

УДК 004.925.8

А.П. Побегайло

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙН-ПОВЕРХНОСТЕЙ БЭЗЬЕ НА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ КРИВЫХ

Рассматривается подход к моделированию интерполяционных сплайн-поверхностей на четырехугольных сетках кривых. Клетка поверхности моделируется посредством смешивания своих границ при помощи специальных полиномов, что влечет локальную зависимость геометрических свойств поверхности от границ клеток. Если границы клетки поверхности определяются посредством кривых Бэзье, то клетка поверхности является поверхностью Бэзье. Требуемая непрерывность поверхности обеспечивается выбором полинома подходящей степени. Представленный подход предназначен для моделирования сплайн-поверхностей в таких приложениях, как компьютерная графика и геометрическое моделирование.

Введение

Моделирование сплайн-поверхностей на четырехугольных сетках кривых находит применение в различных областях прикладной математики. В научной литературе широко освещены вопросы, связанные с данной тематикой. Так, геометрические основы методов построения интерполяционных кривых и поверхностей представлены в работе [1]. Классификация алгоритмов для моделирования интерполирующих поверхностей с локальными свойствами приведена в работе [2]. Обзор методов моделирования параметрических поверхностей посредством смешивания их границ дан в работе [3]. Метод построения куска поверхности посредством билинейной интерполяции его границ предложен Кунсом в работе [4]. Современное изложение этого метода дано в работе Форреста [5] и рассмотрено также в монографии Фокса и Пратта [6]. Построение интерполяционных сплайн-поверхностей с использованием сеток кривых впервые было предложено Гордоном в работе [7]. Построение интерполирующих поверхностей посредством линейной интерполяции также рассмотрено в статье [8]. Представленный подход к моделированию сплайн-поверхностей может рассматриваться как развитие методов Кунса и Гордона.

1. Сглаживающие полиномы

Для моделирования сплайн-поверхностей с локальными свойствами будут использоваться полиномы

$$w_n(u) = \sum_{i=n}^{2n-1} b_{2n+1,i}(u), \quad u \in [0,1], \quad (1)$$

где $b_{n,m}(u)$ обозначают полиномы Бернштейна $b_{n,m}(u) = C_n^m (1-u)^{n-m} u^m$.

Из формулы (1) следует, что полиномы $w_n(u)$ имеют граничные значения

$$w_n(0) = 0, \quad w_n(1) = 1, \quad (2)$$

а их производные удовлетворяют граничным условиям

$$w_n^{(m)}(0) = w_n^{(m)}(1) = 0, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (3)$$

Из свойства полиномов Бернштейна

$$\sum_{m=0}^n b_{n,m}(u) = 1, \quad \forall u \in [0, 1],$$

следует, что

$$w_n(u) + w_n(1-u) = 1, \quad w_n(u) + w_n(1-u) = 1.$$

Кроме того, для любого значения $n \in N$ полином $w_n(u)$ является минимумом функционала

$$J_n(f) = \int_0^1 |f^{(n)}(u)|^2 du,$$

где функция $f(u)$, $u \in [0, 1]$, удовлетворяет граничным условиям (2) и (3). Подробно полиномы $w_n(u)$ и их свойства рассмотрены в статье [9].

2. Моделирование кусков поверхностей по их границам

Моделирование четырехугольных кусков поверхностей по их границам с использованием билинейной интерполяции впервые было предложено Кунсом [4]. Представленный в данной статье подход к моделированию четырехугольных кусков поверхности по их границам может рассматриваться как обобщение этого метода. Концептуально такой подход был представлен автором на конференции [10].

Рассмотрим четыре параметризованные кривые $p_0(u)$, $p_1(u)$, $u \in [0, 1]$, и $q_0(v)$, $q_1(v)$, $v \in [0, 1]$ (рис. 1), которые имеют общие граничные точки

$$p_0(0) = q_0(0) = r_{0,0}, \quad p_0(1) = q_1(0) = r_{1,0}, \quad p_1(0) = q_0(1) = r_{0,1}, \quad p_1(1) = q_1(1) = r_{1,1}. \quad (4)$$

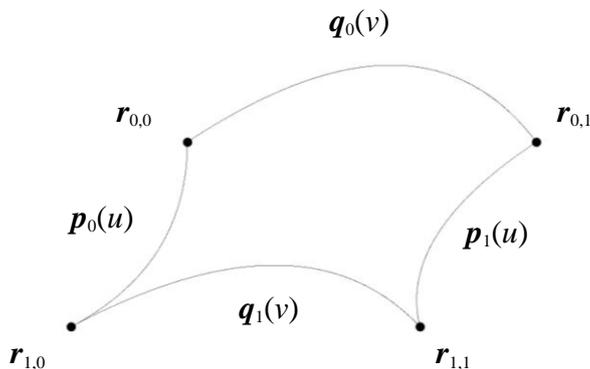


Рис. 1. Конфигурация границ четырехугольного куска поверхности

Задача состоит в том, чтобы построить кусок параметризованной поверхности $r(u, v)$, $u, v \in [0, 1]$, границами которой являются заданные кривые:

$$r(u, 0) = p_0(u), \quad r(0, v) = q_0(v), \quad r(u, 1) = p_1(u), \quad r(1, v) = q_1(v). \quad (5)$$

Кроме того, эта поверхность удовлетворяет следующим условиям на частные производные в угловых точках поверхности:

$$\frac{\partial^m r(u, v)}{\partial u^m}(0, 0) = (p_0^{(m)}(u))(0), \quad \frac{\partial^m r(u, v)}{\partial v^m}(0, 0) = (q_0^{(m)}(v))(0); \quad (6)$$

$$\frac{\partial^m r(u, v)}{\partial u^m}(0, 1) = (p_1^{(m)}(u))(0), \quad \frac{\partial^m r(u, v)}{\partial v^m}(0, 1) = (q_0^{(m)}(v))(1); \quad (7)$$

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^m} (1, 0) = (\mathbf{p}_0^{(m)}(u))(1), \quad \frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^m} (1, 0) = (\mathbf{q}_1^{(m)}(v))(0); \quad (8)$$

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^m} (1, 1) = (\mathbf{p}_1^{(m)}(u))(1), \quad \frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^m} (1, 1) = (\mathbf{q}_1^{(m)}(v))(1); \quad (9)$$

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} (0, 0) = \frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} (0, 1) = \frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} (1, 0) = \frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} (1, 1) = 0 \quad (10)$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in N$, где $s + r = m$.

Для решения поставленной задачи определим требуемую поверхность $\mathbf{r}(u, v)$ следующим образом:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{s}(u, v) - \tilde{\mathbf{r}}(u, v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (11)$$

где

$$\mathbf{s}(u, v) = (1 - w_{n+1}(v))\mathbf{p}_0(u) + w_{n+1}(v)\mathbf{p}_1(u) + (1 - w_{n+1}(u))\mathbf{q}_0(v) + w_{n+1}(u)\mathbf{q}_1(v),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}(u, v) &= (1 - w_{n+1}(u))(1 - w_{n+1}(v))\mathbf{r}_{0,0} + w_{n+1}(u)(1 - w_{n+1}(v))\mathbf{r}_{1,0} + \\ &+ (1 - w_{n+1}(u))w_{n+1}(v)\mathbf{r}_{0,1} + w_{n+1}(u)w_{n+1}(v)\mathbf{r}_{1,1} \end{aligned}$$

и полиномы $w_{n+1}(u)$ определены при помощи равенства (1).

Покажем, что поверхность $\mathbf{r}(u, v)$ имеет требуемые границы, другими словами, удовлетворяет условиям, заданным равенствами (5). Подставляя граничные значения полиномов $w_{n+1}(u)$, заданные равенствами (2), и граничные значения кривых, заданные равенствами (4), в равенство (11), получим

$$\mathbf{s}(u, 0) = \mathbf{p}_0(u) + (1 - w_{n+1}(u))\mathbf{r}_{0,0} + w_{n+1}(u)\mathbf{r}_{1,0}, \quad \tilde{\mathbf{r}}(u, 0) = (1 - w_{n+1}(u))\mathbf{r}_{0,0} + w_{n+1}(u)\mathbf{r}_{1,0}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{s}(u, 0) - \tilde{\mathbf{r}}(u, 0) = \mathbf{p}_0(u).$$

Аналогично

$$\mathbf{s}(0, v) = (1 - w_{n+1}(v))\mathbf{r}_{0,0} + w_{n+1}(v)\mathbf{r}_{0,1} + \mathbf{q}_0(v), \quad \tilde{\mathbf{r}}(0, v) = (1 - w_{n+1}(v))\mathbf{r}_{0,0} + w_{n+1}(v)\mathbf{r}_{0,1}$$

и поэтому

$$\mathbf{r}(0, v) = \mathbf{s}(0, v) - \tilde{\mathbf{r}}(0, v) = \mathbf{q}_0(v).$$

Таким образом, первые два из равенств (5) выполняются. Аналогично можно доказать справедливость оставшихся двух равенств.

Покажем, что поверхность $\mathbf{r}(u, v)$ имеет требуемые частные производные в угловых точках, т. е. удовлетворяет условиям, заданным равенствами (6)–(10). Для этого вычислим частные производные поверхности $\mathbf{r}(u, v)$. Получим

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^m} = \frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial u^m} - \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial u^m}, \quad (12)$$

где

$$\frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial u^m} = (1 - w_{n+1}(v))\mathbf{p}_0^{(m)}(u) + w_{n+1}(v)\mathbf{p}_1^{(m)}(u) + (1 - w_{n+1}(u))^{(m)}\mathbf{q}_0(v) + w_{n+1}^{(m)}(u)\mathbf{q}_1(v),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial u^m} &= (1 - w_{n+1}(u))^{(m)} (1 - w_{n+1}(v)) \mathbf{r}_{0,0} + w_{n+1}^{(m)}(u) (1 - w_{n+1}(v)) \mathbf{r}_{1,0} + \\ &+ (1 - w_{n+1}(u))^{(m)} w_{n+1}(v) \mathbf{r}_{0,1} + w_{n+1}^{(m)}(u) w_{n+1}(v) \mathbf{r}_{1,1} \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^m} = \frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial v^m} - \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial v^m}, \quad (13)$$

где

$$\frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial v^m} = (1 - w_{n+1}(v))^{(m)} \mathbf{p}_0(u) + w_{n+1}^{(m)}(v) \mathbf{p}_1(u) + (1 - w_{n+1}(u)) \mathbf{q}_0^{(m)}(v) + w_{n+1}(u) \mathbf{q}_1^{(m)}(v),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial v^m} &= (1 - w_{n+1}(u)) (1 - w_{n+1}(v))^{(m)} \mathbf{r}_{0,0} + w_{n+1}(u) (1 - w_{n+1}(v))^{(m)} \mathbf{r}_{1,0} + \\ &+ (1 - w_{n+1}(u)) w_{n+1}^{(m)}(v) \mathbf{r}_{0,1} + w_{n+1}(u) w_{n+1}^{(m)}(v) \mathbf{r}_{1,1} \end{aligned}$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in N$. Подставляя в эти уравнения значения полиномов $w_{n+1}(u)$ и их производных в граничных точках, которые определены соответственно равенствами (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^m} (0, 0) &= \frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial u^m} (0, 0) - \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial u^m} (0, 0) = (\mathbf{p}_0^{(m)}(u))(0), \\ \frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^m} (0, 0) &= \frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial v^m} (0, 0) - \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial v^m} (0, 0) = (\mathbf{q}_0^{(m)}(v))(0). \end{aligned}$$

Таким образом, равенства (6) выполняются. Аналогично можно доказать справедливость равенств (7)–(9).

Теперь покажем, что поверхность $\mathbf{r}(u, v)$ имеет требуемые смешанные частные производные в угловых точках, другими словами, удовлетворяет условиям, заданным равенствами (10). Для этого вычислим смешанные частные производные поверхности $\mathbf{r}(u, v)$. Получим

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} - \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \mathbf{s}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} &= (1 - w_{n+1}(v))^{(s)} \mathbf{p}_0^{(r)}(u) + w_{n+1}^{(s)}(v) \mathbf{p}_1^{(r)}(u) + \\ &+ (1 - w_{n+1}(u))^{(r)} \mathbf{q}_0^{(s)}(v) + w_{n+1}^{(r)}(u) \mathbf{q}_1^{(s)}(v), \\ \frac{\partial^m \tilde{\mathbf{r}}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} &= (1 - w_{n+1}(u))^{(r)} (1 - w_{n+1}(v))^{(s)} \mathbf{r}_{0,0} + (1 - w_{n+1}(u))^{(r)} w_{n+1}^{(s)}(v) \mathbf{r}_{1,0} + \\ &+ w_{n+1}^{(r)}(u) (1 - w_{n+1}(v))^{(s)} \mathbf{r}_{0,1} + w_{n+1}^{(r)}(u) w_{n+1}^{(s)}(v) \mathbf{r}_{1,1} \end{aligned}$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in N$, где $s + r = m$. Подставляя в эти уравнения значения производных полиномов $w_{n+1}(u)$ в граничных точках, которые определены равенствами (3), получим

$$\frac{\partial^m s(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^m \tilde{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(0,0) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(0,0) = \frac{\partial^m s(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(0,0) - \frac{\partial^m \tilde{r}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(0,0) = 0.$$

Аналогично можно доказать справедливость остальных равенств (10).

В результате получили, что поверхность $\mathbf{r}(u, v)$, определенная при помощи равенства (11), удовлетворяет заданным граничным условиям и имеет требуемые частные производные в угловых точках (рис. 2).

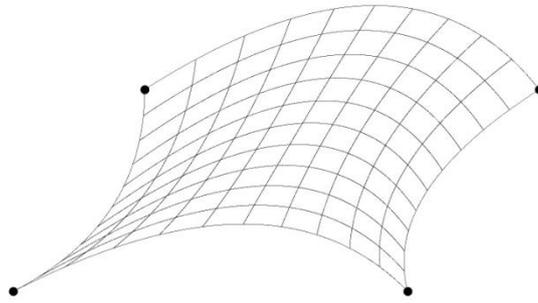


Рис. 2. Кусок поверхности $\mathbf{r}(u, v)$, построенный при помощи равенства (11)

3. Моделирование сплайн-поверхностей на четырехугольных сетках кривых

Интерполяция сеток кривых без ограничений на кручение поверхности была рассмотрена в работе [11]. Условия, обеспечивающие G^1 -непрерывность для поверхности из четырехугольных и треугольных кусков, обсуждались в статье [12]. Генерация поверхностей посредством бикубической интерполяции с использованием схемы Кунса рассмотрена в статье [13]. В данном разделе представлен подход к интерполяции четырехугольной сетки кривых кусками поверхности, которые построены смещением своих границ, как описано в разд. 2. Этот подход обеспечивает C^n -непрерывность моделируемой поверхности.

Рассмотрим двухмерный массив узловых точек $\mathbf{r}_{i,j}$, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, $j \in \{0, 1, \dots, l\}$, на котором построена сеть кривых $\mathbf{p}_{i,j}(u)$, $u \in [0, 1]$, и $\mathbf{q}_{i,j}(v)$, $v \in [0, 1]$, где $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, имеющих следующие общие границы:

$$\mathbf{p}_{i,j}(0) = \mathbf{q}_{i,j}(0) = \mathbf{r}_{i,j}, \quad \mathbf{p}_{i,j}(1) = \mathbf{p}_{i+1,j}(0) = \mathbf{r}_{i+1,j}, \quad \mathbf{q}_{i,j}(1) = \mathbf{q}_{i,j+1}(0) = \mathbf{r}_{i,j+1}.$$

Кроме того, предположим, что параметризованные кривые $\mathbf{p}_{i,j}(u)$ и $\mathbf{p}_{i+1,j}(u)$, а также $\mathbf{q}_{i,j}(v)$ и $\mathbf{q}_{i,j+1}(v)$ соединены в узловых точках с непрерывностью C^n , другими словами, производные этих кривых удовлетворяют граничным условиям

$$(\mathbf{p}_{i,j}^{(m)}(u))(1) = (\mathbf{p}_{i+1,j}^{(m)}(u))(0), \quad (\mathbf{q}_{i,j}^{(m)}(v))(1) = (\mathbf{q}_{i,j+1}^{(m)}(v))(0)$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Задача состоит в том, чтобы построить на заданной сетке кривых интерполирующую поверхность $\mathbf{r}(u, v)$, которая также имеет степень непрерывно-

сти C^n . Определим клетку поверхности $\mathbf{r}(u, v)$, ограниченную параметризованными кривыми $\mathbf{p}_{i,j}(u)$, $\mathbf{p}_{i,j+1}(u)$, $\mathbf{q}_{i,j}(v)$ и $\mathbf{q}_{i+1,j}(v)$, используя равенство (11), следующим образом:

$$\mathbf{r}_{i,j}(u, v) = \mathbf{s}_{i,j}(u, v) - \tilde{\mathbf{r}}_{i,j}(u, v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (15)$$

где

$$\mathbf{s}_{i,j}(u, v) = (1 - w_{n+1}(v))\mathbf{p}_{i,j}(u) + w_{n+1}(v)\mathbf{p}_{i,j+1}(u) + (1 - w_{n+1}(u))\mathbf{q}_{i,j}(v) + w_{n+1}(u)\mathbf{q}_{i+1,j}(v),$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}(u, v) = (1 - w_{n+1}(u))(1 - w_{n+1}(v))\mathbf{r}_{i,j} + w_{n+1}(u)(1 - w_{n+1}(v))\mathbf{r}_{i+1,j} +$$

$$+ (1 - w_{n+1}(u))w_{n+1}(v)\mathbf{r}_{i,j+1} + w_{n+1}(u)w_{n+1}(v)\mathbf{r}_{i+1,j+1}.$$

Из результатов, полученных в разд. 2, следует, что клетка поверхности $\mathbf{r}_{i,j}(u, v)$ имеет своими границами параметризованные кривые $\mathbf{p}_{i,j}(u)$, $\mathbf{p}_{i,j+1}(u)$, $\mathbf{q}_{i,j}(v)$ и $\mathbf{q}_{i+1,j}(v)$. Кроме того, поверхность $\mathbf{r}(u, v)$ имеет непрерывность C^n в узловых точках $\mathbf{r}_{i,j}$. Покажем, что поверхность $\mathbf{r}(u, v)$ имеет также степень непрерывности C^n на границах клеток. Для этого вычислим частные производные поперек границ клетки, используя равенства (12), (13). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \mathbf{r}_{i,j}(u, v)}{\partial u^m}(1, v) &= (1 - w_{n+1}(v))(\mathbf{p}_{i,j}^{(m)}(u))(1) + w_{n+1}(v)(\mathbf{p}_{i,j+1}^{(m)}(u))(1) = \\ &= (1 - w_{n+1}(v))(\mathbf{p}_{i+1,j}^{(m)}(u))(0) + w_{n+1}(v)(\mathbf{p}_{i+1,j+1}^{(m)}(u))(0) = \frac{\partial^m \mathbf{r}_{i+1,j}(u, v)}{\partial u^m}(0, v) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}_{i,j}(u, v)}{\partial v^m}(u, 1) = \frac{\partial^m \mathbf{r}_{i,j+1}(u, v)}{\partial v^m}(u, 0)$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Используя равенство (14), вычислим смешанные частные производные поперек границ клетки. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \mathbf{r}_{i,j}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(1, v) &= (1 - w_{n+1}(v))^{(s)}(\mathbf{p}_{i,j}^{(r)}(u))(1) + w_{n+1}^{(s)}(v)(\mathbf{p}_{i,j+1}^{(r)}(u))(1) = \\ &= (1 - w_{n+1}(v))^{(s)}(\mathbf{p}_{i+1,j}^{(r)}(u))(0) + w_{n+1}^{(s)}(v)(\mathbf{p}_{i+1,j+1}^{(r)}(u))(0) = \frac{\partial^m \mathbf{r}_{i+1,j}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(0, v) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{\partial^m \mathbf{r}_{i,j}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(u, 1) = \frac{\partial^m \mathbf{r}_{i,j+1}(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}(u, 0)$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $s + r = m$.

Таким образом, поверхность $\mathbf{r}(u, v)$, построенная при помощи равенства (15), является C^n -непрерывной. На рис. 3 показана сплайн-поверхность, построенная предложенным методом на заданной сетке кривых.

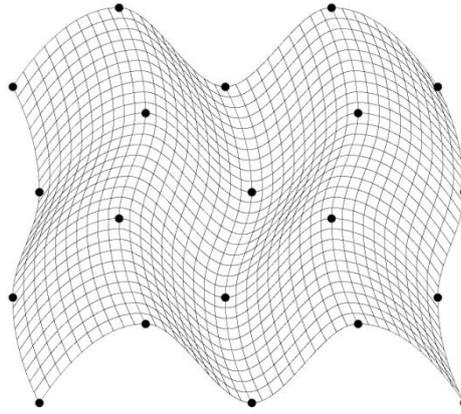


Рис. 3. Сплайн-поверхность, построенная на заданной сетке кривых

4. Моделирование сплайн-поверхностей Бэ́зе

Рассмотрим применение предложенного подхода к построению сплайн-поверхностей Бэ́зе на четырехугольных сетках кривых. Представление поверхностей Гордона [7] в форме поверхностей Бэ́зе впервые было рассмотрено в работе [14]. Локальная интерполяция поверхностей с использованием кусков Бэ́зе на сетке кубических кривых описана в работе [15]. Этот метод обеспечивает G^1 -непрерывность на границах кусков поверхности. В данном разделе представлен метод, который позволяет моделировать сплайн-поверхность Бэ́зе требуемой непрерывности C^n . Для выполнения этого условия требуется, чтобы прямоугольная сетка кривых, на которой моделируется сплайн-поверхность, также была C^n -непрерывной. Для обеспечения данного свойства четырехугольной сетки кривых (учитывая, что поверхность моделируется локально) границы куска поверхности должны быть представлены кривыми Бэ́зе, по крайней мере, степени $2n+1$. В таком случае границы четырехугольного куска поверхности $\mathbf{r}_{i,j}(u, v)$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{p}_{i,j}(u) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \mathbf{p}_{i,j,k}(u), \quad u \in [0, 1], \quad \mathbf{q}_{i,j}(v) = \sum_{l=0}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) \mathbf{q}_{i,j,l}(v), \quad v \in [0, 1],$$

где граничные точки кривых Бэ́зе $\mathbf{p}_{i,j}(u)$ и $\mathbf{q}_{i,j}(v)$ являются узловыми точками четырехугольной сетки кривых:

$$\mathbf{p}_{i,j}(0) = \mathbf{p}_{i,j,0} = \mathbf{r}_{i,j}, \quad \mathbf{p}_{i,j}(1) = \mathbf{p}_{i,j,2n+1} = \mathbf{r}_{i+1,j},$$

$$\mathbf{q}_{i,j}(0) = \mathbf{q}_{i,j,0} = \mathbf{r}_{i,j}, \quad \mathbf{q}_{i,j}(1) = \mathbf{q}_{i,j,2n+1} = \mathbf{r}_{i+1,j}.$$

Тогда четырехугольный кусок поверхности $\mathbf{r}_{i,j}(u, v)$ может быть описан, используя равенства (15), (16), следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i,j}(u, v) &= \mathbf{s}_{i,j}(u, v) - \tilde{\mathbf{r}}_{i,j}(u, v) = \\ &= \sum_{l=0}^n b_{2n+1,l}(v) \sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \mathbf{p}_{i,j,k} + \sum_{l=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) \sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \mathbf{p}_{i,j+1,k} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=0}^n b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=0}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) \mathbf{q}_{i,j,l} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=0}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) \mathbf{q}_{i+1,j,l} - \\
 & - \sum_{k=0}^n b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=0}^n b_{2n+1,l}(v) \mathbf{r}_{i,j} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=0}^n b_{2n+1,l}(v) \mathbf{r}_{i+1,j} - \\
 & - \sum_{k=0}^n b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) \mathbf{r}_{i,j+1} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) \mathbf{r}_{i+1,j+1}.
 \end{aligned}$$

Приводя подобные, получим представление четырехугольного куска поверхности Бэ́зье, которая имеет непрерывности C^n :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i,j}(u,v) & = \sum_{k=0}^n b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=0}^n b_{2n+1,l}(v) (\mathbf{p}_{i,j,k} + \mathbf{q}_{i,j,l} - \mathbf{r}_{i,j}) + \\
 & + \sum_{k=0}^n b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) (\mathbf{p}_{i,j+1,k} + \mathbf{q}_{i,j,l} - \mathbf{r}_{i,j+1}) + \\
 & + \sum_{k=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=0}^n b_{2n+1,l}(v) (\mathbf{p}_{i,j,k} + \mathbf{q}_{i+1,j,l} - \mathbf{r}_{i+1,j}) + \\
 & + \sum_{k=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,k}(u) \sum_{l=n+1}^{2n+1} b_{2n+1,l}(v) (\mathbf{p}_{i,j+1,k} + \mathbf{q}_{i+1,j,l} - \mathbf{r}_{i+1,j+1}).
 \end{aligned}$$

В геометрических приложениях главным образом используются сплайн-поверхности с непрерывностью C^1 и C^2 . Четырехугольные куски этих поверхностей имеют следующее представление Бэ́зье:

– для поверхности с непрерывностью C^1

$$\mathbf{r}_{i,j}(u,v) = \sum_{k=0}^3 b_{3,k}(u) \sum_{l=0}^3 b_{3,l}(v) \mathbf{p}_{k,l},$$

где точки $\mathbf{p}_{k,l}$ могут рассматриваться как элементы матрицы

$$\mathbf{P}_{k,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{q}_{i,j,1} & \mathbf{q}_{i,j,2} & \mathbf{r}_{i,j+1} \\ \mathbf{p}_{i,j,1} & \mathbf{p}_{i,j,1} + \mathbf{q}_{i,j,1} - \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{p}_{i,j+1,1} + \mathbf{q}_{i,j,2} - \mathbf{r}_{i,j+1} & \mathbf{p}_{i,j+1,1} \\ \mathbf{p}_{i,j,2} & \mathbf{p}_{i,j,2} + \mathbf{q}_{i+1,j,1} - \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{p}_{i,j+1,2} + \mathbf{q}_{i+1,j,2} - \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{p}_{i,j+1,2} \\ \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{q}_{i+1,j,1} & \mathbf{q}_{i+1,j,2} & \mathbf{r}_{i+1,j+1} \end{bmatrix},$$

– для поверхности с непрерывностью C^2

$$\mathbf{r}_{i,j}(u,v) = \sum_{k=0}^5 b_{3,k}(u) \sum_{l=0}^5 b_{3,l}(v) \mathbf{p}_{k,l},$$

где точки $\mathbf{p}_{k,l}$ могут рассматриваться как элементы блочной матрицы

$$\mathbf{P}_{k,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0,0} & \mathbf{B}_{0,1} \\ \mathbf{B}_{1,0} & \mathbf{B}_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{0,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{q}_{i,j,1} & \mathbf{q}_{i,j,2} \\ \mathbf{p}_{i,j,1} & \mathbf{p}_{i,j,1} + \mathbf{q}_{i,j,1} - \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{p}_{i,j,1} + \mathbf{q}_{i,j,2} - \mathbf{r}_{i,j} \\ \mathbf{p}_{i,j,2} & \mathbf{p}_{i,j,2} + \mathbf{q}_{i,j,1} - \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{p}_{i,j,2} + \mathbf{q}_{i,j,2} - \mathbf{r}_{i,j} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_{0,1} &= \begin{bmatrix} & \mathbf{q}_{i,j,3} & & \mathbf{q}_{i,j,4} & & \mathbf{r}_{i,j+1} \\ \mathbf{p}_{i,j+1,1} + \mathbf{q}_{i,j,3} - \mathbf{r}_{i,j+1} & & \mathbf{p}_{i,j+1,1} + \mathbf{q}_{i,j,4} - \mathbf{r}_{i,j+1} & & \mathbf{p}_{i,j+1,1} & \\ \mathbf{p}_{i,j+1,2} + \mathbf{q}_{i,j,3} - \mathbf{r}_{i,j+1} & & \mathbf{p}_{i,j+1,2} + \mathbf{q}_{i,j,4} - \mathbf{r}_{i,j+1} & & \mathbf{p}_{i,j+1,2} & \\ & & & & & \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_{1,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i,j,3} & \mathbf{p}_{i,j,3} + \mathbf{q}_{i+1,j,1} - \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{p}_{i,j,3} + \mathbf{q}_{i+1,j,2} - \mathbf{r}_{i+1,j} \\ \mathbf{p}_{i,j,4} & \mathbf{p}_{i,j,4} + \mathbf{q}_{i+1,j,1} - \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{p}_{i,j,4} + \mathbf{q}_{i+1,j,2} - \mathbf{r}_{i+1,j} \\ \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{q}_{i+1,j,1} & \mathbf{q}_{i+1,j,2} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_{1,1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i,j+1,3} + \mathbf{q}_{i+1,j,3} - \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{p}_{i,j+1,3} + \mathbf{q}_{i+1,j,4} - \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{p}_{i,j+1,3} \\ \mathbf{p}_{i,j+1,4} + \mathbf{q}_{i+1,j,3} - \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{p}_{i,j+1,4} + \mathbf{q}_{i+1,j,4} - \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{p}_{i,j+1,4} \\ & \mathbf{q}_{i+1,j,3} & \mathbf{q}_{i+1,j,4} & \mathbf{r}_{i+1,j+1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогично могут быть организованы в блочную матрицу точки для моделирования куска четырехугольной сплайн-поверхности с непрерывностью C^n . На рис. 4 показана сплайн-поверхность Бэ́зе непрерывности C^2 , построенная на заданной сетке кривых Бэ́зе.

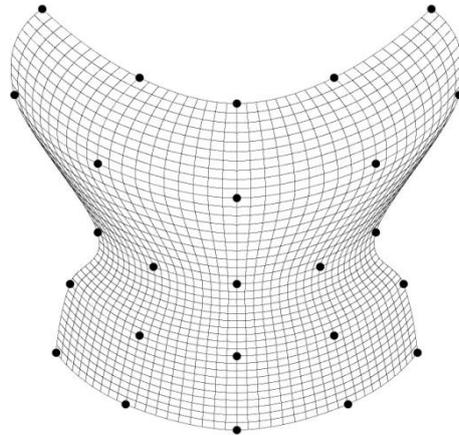


Рис. 4. Сплайн-поверхность Бэ́зе непрерывности C^2

Заключение

В статье представлен подход к моделированию интерполяционных сплайн-поверхностей с непрерывностью C^n на четырехугольных сетках кривых. Клетка поверхности строится посредством смешивания своих границ при помощи весовых полиномов. Доказано, что требуемая параметрическая непрерывность поверхности обеспечивается выбором полинома подходящей степени. Представленный подход обеспечивает локальные геометрические свойства моделируемой поверхности. Если сетка кривых задана кривыми Бэ́зе, то куски моделируемой сплайн-поверхности являются поверхностями Бэ́зе. Такой подход к моделированию поверхностей может быть использован для быстрого моделирования набросков поверхностей, а также, учитывая локальное свойство поверхностей, может применяться в геометрических приложениях, требующих вычислений в режиме реального времени.

Список литературы

1. Robin, J.Y. *Geometry and Interpolation of Curves and Surfaces* / J.Y. Robin, M. McLeod, L. Baart. – Cambridge University Press, 2011. – 430 p.
2. Peters, J. Local smooth surface interpolation: a classification / J. Peters // *Computer Aided Geometric Design*. – 1990. – Vol. 7, no. 1–4. – P. 191–195.
3. Vida, Q.J. A survey of blending methods that use parametric surfaces / Q.J. Vida, R.R. Martin, T. Várady // *Computer-Aided Design*. – 1994. – Vol. 26, no. 5. – P. 341–365.
4. Coons, S.A. Surfaces for computer-aided design of space forms / S.A. Coons // Report MAC-TR-41, Project MAC. – Massachusetts Institute of Technology, 1967.
5. Forrest, A.R. On Coons and other methods for the representation of curved surfaces / A.R. Forrest // *Computer Graphics and Image Processing*. – 1972. – Vol. 1, no. 4. – P. 341–359.
6. Фокс, А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М. : Мир, 1982. – 304 с.
7. Gordon, W.J. Spline-blended surface interpolation through curve networks / W.J. Gordon // *J. Math. and Mech.* – 1969. – Vol. 18, no. 10. – P. 931–957.
8. Juhász, I. Surface interpolation with local control by linear blending / I. Juhász, M. Hoffmann // *Annales Mathematicae et Informaticae*. – 2009. – Vol. 36. – P. 77–84.
9. Побегайло, А.П. Полиномиальная деформация кривых и ее применение в геометрическом моделировании / А.П. Побегайло // *Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика*. – 2009. – № 3. – С. 106–109.
10. Pobegailo, A.P. Interpolation of Rectangular Grids Using Deformation of Curves / A.P. Pobegailo // *Pattern Recognition and Information Processing (PRIP)'2009 : proc. of the 10th Intern. Conf. (19–21 May, 2009, Minsk, Belarus)*. – Minsk : Publ. Center of BSU, 2009. – P. 334–338.
11. Gregory, J. Smooth interpolation without twist constraints / J. Gregory ; ed. R.E. Barnhill, R.F. Riesenfeld // *Computer Aided Geometric Design*. – Academic Press, 1974. – P. 71–88.
12. Farin, G. Agnostic G1 Gregory Surfaces / G. Farin, D. Hansford // *Graphical Models*. – 2012. – Vol. 76, no. 4. – P. 346–350.
13. Comninos, P. An interpolating piecewise bicubic surface with shape parameters / P. Comninos // *Computers & Graphics*. – 2001. – Vol. 25, no. 3. – P. 463–481.
14. Chiyokura, H. Design of solids with free-form surfaces / H. Chiyokura, F. Kimura // *Computer Graphics*. – 1983. – Vol. 17, no. 3. – P. 289–298.
15. Shirman, L.A. Local surface interpolation with B_ezier patches / L.A. Shirman, C.H. Sequin // *Computer Aided Geometric Design*. – 1987. – Vol. 4, no. 4. – P. 279–295.

Поступила 25.06.2014

*Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: pobegailo@bsu.by*

A.P. Pobegailo

**DESIGN OF BEZIER SPLINE SURFACES
OVER BIVARIATE NETWORKS OF CURVES**

The paper presents an approach to construct interpolating spline surfaces over a bivariate network of curves with rectangular patches. Patches of the interpolating spline surface are constructed by means of blending their boundaries with special polynomials. In order to ensure a necessary parametric continuity of the designed surface the polynomials of the corresponding degree must be used. The constructed interpolating spline surfaces have a local shape control. If the surface frame is determined by means of Bezier curves, then patches of the interpolating spline surface are Bezier surfaces. The presented approach to surface modeling can be used in such applications as computer graphics and geometric design.