 = \frac{\gamma H_0}{\omega_0}$  – относительная собственная частота прецессии,  $\gamma = \mu_0 e / m = 2,21 \cdot 10^5$  м А<sup>-1</sup> с<sup>-1</sup> – гиромангнитная постоянная;  $e, m$  – заряд и масса электрона.

Безразмерные значения  $W, \Omega_0, \chi_m, \epsilon_m$  определяют параметры феррита на заданной рабочей частоте  $\omega$  и величину поля  $H_0$ . Учесть объемное поглощение внутри феррита можно, положив  $\Omega_0$  комплексным [6].

Как показали расчеты, прохождение набегающей слева  $H_{01}$ -волны через перегородку толщиной  $L_{12} = z_2 - z_1$  сопровождается ее преобразованием в две отраженные и две проходящие  $H_{01} + E_{01}$  волны. Такое преобразование полностью определяется рассчитываемыми по формулам (23), (24) коэффициентами отражения  $K_{0u}, K_{0v}$  и прохождения  $K_{1u}, K_{1v}$  волн.

Особый интерес представляют условия, при которых реализуется по возможности полное преобразование одного типа волны в другой, например  $H_{01}$ - волны в  $E_{01}$ -волну. Для нахождения этих условий для заданных  $b$  и  $W = 1$  с использованием метода оптимизации подбирались параметры  $\Omega_0, \chi_m, \epsilon_m, L_{12}$ , при которых достигается максимум коэффициента прохождения  $E$ -волны  $K_{1v}$  при минимальных значениях  $K_{0u}, K_{0v}$  и  $K_{1u}$ . Расчеты показали, что такое преобразование возможно с КПД порядка 95–97 % при множестве различных комбинаций значений  $\Omega_0, \chi_m, \epsilon_m, L_{12}$ . Это позволяет при подборе параметров преобразователя довольно широко варьировать физические параметры используемых ферритов и величину постоянного магнитного поля. Для толщины перегородки, как правило, не превосходящей диаметра волновода  $2b$ , заметное влияние поглощения в стенке начинается со значений  $\sigma'$ , меньших  $10^4$  сим/м.

На рис. 2 приведены характеристики (11), (21), (23), (24) прохождения  $H_{01}$ -волны для одного из найденных вариантов параметров ферритовой перегородки, в котором при  $W = 1$ ,  $b = 4,66$ ,  $\sigma' = 10^3$ ,  $\Omega_0 = 0,81$ ,  $\chi_m = 0,12$ ,  $\epsilon_m = 5$ ,  $L_{12} = 4,33$ ,  $\alpha = 0,28$ ,  $\mu_T = 0,77$  получено  $K_{0u} = 0,044$ ,  $K_{0v} = 0,0006$ ,  $K_{\Pi u} = 0,005$ ,  $K_{\Pi v} = 0,86$  (вариант 1). Для частоты волны  $f = \omega/2\pi \cong 10$  ГГц радиус волновода  $b' = 2,33$  см, толщина перегородки  $L'_{12} = 2,16$  см,  $H_0 \approx 230$  кА·м<sup>-1</sup>,  $M_0 \approx 28$  кА·м<sup>-1</sup>.

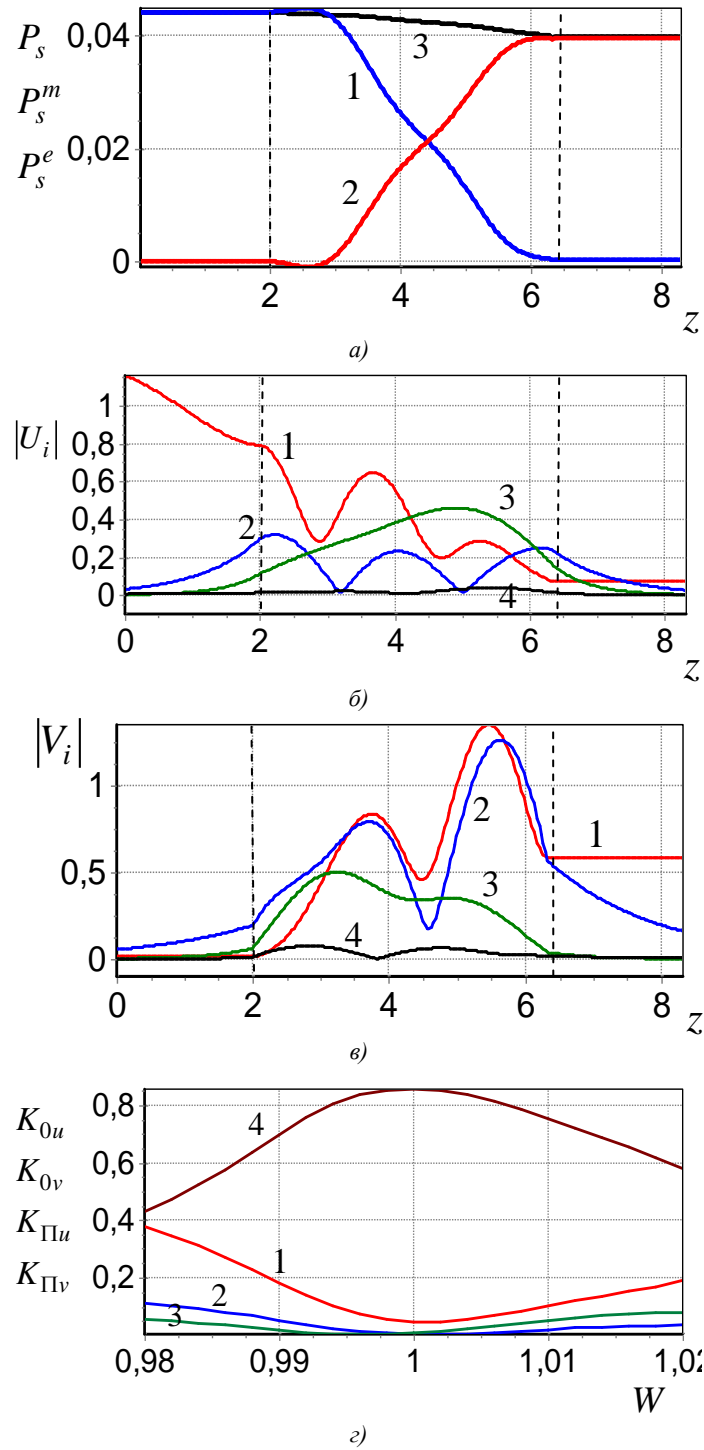


Рис. 2. Характеристики волны при прохождении через перегородку: а) 1 –  $P_s^m$ , 2 –  $P_s^e$ , 3 –  $P_s$ ;

б) 1, 2, 3, 4 –  $|\dot{U}_{1,2,3,4}|$ ; в) 1, 2, 3, 4 –  $|\dot{V}_{1,2,3,4}|$ ; г) 1 –  $K_{0u}$ , 2 –  $K_{0v}$ , 3 –  $K_{\Pi u}$ , 4 –  $K_{\Pi v}$

В данном варианте при КПД преобразования 86 % практически отсутствует проходящая  $H_{01}$ -волна, зато в отраженной волне ее доля составляет примерно 5 %. Пунктиром на рис. 2, *а-в* показаны границы перегородки. Как видно из рис. 2, *а*, в оптимальном режиме мощность падающей  $H_{01}$ -волны внутри перегородки плавно убывает (кривая 1) с одновременным возрастанием мощности  $E_{01}$ -волны (кривая 2). Суммарная мощность (кривая 3) убывает в соответствии с потерями в стенке волновода, которые в данном варианте составляют примерно 9 %. На рис. 2, *б, в* показаны зависимости от  $z$  модулей коэффициентов разложения суммарного поля по мембранным функциям собственных волн регулярного волновода (13), (14), представляющих фактически величины амплитуд парциальных собственных волн  $H_{0i}$ ,  $E_{0i}$  в сечении  $z$ . Первая парциальная волна (с индексом 1) распространяющаяся, остальные – закритические. На рис. 2 видно, что преобразование имеет резонансный характер и сопровождается интенсивным возбуждением закритических мод внутри перегородки. Благодаря переотражению волны от границ перегородки, если ее толщина кратна примерно половине длины волны в волноводе, заполненном диэлектрическим материалом, возможен эффект преобразования при незначительном отражении [15, 17]. В рассмотренном варианте толщина перегородки равна примерно трем полуволнам. Ход кривой 1 перед перегородкой на рис. 2, *б* указывает на наличие отраженной  $H_{01}$ -волны. При более длинном отрезке  $[0 \dots z_1]$  здесь наблюдаются характерные для суммы прямой и встречной волн «биения» амплитуды.

На рис. 2, *г* представлены полосовые характеристики полученного преобразователя симметричных типов волн. Видно, что эффективное преобразование реализуется в полосе примерно 2 %. Однако, если за счет изменения  $H_0$  компенсировать изменение  $W$ , полосу можно существенно расширить.

Рассмотренный выше вариант соответствует случаю  $\Omega_0 < W$ , т. е. частота волны немного превосходит частоту прецессии. В варианте 2 при  $b = 4,73$ ,  $\sigma' = 2 \cdot 10^3$ ,  $W = 1$ ,  $\Omega_0 = 1,17$ ,  $\chi_m = 0,13$ ,  $\epsilon_m = 5$ ,  $L_{12} = 4,24$ ,  $\alpha = -0,41$ ,  $\mu_T = 1,48$  получено  $K_{0u} = 0,057$ ,  $K_{0v} = 0,0008$ ,  $K_{1u} = 0,004$ ,  $K_{1v} = 0,84$ . Например, для частоты волны  $f = \omega/2\pi \cong 10$  ГГц радиус волновода  $b' = 2,36$  см, толщина перегородки  $L'_{12} = 2,12$  см,  $H_0 \approx 332$  кА·м<sup>-1</sup>,  $M_0 \approx 43$  кА·м<sup>-1</sup>.

Как следует из сравнения характеристик преобразования, наблюдается значительное различие в спектрах возбуждаемых парциальных волн. Полоса частот преобразователя варианта 2 увеличена почти вдвое по сравнению с вариантом 1. Потери в стенке составляют примерно 9 %, при том что  $\sigma'$  вдвое больше.

Расчеты показали, что при обратном преобразовании, когда на вход подается  $E_{01}$ -волна, достигаются примерно те же характеристики, однако распределения амплитуд парциальных волн существенно отличаются.

Другой известной гиротропной средой, описываемой тензорами (1), является подмагниченная плазма. Рассмотрим перегородку (см. рис. 1) из плазмы, помещенной в продольное постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$ . По отношению к переменному полю электромагнитной волны материальные тензоры (1) внутри такой плазмы без учета поглощения имеют вид [6, с. 508]

$$\vec{\chi}_e = 0; \vec{\chi}_h = 0; \vec{\mu} = I; \vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_T & -j\beta & 0 \\ j\beta & \epsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_L \end{bmatrix}, \quad (26)$$

где  $\epsilon_T = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{W^2 - \omega_{p0}^2}$ ,  $\beta = \frac{\omega_{p0}^2 \Omega_0}{W(W^2 - \Omega_0^2)}$ ,  $\epsilon_L = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{W^2}$ ,  $\Omega_0 = \frac{\mu_0 |e| H_0}{m \omega_0}$  – относительная частота

Лармора;  $\omega_{p0} = \frac{|e|}{\omega_0} \sqrt{\frac{N}{\epsilon_0 m}}$  – относительная плазменная частота;  $N$  – количество электронов в м<sup>3</sup>. При учете поглощения все матричные коэффициенты будут комплексными.

Расчеты показали, что в преобразователе на основе подмагниченной плазмы может быть достигнут больший КПД, чем в ферритовом.

### Заключение

В статье предложена и реализована численно методика решения краевой задачи дифракции симметричных волн на плоской азимутально-симметричной неоднородной перегородке из специальных бианизотропных материалов в волноводе, которые охватывают широкий круг практически используемых гиротропных материалов. Рассмотрена краевая задача с импедансными граничными условиями на стенке волновода, что позволило исследовать влияние материала стенок волновода на прохождение волн через перегородку. Эффективность данной методики обусловлена сведением векторной задачи для уравнений Максвелла к двумерной краевой задаче для связанной системы двух скалярных эллиптических уравнений, что позволяет решить ее прямым (неитерационным) сеточным методом блочной матричной прогонки. При этом использование однородных разностных схем позволяет достаточно просто реализовать условия на поверхности раздела различных сред. Методика применима для неоднородной перегородки, в частности слоистой, из поглощающих материалов.

Обнаруженный в результате вычислительного эксперимента эффект практически полного преобразования симметричной  $H_{01}$ -волны в  $E_{01}$ -волну и наоборот на перегородках из феррита и подмагниченной плазмы указывает на возможность создания простого и эффективного преобразователя типов симметричных волн круглого волновода на основе композитных материалов. Для толщины перегородки, не превосходящей диаметр волновода, заметное влияние поглощения в стенке начинается со значений  $\sigma'$ , меньших  $10^4$  сим/м. Рассчитанные варианты преобразователей могут найти применение при создании методов измерения параметров гиротропных материалов.

### Список литературы

1. Виноградов, А.П. Электродинамика композитных материалов / А.П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
2. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
3. Потехин, А.И. Излучение и распространение электромагнитных волн в анизотропной среде / А.И. Потехин. – М. : Наука, 1971. – 76 с.
4. Гуляев, Ю.В. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения / Ю.В. Гуляев, А.Н. Лагарьков, С.А. Никитов // Вестник Российской академии наук. – 2008. – Т. 78, № 5. – С. 438–457.
5. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 262 с.
6. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
7. Жук, Н.П. Скаляризация электромагнитного поля в произвольно-анизотропной плоскостойкой среде / Н.П. Жук // Радиотехника и электроника. – 1994. – Т. 39, № 11. – С. 1706–1715.
8. Евельсон, Р.Л. Метод решения задачи о распространении электромагнитных волн в многослойной плоскостойкой поглощающей анизотропной магнитоэлектрической среде / Р.Л. Евельсон // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 8. – С. 918–925.
9. Бодров, В.В. Матрица передачи анизотропного слоя / В.В. Бодров, В.И. Сурков // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40, № 6. – С. 864–869.
10. Ерофеев, В.Т. Решение задачи о прохождении плоских электромагнитных волн через бианизотропную неоднородную пластину / В.Т. Ерофеев, А.К. Сеницын // Информатика. – 2013. – № 2. – С. 11–21.
11. Кураев, А.А. Электродинамика и распространение радиоволн / А.А. Кураев, Т.Л. Попкова, А.К. Сеницын. – М. : Инфра-М, 2013. – 423 с.

12. Курушин, Е.П. Электродинамика анизотропных волноведущих структур / Е.П. Курушин, Е.И. Нефедов. – М. : Наука, 1980. – 223 с.
13. Моденов, В.П. Задача дифракции электромагнитных волн на биизотропном включении в цилиндрическом волноводе / В.П. Моденов, А.В. Ромашин // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т. 10, № 8. – С. 23–28.
14. Каценеленбаум, Б.З. Преобразование линейной поляризации в круговую / Б.З. Каценеленбаум // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55, № 9. – С. 1148.
15. Кураев, А.А. Расчет параметров диэлектрической диафрагмы круглого волновода, не отражающей волну / А.А. Кураев, О.И. Наранович, А.К. Сеницын // Техника и приборы СВЧ. – 2008. – № 1. – С.10–15.
16. Ерофеенко, В.Т. Методика расчета задачи дифракции симметричных волн на биизотропной перегородке в цилиндрическом волноводе / В.Т. Ерофеенко, А.К. Сеницын // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2012. – № 4. – С. 104–110.
17. Ерофеенко, В.Т. Преобразование типов симметричных волн на биизотропной перегородке в цилиндрическом волноводе / В.Т. Ерофеенко, А.К. Сеницын // Радиотехника и электроника. – 2013. – Т. 58, № 7. – С. 670–678.
18. Леонтович, М.А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. Исследования по распространению радиоволн : в двух частях / М.А. Леонтович. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1948. – Ч. 2 – С. 5–12.
19. Аполлонский, С.М. Импедансные граничные условия на анизотропных телах / С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеенко // Электричество. – 1995. – № 4. – С. 68–72.
20. Преображенский, А.П. Импедансные граничные условия в задаче рассеяния электромагнитных волн на полости с радиопоглощающими покрытиями / А.П. Преображенский // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 61–63.
21. Ерофеенко, В.Т. Импедансные граничные условия для краевых задач дифракции на поверхностях многослойных композитных структур / В.Т. Ерофеенко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2011. – № 3. – С. 40–46.
22. Кравченко, В.Ф. Об импедансных граничных условиях Леонтовича, учитывающих кривизну поверхности / В.Ф. Кравченко, В.Т. Ерофеенко // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 11. – С. 1300–1306.
23. Ланеев, Е.Б. Импедансные граничные условия для нестационарной дифракции / Е.Б. Ланеев // Методы вычислительной электродинамики. – М. : Изд-во МГУ, 1981. – С. 93–98.
24. Аполлонский, С.М. Обобщение импедансных граничных условий Леонтовича для нестационарных полей / С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеенко // Электричество. – 1993. – № 12. – С. 64–67.
25. Урев, М.В. Граничные условия для уравнений Максвелла в случае произвольной зависимости от времени / М.В. Урев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1997. – Т. 37, № 12. – С. 1489–1497.
26. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
27. Ерофеенко, В.Т. Моделирование воздействия электромагнитных импульсов на полупространство с помощью интегральных граничных условий / В.Т. Ерофеенко, С.Д. Прийменко // Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях : тр. Междунар. науч.-техн. конф. (КМНТ–2014), Харьков, Украина, 28–31 мая 2014 г. – Харьков : Харьковский нац. ун-т, 2014. – С. 178–140.
28. Наранович, О.И. Решение двумерного уравнения эллиптического типа методом блочной матричной прогонки / О.И. Наранович, А.К. Сеницын // Доклады БГУИР. – 2007. – № 3 (19). – С. 18–23.
29. Свешников, А.Г. Принцип излучения / А.Г. Свешников // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 3, № 5. – С. 517–520.
30. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М., 1979. – 830 с.

31. Малков, Н.А. Гиротропные среды в технике СВЧ / Н.А. Малков. – Тамбов : ТГТУ, 2005. – 80 с.

Поступила 03.06.2014

<sup>1</sup>Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики»,  
Минск, пр. Независимости, 4  
e-mail: [bsu\\_erofeenko@tut.by](mailto:bsu_erofeenko@tut.by)

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,  
Минск, ул. П. Бровки, 6  
e-mail: [sinitsyn@cosmostv.by](mailto:sinitsyn@cosmostv.by)

**V.T. Erofeenko, A.K. Sinitsyn**

**TRANSMISSION OF THE SYMMETRIC WAVES THROUGH  
A BIANISOTROPIC-GYROTROPIC DIAPHRAGM IN THE CIRCULAR  
WAVEGUIDE WITH THE IMPEDANCE BOUNDARY CONDITIONS**

A technique for the solution of the boundary-value problem of transmission of partial symmetric E- and H-polarized waves of a circular regular waveguide that has a perfectly conducting boundary and contains an azimuthing symmetric inhomogeneous diaphragm made from bianisotropic-gyrotropic materials and with a impedance boundary conditions in region of diaphragm is developed. The boundary-value problem reduces to the numerical solution of a system of equations with the partial derivatives for two scalar potentials. Conditions providing for the transformation of  $H_{01}$ -wave into  $E_{01}$ -wave under the transmission through a plane diaphragm having various bianisotropy property and absorption of electromagnetic energy in the wall of waveguide are analyzed.