

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958:537.8

В.Т. Ерофеев, В.Ф. Бондаренко

**ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭКРАНАМИ  
ИЗ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ, СОДЕРЖАЩИХ  
БИИЗОТРОПНЫЕ ЧАСТИЦЫ**

*Разрабатывается методика решения краевой задачи экранирования электромагнитных полей сосредоточенных источников электрических и магнитных диполей однородными магнитодиэлектрическими экранами, содержащими разреженную систему сферических частиц с комплексными диэлектрическими и магнитными проницаемостями и комплексными параметрами биизотропности. Методика основана на алгоритме вычисления эффективных материальных параметров усредненной биизотропной среды, эквивалентной матричному композиту экрана. Вычисляются компоненты поля за экраном для композита с частицами из метаматериала и киральных частиц.*

**Введение**

Экранирование электромагнитных полей является одной из основных проблем электромагнитной совместимости технических средств радиотехники и электроники. Защита высокочувствительных приборов от воздействия внешних электромагнитных излучений может быть решена с помощью создания эффективных экранирующих структур.

В настоящее время большое внимание в научной литературе уделяется исследованиям электродинамических свойств композитных материалов различных типов, классификация которых проводится в работах [1–7]. Композиты представляют собой структурно-неоднородный материал с большим числом структурных включений, отличающихся геометрией, химическим составом и уровнем линейных размеров. К ним относятся метаматериалы, киральные среды, квадрупольные материалы, гранулированные структуры, наноструктурные композиты и др. Один из подходов моделирования электродинамических свойств таких композитов сводится к замене сложных структурно-неоднородных материалов однородными средами, электродинамические свойства которых близки с некоторой точностью к свойствам исходного материала. Данный подход позволяет разработать модель, которая значительно упрощает решение математических задач электродинамики, основанных на более простой модели. Второй подход моделирования, к примеру, основан на методе автономных блоков. В статьях [8–11] разработаны различные методики моделирования композитов, содержащих идеально проводящие спирали и сферические частицы с винтовой проводимостью поверхности, на основе вычисления эффективных параметров композита с помощью метода Максвелла – Гарнетта [12]. Исследуются композитные структуры, содержащие включения других видов: проволоку, разрезанные кольца,  $\Omega$ -включения, рулеты, сегнетоэлектрические кубики и др. [2]. В данной работе разрабатываются методы моделирования композитов с биизотропными однородными сферическими частицами, расположенными в магнитодиэлектрической матрице, с учетом однократного рассеяния полей на частицах [13].

Из композитных материалов изготавливаются технические устройства: однослойные и многослойные экраны, композитные покрытия, нанесенные на поверхностях элементов техники. Исследование экранирующих свойств таких экранов проводится аналитическими и численными методами [14–18].

**1. Постановка задачи**

В пространстве  $R^3$  с электрической и магнитной постоянными  $\epsilon_0, \mu_0$  размещен экран  $D(0 < z < \Delta)$  толщиной  $\Delta$ , ограниченный плоскостями раздела сред  $\Gamma_1(z=0), \Gamma_2(z=\Delta)$ . Экран

заполнен магнитоэлектрической однородной средой, называемой матрицей, которая характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_m = \varepsilon_m \varepsilon_0$ ,  $\mu_m = \mu_m \mu_0$ . В матрице случайным образом распределено большое число сферических частиц радиуса  $R$ , выполненных из биизотропного материала с материальными параметрами  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_r \mu_0$ ,  $G = G_r / c$ ,  $Z = Z_r / c$ . Композит, состоящий из матрицы и частиц другого материала, будем называть матричным композитом [5]. В полупространстве  $D_1 (z < 0)$  в точке  $O_1 (0, 0, -h)$ ,  $h > 0$ , расположен точечный источник, состоящий из суммы электрического и магнитного диполей, ориентированных вдоль оси  $Oz$ . Поле источника будем определять следующими соотношениями, приведенными в [19]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_D &= A \vec{m}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0) + B \vec{n}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0), \\ \vec{H}_D &= h_0 (A \vec{n}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0) + B \vec{m}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $(r_1, \theta_1, \varphi)$  – сферические координаты с началом в точке  $O_1$ ;  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $\omega = 2\pi f$ , – круговая частота;  $c$  – скорость света в вакууме;  $h_0 = \frac{k_0}{i\omega\mu_0}$ ;  $A, B$  – постоянные.

При  $A = 0, B \neq 0$  имеем электрический диполь, при  $A \neq 0, B = 0$  – магнитный диполь.

В результате взаимодействия первичного поля (1) с экраном  $D$  образуются результирующие электромагнитные поля: в области  $D_1$  – отраженное поле  $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1$  и суммарное поле  $\vec{E}_1 = \vec{E}_D + \vec{E}'_1$ ,  $\vec{H}_1 = \vec{H}_D + \vec{H}'_1$ ; в слое  $D$  – поле  $\vec{E}, \vec{H}$ ; в полупространстве  $D_2 (z > \Delta)$  образуется поле  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , прошедшее через экран  $D$ . Экран представляет собой неоднородную среду, поэтому для упрощения модели неоднородную среду экрана заменим на однородную усредненную биизотропную среду с материальными параметрами  $\varepsilon_{\text{эф}} = \varepsilon_3 \varepsilon_0$ ,  $\mu_{\text{эф}} = \mu_3 \mu_0$ ,  $G_{\text{эф}} = G_3 / c$ ,  $Z_{\text{эф}} = Z_3 / c$ . Для экрана с эффективными параметрами сформулируем краевую задачу экранирования поля (1).

**Краевая задача 1.** При заданном поле (1) требуется определить поля  $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1$ ;  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ ;  $\vec{E}, \vec{H}$ , для которых выполнены:

– уравнения поля

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= i\omega(\mu_{\text{эф}} \vec{H} + Z_{\text{эф}} \vec{E}), \quad \text{rot } \vec{H} = -i\omega(\varepsilon_{\text{эф}} \vec{E} + G_{\text{эф}} \vec{H}) \quad \text{в } D, \\ \text{rot } \vec{E}'_1 &= i\omega\mu_0 \vec{H}'_1, \quad \text{rot } \vec{H}'_1 = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}'_1 \quad \text{в } D_1, \\ \text{rot } \vec{E}_2 &= i\omega\mu_0 \vec{H}_2, \quad \text{rot } \vec{H}_2 = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_2 \quad \text{в } D_2; \end{aligned} \quad (2)$$

– граничные условия на плоскостях раздела сред  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$\left. (\vec{E}_{1r} - \vec{E}_r) \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. (\vec{H}_{1r} - \vec{H}_r) \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. (\vec{E}_{2r} - \vec{E}) \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. (\vec{H}_{2r} - \vec{H}) \right|_{\Gamma_2} = 0$$

и условия излучения на бесконечности.

Проблема состоит в вычислении эффективных параметров  $\varepsilon_{\text{эф}}, \mu_{\text{эф}}, G_{\text{эф}}, Z_{\text{эф}}$  для матричного композита. Алгоритм вычисления эффективных параметров для сферических биизотропных частиц, расположенных в вакууме, разработан в работе [20].

## 2. Композит из биизотропных частиц в среде матрицы

В матрице с параметрами  $\varepsilon_m, \mu_m$ , охватывающей пространство  $R^3$ , размещены биизотропные сферические частицы радиуса  $R$ , характеризующиеся материальными параметрами

$\varepsilon, \mu, G, Z$ . Выделим частицу  $D_R (0 \leq r < R)$  с центром  $O$  в начале декартовых координат  $Oxyz$  ( $Or\theta\varphi$  – сферические координаты). Обозначим области:  $D_P (0 \leq r < P)$  – шаровая область достаточно большого радиуса  $P$ ;  $D_{RP} (R < r < P)$  – шаровой слой вокруг частицы  $D_R$ ;  $D_0$  – область между частицами,  $D_0 \subset D_P$ ;  $D_S$  – область внутри  $s$ -й частицы,  $D_P = \bigcup_{S=1}^N D_S \cup D_0$ ,  $D_1 = D_R$ ,  $D_{SP} = D_P / D_S$ . Будем предполагать, что

$$R \ll P \ll \lambda, \quad (3)$$

где  $\lambda$  – длина электромагнитной волны  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ , распространяющейся в вакууме.

Полагаем  $f \leq 10$  ГГц,  $R \leq 4$  мкм,  $P \approx 30R$ ,  $|\varepsilon_m \mu_m| < 10$ .

Введем обозначения:  $N$  – число частиц в области  $D_P$ ;  $V_R = \frac{4\pi}{3} R^3$  – объем частицы;  $V_P$  – объем области  $D_P$ ;  $\nu = \frac{N}{V_P}$  – концентрация частиц (число частиц в единице объема матрицы);  $\tau = \nu V_R$  – объемный коэффициент заполнения матрицы сферическими частицами (суммарный объем сферических частиц в единице объема матрицы).

Построим математическую модель композита из биизотропных сферических частиц, используя теорию биизотропных сред. Для построения модели композит подвергается воздействию электромагнитного поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  и исследуется отраженное поле. Сформулируем вспомогательную краевую задачу дифракции поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  на изолированной частице  $D_R$ , расположенной в среде матрицы [16, 22]. Обозначим:  $D'_R (R < r < \infty)$  – внешняя к шару  $D_R$  область;  $\Gamma (r = R)$  – сферическая поверхность шара. В  $D'_R$  распространяется первичное электромагнитное поле  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ , колеблющееся с круговой частотой  $\omega$  и временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$ . Обозначим поля:  $\vec{E}_R, \vec{H}_R$  – поле внутри шара  $D_R$ ;  $\vec{E}'_R, \vec{H}'_R$  – отраженное поле в  $D'_R$ ;  $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_R$ ,  $\vec{H}_2 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_R$  – суммарное поле в области  $D'_R$ .

**Краевая задача 2.** Для заданного первичного поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  требуется определить электромагнитные поля  $\vec{E}_R, \vec{H}_R \in C^1(D_R) \cap C(\bar{D}_R)$ ,  $\vec{E}'_R, \vec{H}'_R \in C^1(D'_R) \cap C(\bar{D}'_R)$ , которые удовлетворяют:

– уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{E}_R = i\omega(\mu \vec{H}_R + Z \vec{E}_R), \quad \text{rot } \vec{H}_R = -i\omega(\varepsilon \vec{E}_R + G \vec{H}_R), \quad 0 \leq r < R, \quad (4)$$

$$\text{rot } \vec{E}'_R = i\omega \mu_m \vec{H}'_R, \quad \text{rot } \vec{H}'_R = -i\omega \varepsilon_m \vec{E}'_R, \quad r > R; \quad (5)$$

– граничным условиям

$$\vec{E}_{R\tau} \Big|_{r=R} = \vec{E}_{2\tau} \Big|_{r=R}, \quad \vec{H}_{R\tau} \Big|_{r=R} = \vec{H}_{2\tau} \Big|_{r=R} \quad (6)$$

и условиям излучения на бесконечности.

### 3. Решение задачи дифракции волн на биизотропной сферической частице, расположенной в магнитоэлектрической среде

В качестве первичного поля, действующего на частицы, выберем любое монохроматическое электромагнитное поле, которое представим в виде рядов по базисным сферическим полям [16]:

$$\vec{E}_0 = \sum_{n,m} [a_{mn} \vec{m}_{mn}(\vec{r}; k_m) + b_{mn} \vec{n}_{mn}(\vec{r}; k_m)],$$

$$\vec{H}_0 = h_M \sum_{n,m} [a_{mn} \vec{n}_{mn}(\vec{r}; k_M) + b_{mn} \vec{m}_{mn}(\vec{r}; k_M)], \quad (7)$$

где  $a_{mn}, b_{mn}$  – заданные коэффициенты разложений,  $\sum_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$ ,  $h_M = \frac{k_M}{i\omega\mu_M}$ ,

$$\vec{n}_{mn} = f_n(k_M r) Y_n^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + g_n(k_M r) \vec{\Pi}_{mn}(\theta, \varphi), \quad \vec{m}_{mn} = j_n(k_M r) \vec{T}_{mn}(\theta, \varphi), \quad Y_n^m = P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad f_n(k_M r) = \frac{n(n+1)}{k_M r} j_n(k_M r), \quad g_n(k_M r) = \frac{1}{k_M r} \frac{d}{dr} (r j_n(k_M r)), \quad \vec{\Pi}_{mn} = \left( \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{e}_\theta + \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{e}_\varphi \right) e^{im\varphi},$$

$$\vec{T}_{mn} = \left( \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{e}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos\theta) \vec{e}_\varphi \right) e^{im\varphi}, \quad n=1, 2, \dots, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n.$$

Вычислим поле (7) в начале координат:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(0) = \vec{E}_0^0 = E_x^0 \vec{e}_x + E_y^0 \vec{e}_y + E_z^0 \vec{e}_z = -\frac{2}{3} b_{11} \vec{e}_+ - \frac{1}{3} b_{-11} \vec{e}_- + \frac{2}{3} b_{01} \vec{e}_z, \\ \vec{H}_0(0) = \vec{H}_0^0 = H_x^0 \vec{e}_x + H_y^0 \vec{e}_y + H_z^0 \vec{e}_z = -\frac{2h_M}{3} a_{11} \vec{e}_+ - \frac{h_M}{3} a_{-11} \vec{e}_- + \frac{2h_M}{3} a_{01} \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\vec{e}_+ = i\vec{e}_y + \vec{e}_x, \quad \vec{e}_- = i\vec{e}_y - \vec{e}_x, \quad a_{01} = \frac{3}{2h_M} H_z^0, \quad a_{11} = \frac{3}{4h_M} (iH_y^0 - H_x^0), \quad a_{-11} = \frac{3}{2h_M} (iH_y^0 + H_x^0),$$

$$b_{01} = \frac{3}{2} E_z^0, \quad b_{11} = \frac{3}{4} (iE_y^0 - E_x^0), \quad b_{-11} = \frac{3}{2} (iE_y^0 + E_x^0).$$

Отраженное электромагнитное поле выразим через базисные сферические поля, которые удовлетворяют условиям излучения и уравнениям (5):

$$\begin{aligned} \vec{E}'_R = \sum_{n,m} [x_{mn}^{(2)} \vec{\tilde{m}}_{mn}(\vec{r}, k_M) + y_{mn}^{(2)} \vec{\tilde{n}}_{mn}(\vec{r}, k_M)], \quad r > R, \\ \vec{H}'_R = h_M \sum_{n,m} [x_{mn}^{(2)} \vec{\tilde{n}}_{mn}(\vec{r}, k_M) + y_{mn}^{(2)} \vec{\tilde{m}}_{mn}(\vec{r}, k_M)], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\vec{\tilde{n}}_{mn} = f_n^{(1)}(k_M r) Y_n^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + g_n^{(1)}(k_M r) \vec{\Pi}_{mn}(\theta, \varphi), \quad \vec{\tilde{m}}_{mn} = h_n^{(1)}(k_M r) \vec{T}_{mn}(\theta, \varphi),$$

$$f_n^{(1)}(k_M r) = \frac{n(n+1)}{k_M r} h_n^{(1)}(k_M r), \quad g_n^{(1)}(k_M r) = \frac{1}{k_M r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_n^{(1)}(k_M r)).$$

Здесь  $j_n(\cdot)$ ,  $h_n^{(1)}(\cdot)$  – сферические функции Бесселя,  $k_M = \omega \sqrt{\epsilon_M \mu_M}$ ,  $0 \leq \arg k_M < \pi$ .

Электромагнитное поле внутри шара  $D_R$  представим через базисные сферические поля в композитных средах, которые удовлетворяют уравнениям (4):

$$\begin{aligned} \vec{E}_R = \sum_{n,m} [x_{mn}^{(1)} \vec{K}_{mn}^{(1)}(\vec{r}, k_1) + y_{mn}^{(1)} \vec{K}_{mn}^{(2)}(\vec{r}, k_2)], \quad 0 \leq r < R, \\ \vec{H}_R = \sum_{n,m} [x_{mn}^{(1)} p_1 \vec{K}_{mn}^{(1)}(\vec{r}, k_1) + y_{mn}^{(1)} p_2 \vec{K}_{mn}^{(2)}(\vec{r}, k_2)], \end{aligned} \quad (10)$$

где коэффициенты  $x_{mn}^{(1)}, y_{mn}^{(1)}, x_{mn}^{(2)}, y_{mn}^{(2)}$  определены в работе [16, с. 275];  
 $\vec{K}_{mn}^{(j)} = \vec{n}_{mn}(\vec{r}, k_j) - q_j \vec{m}_{mn}(\vec{r}, k_j)$ ,  $k_j = \sqrt{g + \frac{1}{2}a^2 + af_j}$ ,  $0 \leq \arg k_j < \pi$ ,  $q_j = \frac{g}{k_j g_j}$ ,  $p_j = \frac{1}{\mu} \left( \frac{ig}{\omega g_j} - Z \right)$ ,  
 $f_j = (-1)^j f_0$ ,  $f_0 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - b^2}$ ,  $0 \leq \arg f_0 < \pi$ ,  $g = \omega^2 (\varepsilon \mu - ZG)$ ,  $g_j = f_j - \frac{1}{2}a$ ,  $a = i\omega(G - Z)$ ,  
 $b = \frac{\omega}{2}(G + Z)$ ,  $j = 1, 2$ .

Удовлетворяя граничным условиям (6), получим систему алгебраических уравнений относительно  $x_{mn}^{(1)}, y_{mn}^{(1)}, x_{mn}^{(2)}, y_{mn}^{(2)}$ :

$$x_{mn}^{(2)} h_n^{(1)}(\xi_M) + a_{mn} j_n(\xi_M) = -x_{mn}^{(1)} q_1 j_n(\xi_1) - y_{mn}^{(1)} q_2 j_n(\xi_2); \quad (11)$$

$$x_{mn}^{(2)} g_n^{(1)}(\xi_M) + a_{mn} g_n(\xi_M) = x_{mn}^{(1)} \bar{p}_1 g_n(\xi_1) + y_{mn}^{(1)} \bar{p}_2 g_n(\xi_2); \quad (12)$$

$$y_{mn}^{(2)} h_n^{(1)}(\xi_M) + b_{mn} j_n(\xi_M) = -x_{mn}^{(1)} \bar{p}_1 q_1 j_n(\xi_1) - y_{mn}^{(1)} \bar{p}_2 q_2 j_n(\xi_2); \quad (13)$$

$$y_{mn}^{(2)} g_n^{(1)}(\xi_M) + b_{mn} g_n(\xi_M) = x_{mn}^{(1)} g_n(\xi_1) + y_{mn}^{(1)} g_n(\xi_2), \quad (14)$$

где  $\bar{p}_j = p_j / h_m$ ,  $\xi_j = k_j R$ ,  $\xi_M = k_M R$ .

Из уравнения (11) с помощью (12) исключим  $x_{mn}^{(2)}$ , а из уравнения (13) с помощью (14) исключим  $y_{mn}^{(2)}$ . Получим систему

$$x_{mn}^{(1)} \left( \bar{p}_1 g_n(\xi_1) h_n^{(1)}(\xi_M) + q_1 j_n(\xi_1) g_n^{(1)}(\xi_M) \right) + y_{mn}^{(1)} \left( \bar{p}_2 g_n(\xi_2) h_n^{(1)}(\xi_M) + q_2 j_n(\xi_2) g_n^{(1)}(\xi_M) \right) = \frac{a_{mn}}{i \xi_M^2}, \quad (15)$$

$$x_{mn}^{(1)} \left( g_n(\xi_1) h_n^{(1)}(\xi_M) + \bar{p}_1 q_1 j_n(\xi_1) g_n^{(1)}(\xi_M) \right) + y_{mn}^{(1)} \left( g_n(\xi_2) h_n^{(1)}(\xi_M) + \bar{p}_2 q_2 j_n(\xi_2) g_n^{(1)}(\xi_M) \right) = \frac{b_{mn}}{i \xi_M^2}.$$

Запишем системы уравнений (11), (13), (15) в матричном виде, полагая  $n = 1$ :

$$\vec{X}_m^{(2)} = - \left( j_1(\xi_M) \hat{E} \vec{a}_m + \hat{Q} \vec{X}_m^{(1)} \right) / h_1^{(1)}(\xi_M), \quad (16)$$

$$i \xi_M^2 \hat{P} \vec{X}_m^{(1)} = \vec{a}_m, \quad (17)$$

где

$$\vec{X}_m^{(j)} = \begin{pmatrix} x_{m1}^{(j)} \\ y_{m1}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

$$q_{11} = q_1 j_1(\xi_1), \quad q_{12} = q_2 j_1(\xi_2), \quad q_{21} = \bar{p}_1 q_1 j_1(\xi_1), \quad q_{22} = \bar{p}_2 q_2 j_1(\xi_2);$$

$$p_{11} = \bar{p}_1 g_1(\xi_1) h_1^{(1)}(\xi_M) + q_1 j_1(\xi_1) g_1^{(1)}(\xi_M), \quad p_{12} = \bar{p}_2 g_1(\xi_2) h_1^{(1)}(\xi_M) + q_2 j_1(\xi_2) g_1^{(1)}(\xi_M), \quad (18)$$

$$p_{21} = g_1(\xi_1) h_1^{(1)}(\xi_M) + \bar{p}_1 q_1 j_1(\xi_1) g_1^{(1)}(\xi_M), \quad p_{22} = g_1(\xi_2) h_1^{(1)}(\xi_M) + \bar{p}_2 q_2 j_1(\xi_2) g_1^{(1)}(\xi_M).$$

Подставив (17) в (16), получим соотношения

$$\vec{X}_m^{(2)} = -\hat{K} \vec{X}_m^{(1)}, \quad \hat{K} = \left( i \xi_M^2 j_1(\xi_M) \hat{P} + \hat{Q} \right) / h_1^{(1)}(\xi_M), \quad m = 0, \pm 1. \quad (19)$$

#### 4. Вычисление специальных интегралов

Вычислим вспомогательные интегралы вида

$$\begin{aligned}\vec{J}_{mn}^Y &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi, & \vec{J}_{mn}^\Pi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{\Pi}_{mn}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi, \\ \vec{J}_{mn}^T &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{T}_{mn}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi, & n &= 1, 2, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n.\end{aligned}$$

**Лемма 1.** Имеют место формулы

$$\begin{aligned}\vec{J}_{mn}^T &= 0 \text{ при } n=1, 2, \dots; \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n; \\ \vec{J}_{mn}^{Y, \Pi} &= 0 \text{ при } n \geq 2; \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n; \\ \vec{J}_{01}^Y &= \frac{4\pi}{3} \vec{e}_z, \quad \vec{J}_{01}^\Pi = \frac{8\pi}{3} \vec{e}_z, \quad \vec{J}_{11}^Y = -\frac{4\pi}{3} \vec{e}_+, \quad \vec{J}_{11}^\Pi = -\frac{8\pi}{3} \vec{e}_+, \quad \vec{J}_{-11}^Y = -\frac{2\pi}{3} \vec{e}_-, \quad \vec{J}_{-11}^\Pi = -\frac{4\pi}{3} \vec{e}_-.\end{aligned}\tag{20}$$

**Лемма 2.** Объемные интегралы

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{mn}^\Pi &= \int_{D_{RP}} \tilde{n}_{mn}(\vec{r}, k_M) dV = \int_R^P \left( f_n^{(1)}(k_M r) \vec{J}_{mn}^Y + g_n^{(1)}(k_M r) \vec{J}_{mn}^\Pi \right) r^2 dr, \\ \tilde{I}_{mn}^T &= \int_{D_{RP}} \tilde{m}_{mn}(\vec{r}, k_M) dV = \int_R^P h_n^{(1)}(k_M r) \vec{J}_{mn}^T r^2 dr\end{aligned}$$

вычисляются с помощью формул

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{mn}^T &= 0 \text{ при } n=1, 2, \dots; \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n; \\ \tilde{I}_{mn}^\Pi &= 0 \text{ при } n \geq 2; \quad m=0, \pm 1, \dots \pm n; \\ \tilde{I}_{01}^\Pi &= -2f_M \vec{e}_z, \quad \tilde{I}_{11}^\Pi = 2f_M \vec{e}_+, \quad \tilde{I}_{-11}^\Pi = f_M \vec{e}_-, \end{aligned}\tag{21}$$

где в асимптотическом приближении

$$f_M = \frac{V_R}{\xi_M} h_1^{(1)}(\xi_M) + \frac{4\pi i}{3k_M^3}.$$

**Доказательство.** Для доказательства используются формулы (20). Для примера вычислим интеграл

$$\tilde{I}_{01}^\Pi = \frac{4\pi}{3} \int_R^P \left( f_1^{(1)}(k_M r) + 2g_1^{(1)}(k_M r) \right) r^2 dr \vec{e}_z = -2f_M \vec{e}_z,$$

где

$$f_M = -\frac{4\pi}{3k_M} \int_R^P \left( h_1^{(1)}(k_M r) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r h_1^{(1)}(k_M r) \right) \right) r dr = \frac{4\pi}{3k_M} \left( R^2 h_1^{(1)}(k_M R) - P^2 h_1^{(1)}(k_M P) \right).$$

Преобразуем величину  $f_M$ , учитывая допущение (3). Для сферической функции Ханкеля имеем асимптотическую формулу при  $k_M P \ll 1$ :

$$h_1^{(1)}(k_M P) = -\left( \frac{1}{k_M P} + \frac{i}{(k_M P)^2} \right) e^{ik_M P} \approx -\frac{i}{(k_M P)^2}.$$

В результате  $f_m \approx \frac{V_R}{\xi} h_1^{(1)}(\xi_M) + \frac{4\pi i}{3k_M^3}$ .

**Лемма 3.** Объемные интегралы

$$\begin{aligned}\bar{I}_{mn}^{\Pi}(k_j) &= \int_{D_R} \bar{n}_{mn}(\vec{r}, k_j) dV = \int_0^R (f_n(k_j r) \bar{J}_{mn}^Y + g_n(k_j r) \bar{J}_{mn}^{\Pi}) r^2 dr, \\ \bar{I}_{mn}^{\Gamma}(k_j) &= \int_{D_R} \bar{m}_{mn}(\vec{r}, k_j) dV = \int_0^R j_n(k_j r) \bar{J}_{mn}^{\Gamma} r^2 dr\end{aligned}$$

вычисляются с помощью формул

$$\bar{I}_{mn}^{\Gamma}(k_j) = 0 \text{ при } n = 1, 2, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm n; \quad (22)$$

$$\bar{I}_{mn}^{\Pi}(k_j) = 0 \text{ при } n \geq 2; \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm n;$$

$$\bar{I}_{01}^{\Pi}(k_j) = 2F_j \vec{e}_z, \quad \bar{I}_{11}^{\Pi}(k_j) = -2F_j \vec{e}_+, \quad \bar{I}_{-11}^{\Pi}(k_j) = -F_j \vec{e}_-,$$

где  $F_j = \frac{V_R}{\xi} j_1(\xi_j)$ ,  $j = 1, 2$ .

**Лемма 4.** Имеет место приближенная формула

$$I = \frac{1}{V_P} \sum_{s=1}^N \Phi(\vec{r}_s) \approx \nu G_P, \quad (23)$$

где  $G_P = \frac{3}{k_M P} j_1(k_M P)$ ,  $\Phi(\vec{r}) = \exp(ik_M(\vec{p}, \vec{r}))$ ,  $\vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$  – координаты центра частицы  $D_s$ ,  $\vec{p} = (\cos \varphi_0 \sin \theta_0, \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0)$ .

Доказательство. Сумму значений функции будем рассматривать как интегральную сумму. Число точек велико, и они равномерно заполняют всю область  $D_P$ . Поэтому

$$I \approx \frac{V}{V_P} \iiint_{D_P} \Phi(\vec{r}) dV = \frac{V}{V_P} \int_0^P \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\vec{r}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся теоремой сложения [21; с.177; 513.1.3]

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(-)} j_n(k_M r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}I &= \frac{V}{V_P} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(-)} \int_0^P j_n(k_M r) r^2 dr \int_0^{\pi} P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} d\varphi = \\ &= 2\pi \frac{V}{V_P} \sum_{n=0}^{\infty} A_{0n}^{(-)} \int_0^P j_n(k_M r) r^2 dr \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{4\pi V}{V_P} \int_0^P j_0(k_M r) r^2 dr = \frac{4\pi V}{k_M V_P} P^2 j_1(k_M P) = \nu G_P.\end{aligned}$$

Здесь использовалось условие ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_0^{\pi} P_0(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\delta_{0n}.$$

### 5. Усредненные электрические и магнитные поля в композите

В результате взаимодействия поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  с частицами  $D_s$  в матрице образуются отраженные поля  $\vec{E}'_s, \vec{H}'_s$  и поля  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ , проникшие внутрь частиц  $D_s$ . Вычислим суммарные поля в области  $D_p$ :

$$\vec{E}_{\text{сум}} = \begin{cases} \vec{E}_0 + \sum_{s=1}^N \vec{E}'_s & \text{в } D_0; \\ \vec{E}_s & \text{в } D_s, \end{cases} \quad \vec{H}_{\text{сум}} = \begin{cases} \vec{H}_0 + \sum_{s=1}^N \vec{H}'_s & \text{в } D_0; \\ \vec{H}_s & \text{в } D_s, \end{cases} \quad (24)$$

где  $N$  – число частиц в области  $D_p$ .

Усредним поля (24) по объему  $D_p$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{V_P} \int_{D_p} \vec{E}_{\text{сум}} dV = \frac{1}{V_P} \left[ \int_{D_p} \vec{E}_0 dV + \sum_{s=1}^N \left( \int_{D_0} \vec{E}'_s dV + \int_{D_s} \vec{E}_s dV - \int_{D_s} \vec{E}_0 dV \right) \right], \\ \vec{H} &= \frac{1}{V_P} \int_{D_p} \vec{H}_{\text{сум}} dV = \frac{1}{V_P} \left[ \int_{D_p} \vec{H}_0 dV + \sum_{s=1}^N \left( \int_{D_0} \vec{H}'_s dV + \int_{D_s} \vec{H}_s dV - \int_{D_s} \vec{H}_0 dV \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Как правило, на практике композит подвергается воздействию плоских электромагнитных волн. Поэтому первичное поле (7) будем моделировать плоской волной, характеризуемой структурой  $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(ik_m(\vec{p} \cdot \vec{r}))$ .

В связи с этим

$$\begin{aligned} \int_{D_s} \vec{E}_0 dV &= \Phi(\vec{r}_s) \int_{D_R} \vec{E}_0 dV, & \int_{D_s} \vec{E}_s dV &= \Phi(\vec{r}_s) \int_{D_R} \vec{E}_R dV, \\ \int_{D_s} \vec{H}_0 dV &= \Phi(\vec{r}_s) \int_{D_R} \vec{H}_0 dV, & \int_{D_s} \vec{H}_s dV &= \Phi(\vec{r}_s) \int_{D_R} \vec{H}_R dV. \end{aligned} \quad (26)$$

Между тем частицы расположены на достаточно больших расстояниях друг от друга по сравнению с размерами самих частиц, а отраженное поле в проводящей среде в дальней зоне, как известно, сильно затухает. Поэтому будем предполагать, что отраженные поля  $\vec{E}'_s, \vec{H}'_s$  с окружающими частицами не взаимодействуют. В результате положим

$$\int_{D_0} \vec{E}'_s dV = \int_{D_{sp}} \vec{E}'_s dV = \Phi(\vec{r}_s) \int_{D_{RP}} \vec{E}'_R dV, \quad \int_{D_0} \vec{H}'_s dV = \int_{D_{sp}} \vec{H}'_s dV = \Phi(\vec{r}_s) \int_{D_{RP}} \vec{H}'_R dV. \quad (27)$$

Поля (25) с учетом формул (23), (26), (27) примут вид

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{V_P} \int_{D_p} \vec{E}_0 dV + vG_P \left( \int_{D_{RP}} \vec{E}'_R dV + \int_{D_R} \vec{E}_R dV - \int_{D_R} \vec{E}_0 dV \right), \\ \vec{H} &= \frac{1}{V_P} \int_{D_p} \vec{H}_0 dV + vG_P \left( \int_{D_{RP}} \vec{H}'_R dV + \int_{D_R} \vec{H}_R dV - \int_{D_R} \vec{H}_0 dV \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Используя разложения полей в ряды (7), (9), (10) и учитывая формулы (21), (22), вычислим интегралы, входящие в (28):

$$\begin{aligned} \int_{D_p} \vec{E}_0 dV &= \sum_{m=-1}^1 b_{m1} \int_{D_p} \vec{n}_{m1}(\vec{r}, k_m) dV = -\frac{V_P G_P}{3} (2b_{11} \vec{e}_+ + b_{-11} \vec{e}_- - 2b_{01} \vec{e}_z), \\ \int_{D_p} \vec{H}_0 dV &= h_m \sum_{m=-1}^1 a_{m1} \int_{D_p} \vec{n}_{m1}(\vec{r}, k_m) dV = -h_m \frac{V_P G_P}{3} (2a_{11} \vec{e}_+ + a_{-11} \vec{e}_- - 2a_{01} \vec{e}_z), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\int_{D_R} \vec{E}_0 dV &= -F_M (2b_{11} \vec{e}_+ + b_{-11} \vec{e}_- - 2b_{01} e_z), \quad F_M = \frac{V_R}{\xi_M} j_1(\xi_M), \\
\int_{D_R} \vec{H}_0 dV &= -h_M F_M (2a_{11} \vec{e}_+ + a_{-11} \vec{e}_- - 2a_{01} e_z), \\
\int_{D_{RP}} \vec{E}'_R dV &= \sum_{m=-1}^1 y_{m1}^{(2)} \int_{D_{RP}} \tilde{n}_{m1}(\vec{r}, k_m) dV = f_M (2y_{11}^{(2)} \vec{e}_+ + y_{-11}^{(2)} \vec{e}_- - 2y_{01}^{(2)} \vec{e}_z), \\
\int_{D_{RP}} \vec{H}'_R dV &= h_M \sum_{m=-1}^1 x_{m1}^{(2)} \int_{D_{RP}} \tilde{n}_{m1}(\vec{r}, k_m) dV = h_M f_M (2x_{11}^{(2)} \vec{e}_+ + x_{-11}^{(2)} \vec{e}_- - 2x_{01}^{(2)} \vec{e}_z), \\
\int_{D_R} \vec{E}_R dV &= \sum_{m=-1}^1 \left( x_{m1}^{(1)} \int_{D_R} \tilde{n}_{m1}(\vec{r}, k_1) dV + y_{m1}^{(1)} \int_{D_R} \tilde{n}_{m1}(\vec{r}, k_2) dV \right) = \\
&= 2(F_1 x_{01}^{(1)} + F_2 y_{01}^{(1)}) \vec{e}_z - 2(F_1 x_{11}^{(1)} + F_2 y_{11}^{(1)}) \vec{e}_+ - (F_1 x_{-11}^{(1)} + F_2 y_{-11}^{(1)}) \vec{e}_-, \\
\int_{D_R} \vec{H}_R dV &= \sum_{m=-1}^1 \left( x_{m1}^{(1)} p_1 \int_{D_R} \tilde{n}_{m1}(\vec{r}, k_1) dV + y_{m1}^{(1)} p_2 \int_{D_R} \tilde{n}_{m1}(\vec{r}, k_2) dV \right) = \\
&= 2(F_1 p_1 x_{01}^{(1)} + F_2 p_2 y_{01}^{(1)}) \vec{e}_z - 2(F_1 p_1 x_{11}^{(1)} + F_2 p_2 y_{11}^{(1)}) \vec{e}_+ - (F_1 p_1 x_{-11}^{(1)} + F_2 p_2 y_{-11}^{(1)}) \vec{e}_-.
\end{aligned} \tag{29}$$

**Теорема 1.** Усредненные по области  $D_p$  в композитном материале со сферическими биизотропными частицами радиуса  $R$ , расположенными в проводящей матрице, электрические и магнитные поля в базисе  $\vec{e}_+$ ,  $\vec{e}_-$ ,  $\vec{e}_z$  при выполнении условий (1), (26), (27) определяются формулами

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -E_- \vec{e}_+ - E_+ \vec{e}_- + E_z \vec{e}_z = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = \\
&= G_p \left[ \left( -\frac{2}{3} \bar{t} b_{11} + 2v (f_M y_{11}^{(2)} - F_1 x_{11}^{(1)} - F_2 y_{11}^{(1)}) \right) \vec{e}_+ + \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{1}{3} \bar{t} b_{-11} + v (f_M y_{-11}^{(2)} - F_1 x_{-11}^{(1)} - F_2 y_{-11}^{(1)}) \right) \vec{e}_- + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{2}{3} \bar{t} b_{01} - 2v (f_M y_{01}^{(2)} - F_1 x_{01}^{(1)} - F_2 y_{01}^{(1)}) \right) \vec{e}_z \right],
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= -H_- \vec{e}_+ - H_+ \vec{e}_- + H_z \vec{e}_z = H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y + H_z \vec{e}_z = \\
&= G_p \left[ \left( -\frac{2\bar{t}}{3} h_M a_{11} + 2v (h_M f_M x_{11}^{(2)} - F_1 p_1 x_{11}^{(1)} - F_2 p_2 y_{11}^{(1)}) \right) \vec{e}_+ + \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{\bar{t}}{3} h_M a_{-11} + v (h_M f_M x_{-11}^{(2)} - F_1 p_1 x_{-11}^{(1)} - F_2 p_2 y_{-11}^{(1)}) \right) \vec{e}_- + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{2\bar{t}}{3} h_M a_{01} - 2v (h_M f_M x_{01}^{(2)} - F_1 p_1 x_{01}^{(1)} - F_2 p_2 y_{01}^{(1)}) \right) \vec{e}_z \right],
\end{aligned}$$

где  $E_+ = \frac{1}{2}(iE_y + E_x)$ ,  $E_- = \frac{1}{2}(iE_y - E_x)$ .

Для доказательства достаточно подставить выражения (29) в формулы (28).

**Следствие 1.** Имеют место матричные соотношения для компонентов полей (30):

$$\vec{V}_+ = \frac{1}{2} G_p \hat{L} \vec{X}_{-1}^{(1)}, \quad \vec{V}_- = G_p \hat{L} \vec{X}_1^{(1)}, \quad \vec{V}_z = G_p \hat{L} \vec{X}_0^{(1)}, \tag{31}$$

где

$$\hat{L} = i \frac{2}{3} \bar{\tau} \bar{\epsilon}_m^2 \hat{H} \hat{P} + 2\nu (f_m \hat{H} \hat{K} + \hat{F}), \quad (32)$$

$$\vec{V}_+ = \begin{pmatrix} E_+ \\ H_+ \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_- = \begin{pmatrix} E_- \\ H_- \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_z = \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ p_1 F_1 & p_2 F_2 \end{pmatrix}.$$

## 6. Усредненные электрическая и магнитная индукции

Запишем суммарные индукции в области  $D_p$ :

$$\vec{D}_{\text{сум}} = \begin{cases} \epsilon_m \left( \vec{E}_0 + \sum_{S=1}^N \vec{E}'_S \right) & \text{в } D_0, \\ \epsilon \vec{E}_S + G \vec{H}_S & \text{в } D_S; \end{cases} \quad \vec{B}_{\text{сум}} = \begin{cases} \mu_m \left( \vec{H}_0 + \sum_{S=1}^N \vec{H}'_S \right) & \text{в } D_0, \\ \mu \vec{H}_S + Z \vec{E}_S & \text{в } D_S. \end{cases}$$

Усредненные индукции определяются формулами

$$\vec{D} = \frac{1}{V_P} \int_{D_p} \vec{D}_{\text{сум}} dV; \quad \vec{B} = \frac{1}{V_P} \int_{D_p} \vec{B}_{\text{сум}} dV.$$

Получим формулы для индукций, аналогичные формулам (25):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{1}{V_P} \left[ \epsilon_m \int_{D_p} \vec{E}_0 dV + \sum_{S=1}^N \left( \epsilon_m \int_{D_0} \vec{E}'_S dV + \int_{D_S} (\epsilon \vec{E}_S + G \vec{H}_S) dV - \epsilon_m \int_{D_0} \vec{E}_0 dV \right) \right]; \\ \vec{B} &= \frac{1}{V_P} \left[ \mu_m \int_{D_p} \vec{H}_0 dV + \sum_{S=1}^N \left( \mu_m \int_{D_0} \vec{H}'_S dV + \int_{D_S} (\mu \vec{H}_S + Z \vec{E}_S) dV - \mu_m \int_{D_0} \vec{H}_0 dV \right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

**Терема 2.** Усредненные по области  $D_p$  в композитном материале со сферическими би-зотропными частицами радиуса  $R$ , расположенными в проводящей матрице, электрическая и магнитная индукции в базисе  $\vec{e}_+$ ,  $\vec{e}_-$ ,  $\vec{e}_z$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -D_- \vec{e}_+ - D_+ \vec{e}_- + D_z \vec{e}_z = D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y + D_z \vec{e}_z = \\ &= G_p \left\{ \left[ -\frac{2}{3} \epsilon_m \bar{\tau} b_{11} + 2\nu (\epsilon_m f_m y_{11}^{(2)} - F_1^{(1)} x_{11}^{(1)} - F_2^{(1)} y_{11}^{(1)}) \right] \vec{e}_+ + \right. \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{3} \epsilon_m \bar{\tau} b_{-11} + \nu (\epsilon_m f_m y_{-11}^{(2)} - F_1^{(1)} x_{-11}^{(1)} - F_2^{(1)} y_{-11}^{(1)}) \right] \vec{e}_- + \\ &\quad \left. + \left[ \frac{2}{3} \epsilon_m \bar{\tau} b_{01} - 2\nu (\epsilon_m f_m y_{01}^{(2)} - F_1^{(1)} x_{01}^{(1)} - F_2^{(1)} y_{01}^{(1)}) \right] \vec{e}_z \right\}; \\ \vec{B} &= -B_- \vec{e}_+ - B_+ \vec{e}_- + B_z \vec{e}_z = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z = \\ &= G_p \left\{ \left[ -\frac{2}{3} \mu_m h_m \bar{\tau} a_{11} + 2\nu (\mu_m h_m f_m x_{11}^{(2)} - F_1^{(2)} x_{11}^{(1)} - F_2^{(2)} y_{11}^{(1)}) \right] \vec{e}_+ + \right. \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{3} \mu_m h_m \bar{\tau} a_{-11} + \nu (\mu_m h_m f_m x_{-11}^{(2)} - F_1^{(2)} x_{-11}^{(1)} - F_2^{(2)} y_{-11}^{(1)}) \right] \vec{e}_- + \\ &\quad \left. + \left[ \frac{2}{3} \mu_m h_m \bar{\tau} a_{01} - 2\nu (\mu_m h_m f_m x_{01}^{(2)} - F_1^{(2)} x_{01}^{(1)} - F_2^{(2)} y_{01}^{(1)}) \right] \vec{e}_z \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $F_1^{(1)} = F_1(\varepsilon + p_1 G)$ ,  $F_2^{(1)} = F_2(\varepsilon + p_2 G)$ ,  $F_1^{(2)} = F_1(Z + p_1 \mu)$ ,  $F_2^{(2)} = F_2(Z + p_2 \mu)$ ,

$$D_+ = \frac{1}{2}(iD_y + D_x), \quad D_- = \frac{1}{2}(iD_y - D_x), \quad B_+ = \frac{1}{2}(iB_y + B_x), \quad B_- = \frac{1}{2}(iB_y - B_x).$$

Для доказательства формул (34) достаточно к разложениям индукции (33) последовательно применить формулы (23), (26), (27), (29).

**Следствие 2.** *Имеют место матричные соотношения для компонентов индукций (34):*

$$\vec{W}_+ = \frac{G_p}{2} \hat{N} \vec{X}_{-1}^{(1)}, \quad \vec{W}_- = G_p \hat{N} \vec{X}_1^{(1)}, \quad \vec{W}_z = G_p \hat{N} \vec{X}_0^{(1)}, \quad (35)$$

где

$$\hat{N} = i \frac{2}{3} \bar{\tau} \varepsilon_m^2 \hat{H}_1 \hat{P} + 2\nu (f_m \hat{H}_1 \hat{K} + \hat{F}_1), \quad (36)$$

$$\vec{W}_+ = \begin{pmatrix} D_+ \\ B_+ \end{pmatrix}, \quad \vec{W}_- = \begin{pmatrix} D_- \\ B_- \end{pmatrix}, \quad \vec{W}_z = \begin{pmatrix} D_z \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_m \\ h_m \mu_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} & F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} & F_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

## 7. Вычисление эффективных материальных параметров композита

Выразим векторы электрической и магнитной индукции (34) через векторы электрической и магнитной напряженностей поля. Воспользуемся формулами (31), получим

$$\vec{X}_{-1}^{(1)} = \frac{2}{G_p} \hat{L}^{-1} \vec{V}_+, \quad \vec{X}_1^{(1)} = \frac{1}{G_p} \hat{L}^{-1} \vec{V}_-, \quad \vec{X}_0^{(1)} = \frac{1}{G_p} \hat{L}^{-1} \vec{V}_z.$$

Подставим данные выражения в (35), тогда

$$\vec{W}_+ = \hat{C} \vec{V}_+, \quad \vec{W}_- = \hat{C} \vec{V}_-, \quad \vec{W}_z = \hat{C} \vec{V}_z, \quad (37)$$

где  $\hat{C} = \hat{N} \hat{L}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$

Запишем (37) покомпонентно в виде

$$D_+ = c_{11} E_+ + c_{12} H_+, \quad D_- = c_{11} E_- + c_{12} H_-; \quad (38)$$

$$B_+ = c_{21} E_+ + c_{22} H_+, \quad B_- = c_{21} E_- + c_{22} H_-; \quad (39)$$

$$D_z = c_{11} E_z + c_{12} H_z, \quad B_z = c_{21} E_z + c_{22} H_z. \quad (40)$$

Складывая и вычитая (38) (аналогично складывая и вычитая (39)), получим

$$\begin{aligned} D_x &= c_{11} E_x + c_{12} H_x, & D_y &= c_{11} E_y + c_{12} H_y; \\ B_x &= c_{21} E_x + c_{22} H_x, & B_y &= c_{21} E_y + c_{22} H_y. \end{aligned} \quad (41)$$

Равенства (40), (41) запишем в векторном виде

$$\vec{D} = c_{11} \vec{E} + c_{12} \vec{H}, \quad \vec{B} = c_{21} \vec{E} + c_{22} \vec{H}. \quad (42)$$

**Теорема 3.** *Композитный материал, состоящий из случайно распределенных биизотропных сферических частиц радиуса  $R$ , описываемых уравнениями Максвелла (3), и заполненный проводящей средой в областях между частицами, является биизотропной средой. Эффективные параметры композита определяются формулами*

$$\varepsilon_{\text{эф}} = c_{11}, \quad G_{\text{эф}} = c_{12}, \quad \mu_{\text{эф}} = c_{22}, \quad Z_{\text{эф}} = c_{21}, \quad (43)$$

где

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \hat{N} \hat{M}, \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

$$n_{11} = \varepsilon_m (p_0 p_{21} + 2\nu F_0 q_{21}) + 2\nu F_1^{(1)},$$

$$n_{12} = \varepsilon_m (p_0 p_{22} + 2\nu F_0 q_{22}) + 2\nu F_2^{(1)},$$

$$n_{21} = \mu_m h_m (p_0 p_{11} + 2\nu F_0 q_{11}) + 2\nu F_1^{(2)},$$

$$n_{22} = \mu_m h_m (p_0 p_{12} + 2\nu F_0 q_{12}) + 2\nu F_2^{(2)},$$

$$m_{11} = h_m (p_0 p_{12} + 2\nu F_0 q_{12}) + 2\nu p_2 F_2,$$

$$m_{12} = -(p_0 p_{22} + 2\nu F_0 q_{22} + 2\nu F_2),$$

$$m_{21} = -h_m (p_0 p_{11} + 2\nu F_0 q_{11}) - 2\nu p_1 F_1,$$

$$m_{22} = p_0 p_{21} + 2\nu F_0 q_{21} + 2\nu F_1,$$

$$F_0 = \frac{V_R}{\xi_m}, \quad p_0 = i \frac{2}{3} \xi_m^2 \left( \bar{\tau} + 3\nu \frac{V_R}{\xi_m} j_1(\xi_m) \right), \quad d = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}, \quad \xi_m = k_m R.$$

Матричные элементы  $p_{js}, q_{js}$  определены в (18).

Доказательство. Сравнивая индукции (42), построенные на основе разработанной методики моделирования, с индукциями уравнений (2), получим формулы (43). Матричные элементы матриц (44) получаем с использованием формул (32), (36), (37), где  $L^{-1} = \frac{1}{d} \hat{M}$ .

## 8. Вычислительный эксперимент

На рис.1 показаны зависимости от  $\tau$  при частоте  $f = 0,3$  ГГц относительных эффективных материальных параметров  $\varepsilon_s = \varepsilon_{эф}/\varepsilon_0$ ,  $\mu_s = \mu_{эф}/\mu_0$ ,  $G_s = cG_{эф}$ ,  $Z_s = cZ_{эф}$  (см. (43)) композита, представляющего собой следующую структуру: в матрице из дважды левостороннего метаматериала ( $\varepsilon_m = -1, \mu_m = -1, G_m = 0, Z_m = 0$ ) размещены сферические частицы радиуса  $R = 4$  мкм из фокусирующего метаматериала с материальными параметрами  $\varepsilon_r = -4, \mu_r = 2, G_r = 3i, Z_r = 3i$  для рис. 1, а и материальными параметрами  $\varepsilon_r = 2 + 6i, \mu_r = -4 - 6i, G_r = -6 + 3i, Z_r = -6 + 3i$  для рис. 1, б. Метаматериал будем называть фокусирующим, если

$$\varepsilon_r = \chi - 1, \quad \mu_r = -(\chi + 1), \quad G_r = Z_r = i\chi \quad \text{или} \quad \varepsilon_r = -(\chi + 1), \quad \mu_r = \chi - 1, \quad G_r = Z_r = i\chi, \quad (44)$$

где  $\chi$  – произвольное комплексное число. Коэффициент заполнения матрицы частицами на графиках изменяется в пределах  $0,001 < \tau < 0,5$ , где  $\tau = 0,5$  в случае, когда соседние частицы практически соприкасаются. На рис. 1, а компоненты  $\text{Im}\varepsilon_s = \text{Im}\mu_s = \text{Re}G_s = \text{Re}Z_s = 0$ .

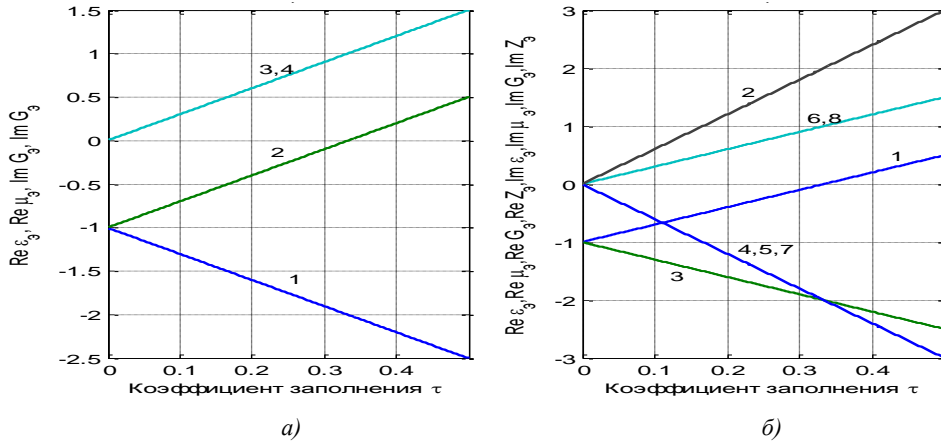


Рис. 1. Эффективные параметры фокусирующих композитов: а) 1 –  $\text{Re}\epsilon_3$ , 2 –  $\text{Re}\mu_3$ , 3 –  $\text{Im}G_3$ , 4 –  $\text{Im}Z_3$ ; б) 1 –  $\text{Re}\epsilon_3$ , 2 –  $\text{Im}\epsilon_3$ , 3 –  $\text{Re}\mu_3$ , 4 –  $\text{Im}\mu_3$ , 5 –  $\text{Re}G_3$ , 6 –  $\text{Im}G_3$ , 7 –  $\text{Re}Z_3$ , 8 –  $\text{Im}Z_3$

Численно показано, что эффективные параметры с достаточно малой погрешностью являются фокусирующими (44).

На рис. 2 изображено поведение на различных частотах эффективных материальных параметров композита, состоящего из магнитодиэлектрической матрицы с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_m = 2 + i$ ,  $\mu_m = -3$  и сферическими биизотропными частицами радиуса  $R = 4$  мкм с комплексными материальными параметрами  $\epsilon_r = -3 + 5i$ ,  $\mu_r = 2 - i$ ,  $G_r = 5 + 4i$ ,  $Z_r = 4 - 4i$ .

Сравнение графиков на различных частотах показывает, что в пределах  $10 \text{ МГц} < f < 2 \text{ ТГц}$  графики практически не изменяются. В пределах частот  $2 \text{ ТГц} < f < 4 \text{ ТГц}$  происходит изменение картины поведения линий. Это связано с тем, что отношение длины волны и радиуса частицы при  $f = 2 \text{ ТГц} - \frac{\lambda}{R} = 37,5$ , при  $f = 4 \text{ ТГц} - \frac{\lambda}{R} = 18,75$ , т. е. начинает нарушаться условие модели (3), для которого  $\frac{\lambda}{R} > 30$ .

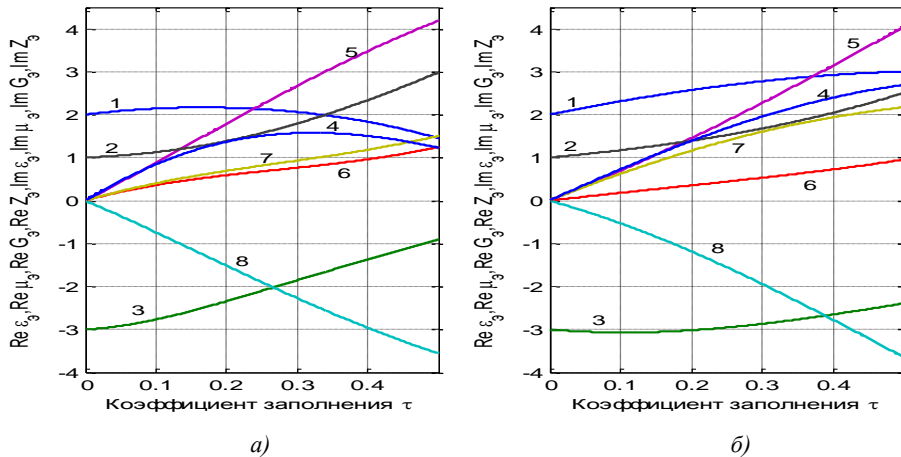


Рис. 2. Эффективные параметры композита с произвольными материальными параметрами матрицы и биизотропных частиц: а)  $f = 10 \text{ МГц}$ ; б)  $f = 4 \text{ ТГц}$ ; 1 –  $\text{Re}\epsilon_3$ , 2 –  $\text{Im}\epsilon_3$ , 3 –  $\text{Re}\mu_3$ , 4 –  $\text{Im}\mu_3$ , 5 –  $\text{Re}G_3$ , 6 –  $\text{Im}G_3$ , 7 –  $\text{Re}Z_3$ , 8 –  $\text{Im}Z_3$

На рис. 3, а показаны зависимости от координаты  $\rho$  поля за экраном  $D$  с параметрами  $\epsilon_m = 1$ ,  $\mu_m = 1$  (вакуум) толщины  $\Delta = 0,05$  м, содержащим киральные сферические частицы радиуса  $R = 4$  мкм с материальными параметрами

$$\varepsilon_r = 4, \quad \mu_r = 1, \quad G_r = 0,5i, \quad Z_r = -0,5i \quad (45)$$

и с коэффициентом заполнения  $\tau = 0,3$ . Вычисляются компоненты поля на плоскости  $z = 0,4$  м при воздействии на экран поля магнитного диполя (1) с параметрами  $f = 3$  ГГц,  $A = 1, B = 0, h = 0,1$  м.

Заметим, что на рис. 2 при уменьшении коэффициента заполнения  $\tau$  эффективные параметры композита приближаются к материальным параметрам матрицы, так как материал матрицы преобладает в композите с малым числом частиц. С другой стороны, в случае увеличения коэффициента  $\tau$  эффективные параметры приближаются к значениям материальных параметров частиц, так как влияние частиц в композите увеличивается.

На рис. 3, а показано, что график 1 уменьшается на малую величину в сравнении с графиком 1 на рис. 1, а статьи [19], который изображает поле диполя без экрана. Это означает, что поле магнитного диполя практически полностью проходит через экран с частицами, малая часть поля преобразуется в поле электрического диполя за экраном (см. рис. 1, а, графики 2 и 3).

Заметим, что в статье [19, рис. 1] рассмотрен экран  $D$ , который полностью заполнен киральной средой с параметрами (45), при воздействии поля магнитного диполя с аналогичными параметрами.

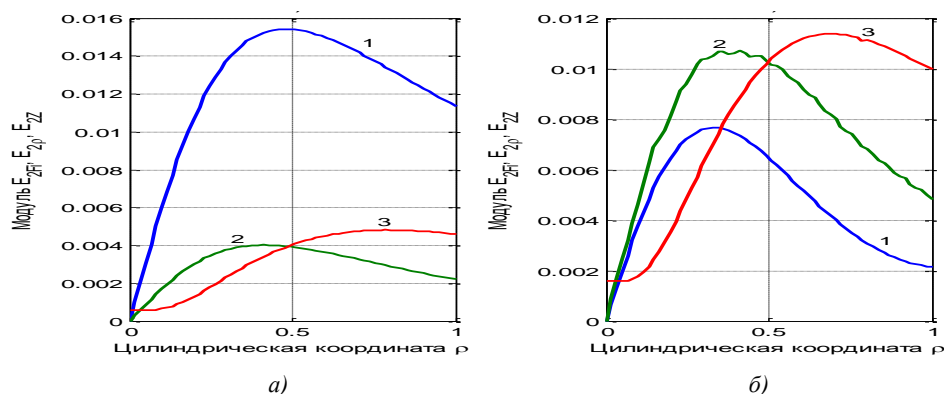


Рис. 3. Прохождение поля магнитного диполя через композитный экран с киральными частицами: а)  $G_r = 0,5i, Z_r = -0,5i$ ; б)  $G_r = 1,5i, Z_r = -1,5i$

Обозначим  $G_r = ki, Z_r = -ki$ , где  $k$  – киральность. На рис. 3, б рассмотрен случай, когда киральность частиц увеличена в три раза по сравнению с частицами на рис. 3, а. Показано, что поле магнитного диполя за экраном уменьшилось в два раза (рис. 3, б, график 1), а поле электрического диполя за экраном увеличилось в 2,4 раза (рис. 3, б, графики 2 и 3) по сравнению с рис. 3, а.

### Заключение

Разработан алгоритм вычисления эффективных материальных параметров композита, состоящего из случайно распределенных в магнитоэлектрической матрице сферических биизотропных частиц. Эффективные параметры описывают усредненную однородную биизотропную среду, эквивалентную исходному дискретно-неоднородному матричному композиту. Показано, что композит, содержащий в матрице из метаматериала частицы из биизотропных фокусирующих материалов, имеет фокусирующие эффективные параметры среды. На основе использования эффективных параметров разработана методика решения краевой задачи проникновения электромагнитных полей диполей через плоский экран из матричного композита. Численно исследована структура поля, прошедшего через экран, в зависимости от параметров частиц композита.

**Список литературы**

1. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин [и др.]. – М. : Акад. естествознания, 2006. – 296 с.
2. Лагарьков, А.Н. Радиопоглощающие материалы на основе метаматериалов / А.Н. Лагарьков, В.Н. Кисель, В.Н. Семененко // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 10. – С. 1119–1127.
3. Cui, Tie Jun. Metamaterials. Theory, Design and Applications / Tie Jun Cui, D.R. Smith, R. Lui. – Springer, 2009. – 367 p.
4. Неганов, В.А. Современное состояние электродинамики искусственных киральных сред (обзор) / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 7–33.
5. Наноматериалы и нанотехнологии / В.М. Анищик [и др.]. – Минск : Изд. центр БГУ, 2008. – 373с.
6. Федосюк, В.М. Наноструктурные пленки и нанопроволоки / В.М. Федосюк. – Минск : Издательский центр БГУ, 2006. – 310 с.
7. Памятных, Е.А. Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях / Е.А. Памятных, Е.А. Туров. – М. : Наука. Физматлит, 2000. – 240 с.
8. Guerin, F. Scattering of electromagnetic waves by helices and application to the modeling of chiral composites / F. Guerin // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1995. – Vol. 28. – P. 623–642.
9. Демидчик, В.И. Математическое моделирование характеристик рассеяния проволочных частиц произвольной конфигурации и композитных материалов на их основе / В.И. Демидчик, Р.В. Корнеев, П.Д. Кухарчик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 38–41.
10. Шатров, А.Д. Модель биизотропной среды из резонансных сферических частиц с идеальной смешанной проводимостью поверхности вдоль спиральных линий / А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 10. – С. 1168–1170.
11. Костин, М.В. К теории киральной среды на основе сферических спирально проводящих частиц / М.В. Костин, В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника – 1998. – Т. 43, № 8. – С. 921–926.
12. Виноградов, А.П. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов / А.П. Виноградов, А.В. Дорофеев, С. Зухди // Успехи физических наук. – 2008. – Т. 178, № 5. – С. 514–518.
13. Исимару, А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. Однократное рассеяние / А. Исимару. – М. : Мир, 1981. – Т. 1. – 280 с.
14. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 262 с.
15. Ерофеевко, В.Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоскостойкой структуре из биизотропных материалов / В.Т. Ерофеевко, С.В. Малый // Информатика. – 2012. – № 1 (33). – С. 58–65.
16. Ерофеевко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеевко, И.С. Козловская. – М. : КД Либроком, 2014. – 304 с.
17. Ерофеевко, В.Т. Решение задачи о прохождении плоских электромагнитных волн через бианизотропную неоднородную пластину / В.Т. Ерофеевко, А.К. Сеницын // Информатика. – 2013. – № 2. – С. 11–21.
18. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В.Т. Ерофеевко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.
19. Ерофеевко, В.Т. Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном / В.Т. Ерофеевко, В.Ф. Бондаренко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2013. – № 4. – С. 113–120.
20. Ерофеевко, В.Т. Электродинамическая модель расчета эффективных параметров композитов из сферических биизотропных частиц / В.Т. Ерофеевко // Информатика. – 2014. – № 1 (41). – С. 45–58.

21. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 256 с.

22. Engheta, N. Antenna radiation in the presence of a chiral sphere / N. Engheta, M.W. Kowarz // J. Appl. Phys. – 1990. – Vol. 67 (2). – P. 639–647.

Поступила 15.04.2014

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем  
математики и информатики»,  
Минск, пр. Независимости, 4  
e-mail: bsu\_erofeenko@tut.by*

**V.T. Erofeenko, V.F. Bondarenko**

**SCREENING ELECTROMAGNETIC FIELDS BY MEANS OF SCREENS  
FROM MATRIX COMPOSITES, CONTAINING BIISOTROPIC FRACTIONS**

A procedure for solution of the boundary-value problem of screening electromagnetic fields of concentrated sources of electrical and magnetic dipoles by means of homogeneous magnetodielectric screens, containing sparse system of spherical fractions with complex permeability and permittivity and complex parameters of biisotropy, is developed. The procedure is based on the algorithm of effective material parameters calculation for averaged biisotropic medium equivalent to matrix composite of the screen. The components of the field beyond the screen for composite with fractions from metamaterials and chiral particles are calculated.