

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 534.26

Г.Ч. Шушкевич, Н.Н. Киселева

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ПЛОСКИМ УПРУГИМ СЛОЕМ И ТОНКОЙ НЕЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Рассматривается аналитико-численный алгоритм решения граничной задачи, описывающей процесс проникновения звукового поля сферического излучателя, который расположен внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки, через плоский упругий слой. Численно исследуется влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля.

Введение

Исследование распространения звуковых волн в упругих средах имеет практическое приложение в медицинской диагностике мягких биологических тканей, гидроакустике, сейсмологии и физической акустике [1–5]. Библиография по решению задач рассеяния весьма обширна. Рассмотрим лишь некоторые работы, относящиеся к данной теме исследования.

В статье [6] методом ступенчатой аппроксимации исследуется влияние количества разбиений (слоев) среды, обладающей упругими свойствами, на дисперсионные и амплитудно-частотные характеристики поверхностных волн. Описание параллельного алгоритма рассеяния звукового поля точечного источника в упругой среде как приложения для задач сейсмологии предлагается в работе [7]. В статье [8] авторы представляют численное исследование дисперсионных характеристик некоторых симметричных и асимметричных моделей для упругих многослойных пакетов с произвольной анизотропией каждого слоя. Влияние физических характеристик упругих слоев среды на рассеяние плоской звуковой волны анализируется методом матриц отражения и прохождения в [9]. В [10] рассматриваются сдвиговые волны в слоистых средах с плоскими границами раздела, дается общее решение для амплитуд сдвиговых волн, приводятся результаты расчета модуля сдвига для структур с меняющимся количеством слоев в зависимости от вида неоднородности. В статье [11] матричным методом находится коэффициент прохождения акустической волны через многослойную пьезоэлектрическую эластичную структуру. В работе [12] методом конечных элементов исследуется рассеяние акустической волны в дальней зоне на упругом объекте в трехслойной среде. Аналогичным методом в статье [13] решается задача дифракции плоской акустической волны через многослойную эластичную структуру, находятся коэффициенты прохождения и отражения. В [14] рассматривается простая акустическая геометрическая система, состоящая из источника звука и тонкой бесконечной упругой пластины, для исследования задачи используется спектральный анализ линейных операторов и находится коэффициент отражения звуковой волны. В [15] описывается аналитическое решение, основанное на матричном методе распространения акустического поля, порожденного одним источником, в горизонтально-слоистой вязкоупругой среде.

В настоящей работе построено точное осесимметричное решение задачи о проникновении звукового поля через плоский упругий слой. В качестве источника поля рассматривается сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. С помощью соответствующих теорем сложения решение поставленной краевой задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Исследуется влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля.

1. Постановка задачи и представление решения

Пусть все пространство R^3 разделено плоскостями $S_0(z=h_1)$ и $S_1(z=h_1+h_2)$ на три области $D_0(z < h_1)$, $D_2(h_1 < z < h_1+h_2)$, $D_1(z > h_1+h_2)$ (рис. 1). В области D_0 находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 , расположенная на сфере Γ радиуса a с центром в точке O . Область пространства, ограниченную сферой Γ , обозначим через $D_0^{(0)}(0 \leq r < a)$ и $D_0^{(1)} = D_0 \setminus (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$. Здесь h_1 – расстояние между точками O и O_1 , h_2 – расстояние между плоскостями S_0 и S_1 .

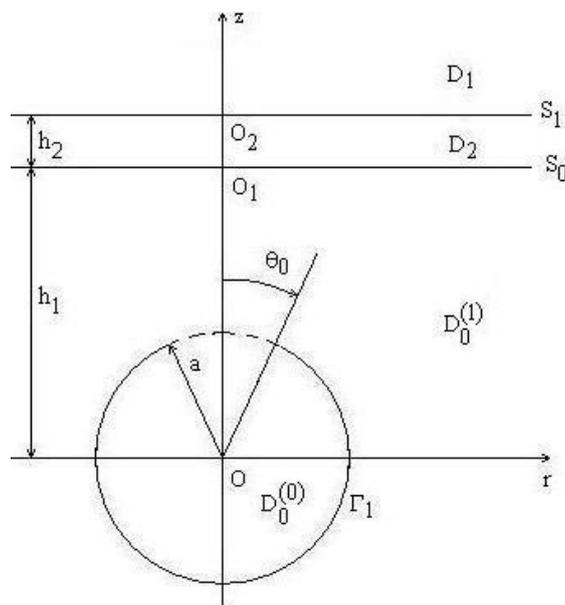


Рис. 1. Геометрия задачи

В точке O расположен точечный излучатель звуковых волн, колеблющихся с круговой частотой ω . Области D_j , $j = \overline{0, 1}$, заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность среды и скорость звука в области D_j обозначим соответственно через $\tilde{\rho}_j$, c_j , $j = \overline{0, 1}$. Область D_2 – плоский упругий слой. Под воздействием звукового поля упругий слой совершает колебания, его деформация определяется вектором смещения \vec{u} , который удовлетворяет уравнению Ламе [16]:

$$\tilde{\mu} \Delta \vec{u} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \text{grad div } \vec{u} + \omega^2 \tilde{\rho} \vec{u} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ – коэффициенты Ламе; $\tilde{\rho}$ – плотность материала упругой среды.

Для решения задачи свяжем с точкой O сферические координаты $\{r, \theta, \varphi\}$:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

где $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и цилиндрические координаты $\{\rho, \varphi, z\}$:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 и плоскости $S_j, j = \overline{0, 1}$, описываются следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{r = a, \theta_0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad S_0 = \{z = h_1, 0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \\ S_1 = \{z = h_1 + h_2, 0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Обозначим через p_c давление звукового поля точечного излучателя; $p_0^{(0)}$ – давление звукового поля, отраженного от границы Γ_1 в области $D_0^{(0)}$; $p_0 = p_0^{(1)} + p_0^{(2)}$ – суммарное давление рассеянного звукового поля в области $D_0^{(1)}$; $p_0^{(1)}$ – давление звукового поля, отраженного от границы Γ_1 в области $D_0^{(1)}$; $p_0^{(2)}$ – давление звукового поля, отраженного от границы S_0 в области $D_0^{(1)}$; p_1 – давление рассеянного звукового поля в области D_1 .

Реальное смещение и звуковое давление вычисляются по формулам [17]

$$\vec{U} = \text{Re}(\vec{u} e^{-i\omega t}), \quad P_j = \text{Re}(p_j e^{-i\omega t}), \quad j = 0, 1,$$

где i – мнимая единица.

В установившемся режиме колебаний давления рассеянных звуковых полей $p_0^{(j)}, j = \overline{0, 2}$, и p_1 удовлетворяют уравнению Гельмгольца [17, 18]

$$\Delta p_0^{(j)} + k_0^2 p_0^{(j)} = 0 \text{ в } D_0; \quad \Delta p_1 + k_1^2 p_1 = 0 \text{ в } D_1,$$

где $k_0 = \omega / c_0, k_1 = \omega / c_1$ – волновые числа.

В случае распространения малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела вектор смещения определяется по формуле (осесимметричная задача) [6]

$$\vec{u} = \text{grad}\psi + \text{rot}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\varphi\right), \quad (2)$$

где функции ψ, Φ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\psi + k_t^2\psi = 0, \quad k_t = \omega / \tilde{n}_t, \quad \tilde{n}_t = \sqrt{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) / \tilde{\rho}}; \\ \Delta\Phi + k_t^2\Phi = 0, \quad k_t = \omega / c_t, \quad c_t = \sqrt{\tilde{\mu} / \tilde{\rho}}.$$

Здесь \tilde{n}_t и c_t – скорости распространения продольных и поперечных упругих волн соответственно.

В цилиндрической системе координат компоненты вектора смещения связаны с функциями ψ, Φ соотношениями

$$u_\rho = \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + k_t^2\Phi. \quad (3)$$

Решение дифракционной задачи сводится к нахождению вектора смещения \vec{u} и давлений звуковых полей $p_0^{(j)}, j = \overline{0, 2}$, и p_1 , которые удовлетворяют:

– граничному условию на поверхности сферической оболочки Γ_1 (акустически жесткой оболочки):

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(p_c + p_0^{(0)})\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (4)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности Γ_1 ;

– граничным условиям взаимодействия звукового поля с упругим слоем на плоскости S_j , $j = \overline{0, 1}$ [18]:

$$\omega^{-2} \tilde{\rho}_j^{-1} \frac{\partial p_j}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_j} = (\vec{u}, \vec{n}) \Big|_{S_j}, \quad T(\vec{u}) \Big|_{S_j} = -p_j \vec{n} \Big|_{S_j},$$

где $T(\vec{u}) = 2\tilde{\mu} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \tilde{\lambda} \vec{e}_z \operatorname{div} \vec{u} + \tilde{\mu} [\vec{e}_z, \operatorname{rot} \vec{u}]$, $\vec{n} = \vec{e}_z$ – нормаль к поверхности S_j ,

или

$$u_z \Big|_{S_j} = \omega^{-2} \tilde{\rho}_j^{-1} \frac{\partial p_j}{\partial z} \Big|_{S_j}, \quad \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \Big|_{S_j} = 0, \quad (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde{\lambda} \left(\frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right) \Big|_{S_j} = -p_j \Big|_{S_j}, \quad (5)$$

и условию на бесконечности [19]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p_j(M)}{\partial r} - ik_j p_j(M) \right) = 0, \quad j = \overline{0, 1}, \quad (6)$$

где M – произвольная точка пространства.

Потребуем также выполнения условия непрерывности давлений на открытой части сферической оболочки $\Gamma \setminus \Gamma_1$:

$$(p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = (p_0^{(1)} + p_0^{(2)}) \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}, \quad (7)$$

и нормальной производной на поверхности сферы Γ :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (p_0^{(1)} + p_0^{(2)}) \Big|_{\Gamma}, \quad (8)$$

где \vec{n} – нормаль к поверхности Γ .

Давление исходного звукового поля представим в виде выражения [19]

$$p_c(r, \theta) = P \frac{e^{ik_0 r}}{r} = ik_0 P h_0^{(1)}(kr) = P \sum_{n=0}^{\infty} f_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad f_n = ik_0 \delta_{0n}, \quad (9)$$

где $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Ханкеля; $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [20]; δ_{0k} – символ Кронекера; P – const [17].

Давления рассеянного звукового поля и функции ψ , Φ представим в виде суперпозиции базисных решений уравнения Гельмгольца в сферических и цилиндрических координатах [19, 21], учитывая условие на бесконечности (6):

$$p_0^{(0)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta) \quad \text{в } D_0^{(0)}; \quad (10)$$

$$p_0^{(1)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} x_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad p_0^{(2)}(\rho, z) = P \int_0^{\infty} y(\lambda) J_0(\lambda \rho) e^{v_0(z-h_1)} \lambda d\lambda \quad \text{в } D_0^{(1)}; \quad (11)$$

$$p_1(\rho, z) = P \int_0^{\infty} d(\lambda) J_0(\lambda \rho) e^{-v_1(z-h_1-h_2)} \lambda d\lambda \quad \text{в } D_1; \quad (12)$$

$$\psi(\rho, z) = P \int_0^{\infty} \left(a(\lambda) e^{-v_i(z-h_1)} + b(\lambda) e^{v_i(z-h_1-h_2)} \right) J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda; \quad (13)$$

$$\Phi(\rho, z) = P \int_0^{\infty} \left(\tilde{a}(\lambda) e^{-v_i(z-h_1)} + \tilde{b}(\lambda) e^{v_i(z-h_1-h_2)} \right) J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda, \quad (14)$$

где $J_n(x)$ – сферические функции Бесселя первого рода; $J_0(x)$ – функции Бесселя первого рода [19–21]; $v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$, $-\pi/2 \leq \arg v_j < \pi/2$, $j = 0, 1$; $v_\ell = \sqrt{\lambda^2 - k_\ell^2}$, $-\pi/2 \leq \arg v_\ell < \pi/2$; $v_t = \sqrt{\lambda^2 - k_t^2}$, $-\pi/2 \leq \arg v_t < \pi/2$.

Неизвестные функции $a(\lambda), b(\lambda), \tilde{a}(\lambda), \tilde{b}(\lambda), y(\lambda), d(\lambda)$ и коэффициенты c_n, x_n подлежат определению из граничных условий (4), (5), (7), (8).

2. Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (4), (7), (8) представим функцию $p_0^{(2)}(\rho, z)$ через сферические волновые функции, используя формулу [21], связывающую цилиндрические и сферические волновые функции:

$$J_0(\lambda \rho) e^{vz} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) P_n \left(\frac{iv}{k} \right) j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad -\pi/2 \leq \arg v < \pi/2.$$

Тогда

$$p_0^{(2)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} T_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad T_n = (-i)^n (2n+1) \int_0^{\infty} y(\lambda) P_n \left(\frac{iv_0}{k_0} \right) e^{-v_0 h} \lambda d\lambda. \quad (15)$$

Согласно представлениям (9)–(11), (15) граничное условие (8) с учетом условия ортогональности полиномов Лежандра на отрезке $[0; \pi]$ примет вид

$$f_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) + c_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) = x_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) + T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0), \quad \xi_0 = k_0 a, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Выполним граничное условие (4) на поверхности сферической оболочки Γ и условие непрерывности (7). В полученных уравнениях исключим коэффициенты c_n , используя представление (16), и получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра вида

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n - f_n}{\frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0)} P_n(\cos \theta) = 0, & 0 \leq \theta < \theta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) P_n(\cos \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) P_n(\cos \theta), & \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (17)$$

Преобразуем парные сумматорные уравнения (17). Для этого введем в рассмотрение новые коэффициенты X_n по формуле

$$x_n = X_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) + f_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

малый параметр g_n по формуле

$$g_n = 1 + \frac{4i\xi_0^3}{2n+1} \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0), \quad g_n = O(n^{-2}),$$

и сделаем замену $\theta = \pi - \tilde{\theta}$, $\theta_0 = \pi - \tilde{\theta}_0$, $\tilde{X}_n = (-1)^n X_n$.

В результате парные сумматорные уравнения (17) примут вид

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(1-g_n) \tilde{X}_n P_n(\cos \tilde{\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) (\tilde{f}_n + \tilde{T}_n) P_n(\cos \tilde{\theta}), & 0 \leq \tilde{\theta} < \tilde{\theta}_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{X}_n P_n(\cos \tilde{\theta}) = 0, & \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta} \leq \pi, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\tilde{T}_n = 4i\xi_0^3 T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) / (2n+1), \quad \tilde{f}_n = 4i\xi_0^3 f_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) / (2n+1). \quad (20)$$

Используя интегральные представления для полиномов Лежандра, парные сумматорные уравнения (19) преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго порядка с вполне непрерывным оператором [22, 23]:

$$\tilde{X}_n - \sum_{k=0}^{\infty} g_k R_{nk} \tilde{X}_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\tilde{T}_k + \tilde{f}_k) R_{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (21)$$

где

$$R_{nk} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-k)(\pi-\theta_0)}{n-k} - \frac{\sin(n+k+1)(\pi-\theta_0)}{n+k+1} \right], \quad \left. \frac{\sin(n-k)(\pi-\theta_0)}{n-k} \right|_{n=k} = \pi - \theta_0.$$

Для выполнения граничных условий (5) представим функцию $p_0^{(1)}(r, \theta)$ через цилиндрические волновые функции, используя формулу [21]

$$h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) = \int_0^{\infty} \frac{i^{-n-1}}{kv} P_n\left(\frac{iv}{k}\right) J_0(\lambda \rho) e^{-vz} \lambda d\lambda, \quad v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad -\pi/2 \leq \arg v < \pi/2, \quad z > 0.$$

Тогда

$$p_0^{(1)}(\rho, z) = P \int_0^{\infty} Z(\lambda) J_0(\lambda \rho) e^{-v_0 z} \lambda d\lambda, \quad (22)$$

где

$$Z(\lambda) = \frac{1}{k_0 v_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n-1} P_n\left(\frac{iv_0}{k_0}\right) x_n. \quad (23)$$

Принимая во внимание представления (11)–(14), (22) и выполняя граничные условия (5), получим СЛАУ вида

$$M(\lambda) \cdot V(\lambda) = F(\lambda) \cdot Z(\lambda), \quad (24)$$

где

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{11}(\lambda) & m_{12}(\lambda) & m_{13}(\lambda) & m_{14}(\lambda) & 1 & 0 \\ m_{21}(\lambda) & m_{22}(\lambda) & m_{23}(\lambda) & m_{24}(\lambda) & 0 & 0 \\ m_{31}(\lambda) & m_{32}(\lambda) & m_{33}(\lambda) & m_{34}(\lambda) & m_{35}(\lambda) & 0 \\ m_{41}(\lambda) & m_{42}(\lambda) & m_{43}(\lambda) & m_{44}(\lambda) & 0 & 1 \\ m_{51}(\lambda) & m_{52}(\lambda) & m_{53}(\lambda) & m_{54}(\lambda) & 0 & 0 \\ m_{61}(\lambda) & m_{62}(\lambda) & m_{63}(\lambda) & m_{64}(\lambda) & 0 & m_{66}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad V(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) \\ b(\lambda) \\ \tilde{a}(\lambda) \\ \tilde{b}(\lambda) \\ y(\lambda) \\ d(\lambda) \end{pmatrix}, \quad F(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ 0 \\ f_3(\lambda) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
m_{11}(\lambda) &= (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})v_\ell^2 - \tilde{\lambda}\lambda^2, \quad m_{12}(\lambda) = \left[(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})v_\ell^2 - \tilde{\lambda}\lambda^2 \right] e^{-v_\ell h_2}, \\
m_{13}(\lambda) &= (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(-v_t^3 - v_t k_t^2) + \tilde{\lambda}\lambda^2 v_t, \quad m_{14}(\lambda) = \left[(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(v_t^3 + v_t k_t^2) - \tilde{\lambda}\lambda^2 v_t \right] e^{-v_t h_2}, \\
m_{21}(\lambda) &= -2v_\ell, \quad m_{22}(\lambda) = 2v_\ell e^{-v_\ell h_2}, \quad m_{23}(\lambda) = 2v_t^2 + k_t^2, \quad m_{24}(\lambda) = \left[2v_t^2 + k_t^2 \right] e^{-v_t h_2}, \\
m_{31}(\lambda) &= -v_\ell, \quad m_{32}(\lambda) = v_\ell e^{-v_\ell h_2}, \quad m_{33}(\lambda) = v_t^2 + k_t^2, \quad m_{34}(\lambda) = \left[v_t^2 + k_t^2 \right] e^{-v_t h_2}, \\
m_{35}(\lambda) &= -\omega^{-2} \tilde{\rho}_0^{-1} v_0, \quad m_{41}(\lambda) = \left[(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})v_\ell^2 - \tilde{\lambda}\lambda^2 \right] e^{-v_\ell h_2}, \quad m_{42}(\lambda) = (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})v_\ell^2 - \tilde{\lambda}\lambda^2, \\
m_{43}(\lambda) &= \left[(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(-v_t^3 - v_t k_t^2) + \tilde{\lambda}\lambda^2 v_t \right] e^{-v_t h_2}, \quad m_{44}(\lambda) = (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(v_t^3 + v_t k_t^2) - \tilde{\lambda}\lambda^2 v_t, \\
m_{51}(\lambda) &= -2v_\ell e^{-v_\ell h_2}, \quad m_{52}(\lambda) = 2v_\ell, \quad m_{53}(\lambda) = \left[2v_t^2 + k_t^2 \right] e^{-v_t h_2}, \quad m_{54}(\lambda) = 2v_t^2 + k_t^2, \\
m_{61}(\lambda) &= -v_\ell e^{-v_\ell h_2}, \quad m_{62}(\lambda) = v_\ell, \quad m_{63}(\lambda) = \left[v_t^2 + k_t^2 \right] e^{-v_t h_2}, \quad m_{64}(\lambda) = v_t^2 + k_t^2, \\
m_{66}(\lambda) &= \omega^{-2} \tilde{\rho}_1^{-1} v_1, \quad f_1(\lambda) = -e^{-v_0 h_1}, \quad f_3(\lambda) = -\omega^{-2} \tilde{\rho}_1^{-1} v_1 e^{-v_0 h_1}.
\end{aligned}$$

Решая систему (24), найдем представление для функции $y(\lambda)$:

$$y(\lambda) = |M_5(\lambda)| Z(\lambda) / |M(\lambda)|, \quad (25)$$

где $|M(\lambda)|$ – определитель матрицы $M(\lambda)$; $|M_5(\lambda)|$ – определитель матрицы $M_5(\lambda)$; $M_5(\lambda)$ – матрица $M(\lambda)$, в которой пятый столбец заменен на вектор $F(\lambda)$.

Подставим функцию $y(\lambda)$ из (25) в (15), учитывая представление (20), и установим связь между коэффициентами \tilde{T}_k и функцией $Z(\lambda)$. В полученном выражении заменим функцию $Z(\lambda)$ представлением (23), коэффициенты x_n представлением (18) и получим связь между коэффициентами \tilde{T}_k и \tilde{X}_p :

$$\tilde{T}_k = \sum_{p=0}^{\infty} S_{pk} \tilde{X}_p + \tilde{f}_k, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где

$$S_{pk} = 4\xi_0^3 (-1)^k i^{k+p} \frac{d}{d\xi_0} j_p(\xi_0) \frac{d}{d\xi_0} j_k(\xi_0) \int_0^{\infty} \frac{|M_5(\lambda)|}{k_0 v_0 |M(\lambda)|} P_p \left(\frac{iv_0}{k_0} \right) P_k \left(\frac{iv_0}{k_0} \right) e^{-v_0 h_1} \lambda d\lambda;$$

$$\tilde{f}_k = 4\xi_0^3 i(-i)^{k+1} \frac{d}{d\xi_0} j_k(\xi_0) \int_0^{\infty} \frac{|M_5(\lambda)|}{v_0 |M(\lambda)|} P_k \left(\frac{iv_0}{k_0} \right) e^{-v_0 h_1} \lambda d\lambda.$$

Преобразуем правую часть системы (21). Для этого исключим из правой части коэффициенты \tilde{T}_k с помощью представления (26) и получим бесконечную СЛАУ второго порядка относительно \tilde{X}_n :

$$\tilde{X}_n - \sum_{k=0}^{\infty} (g_k R_{nk} - \alpha_{nk}) \tilde{X}_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{f}_k + (-1)^k \tilde{f}_k \right) R_{nk}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (27)$$

$$\alpha_{nk} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p R_{np} S_{kp}.$$

Находим связь между функцией $d(\lambda)$, входящей в представление вторичного давления $p_1(\rho, z)$ в области D_1 , и коэффициентами \tilde{X}_n – решениями системы (27). Из системы (24) следует, что

$$d(\lambda) = |M_6(\lambda)| |Z(\lambda)| / |M(\lambda)|, \quad (28)$$

где $|M_6(\lambda)|$ – определитель матрицы $M_6(\lambda)$; $M_6(\lambda)$ – матрица $M(\lambda)$, в которой шестой столбец заменен на вектор $F(\lambda)$.

Учитывая связь функции $Z(\lambda)$ с коэффициентами \tilde{X}_n (см. формулы (18), (23)), имеем

$$d(\lambda) = \frac{|M_6(\lambda)|}{|M(\lambda)| k_0 v_0} \sum_{p=0}^{\infty} i^{-p-1} P_p \left(\frac{iv_0}{k_0} \right) \left((-1)^p \tilde{X}_p \frac{d}{d\xi_0} j_p(\xi_0) + f_p \right).$$

Коэффициент ослабления (экранирования) звукового поля в области D_1 вычисляем по формуле

$$K(\rho, z) = |p_1(\rho, z)| / |p_c|, \quad z > h_1 + h_2.$$

Если незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 отсутствует, то решение задачи сводится к решению системы (24), а величина $Z(\lambda) = 1/v_0$. В этом случае функция $d(\lambda)$, входящая в представление вторичного давления $p_1(\rho, z)$ в области D_1 , вычисляется по формуле

$$d(\lambda) = |M_6(\lambda)| / |M(\lambda)|, \quad (29)$$

где $|M_6(\lambda)|$ – определитель матрицы $M_6(\lambda)$; $M_6(\lambda)$ – матрица $M(\lambda)$, в которой шестой столбец заменен на вектор $F(\lambda)/v_0$.

3. Вычислительный эксперимент

Используя систему компьютерной математики Mathcad [24], были проведены вычисления коэффициента ослабления $K(\rho, z)$ звукового поля в области D_1 для некоторых параметров задачи.

Специальные функции $j_n(x)$, $h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x)$ ($y_n(x)$ – сферическая функция Бесселя второго рода), $J_0(x)$ и полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta)$ вычислялись с помощью встроенных функций [24]. Производные сферических функций вычислялись с помощью формулы [20, с. 258]

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = n f_n(x) / x - f_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Величины $v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$, $j=0, 1$, $v_\ell = \sqrt{\lambda^2 - k_\ell^2}$, $v_\tau = \sqrt{\lambda^2 - k_\tau^2}$, входящие в представление (11)–(14), вычислялись по формуле

$$v_\tau = \begin{cases} \sqrt{\lambda^2 - k_\tau^2}, & \lambda \geq k_\tau; \\ -i\sqrt{k_\tau^2 - \lambda}, & 0 \leq \lambda < k_\tau. \end{cases}$$

Бесконечная система (27) решалась методом усечения [19]. Для получения достоверного решения конечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо проверить обу-

словленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы меньше 300 [25, с.150]. Для вычисления числа обусловленности матрицы использовались встроенные функции `cond1` (число обусловленности в норме L_1 [26]), `cond2` (в норме L_2) и `conde` (в евклидовой норме). Вычислительный эксперимент показал, что порядок усечения системы (27) можно взять равным 17 для рассмотренных параметров задачи. Это обеспечивает решение конечной системы (27) с точностью 10^{-4} и число обусловленности не будет превосходить 35. Несобственные интегралы вычислялись приемами, предложенными в [26].

На рис. 2 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0, z)$, $z > h_1 + h_2$, для некоторых значений угла θ_0 при отсутствии незамкнутой сферической оболочки Γ_1 , если область D_0 заполнена воздухом ($\tilde{\rho}_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 343 \text{ м/с}$), область D_1 – водой ($\tilde{\rho}_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 1500 \text{ м/с}$), область D_2 – каучуком ($\tilde{\rho} = 910 \text{ кг/м}^3$, $E = 0,79 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ – модуль Юнга, $\nu = 0,46$ – коэффициент Пуассона), $h_1 = 4 \text{ м}$, $h_2 = 0,01 \text{ м}$, $a = 0,2 \text{ м}$, $f = 50 \text{ Гц}$, $\omega = 2\pi f$. Коэффициенты Ламе связаны с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношениями

$$\tilde{\lambda} = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)), \quad \tilde{\mu} = E / (2 + 2\nu).$$

Графики показывают, что при увеличении значения угла θ_0 график коэффициента $K(0, z)$ совпадает с графиком коэффициента $K(0, z)$ в случае отсутствия незамкнутой сферической оболочки Γ_1 . Таким образом, малый угол раствора $\pi - \theta_0$ тонкой сферической оболочки Γ_1 практически не оказывает влияние на коэффициент экранирования.

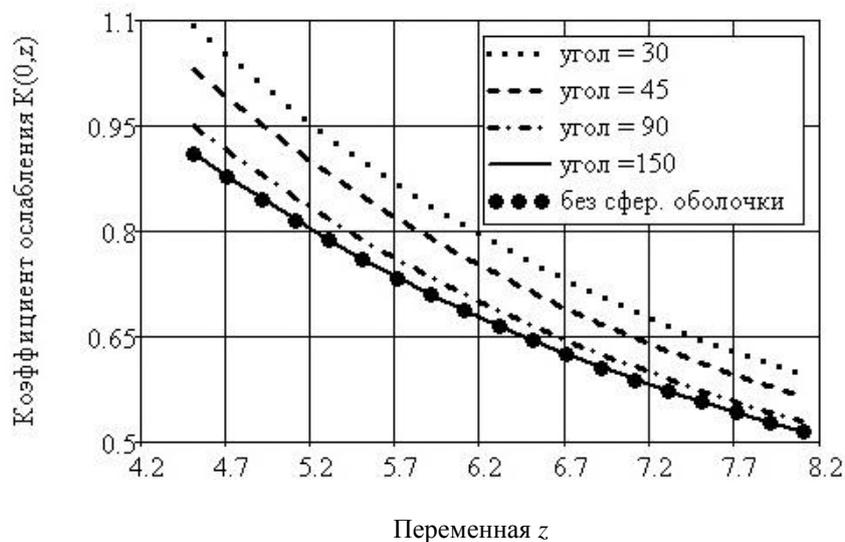


Рис. 2. Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0, z)$ для некоторых значений угла θ_0

На рис. 3 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0, z)$, $z > h_1 + h_2$, если область D_0 заполнена машинным маслом ($\tilde{\rho}_0 = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1390 \text{ м/с}$), область D_1 – морской водой ($\tilde{\rho}_1 = 1030 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 1510 \text{ м/с}$), глицерином ($\tilde{\rho}_1 = 1260 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 1904 \text{ м/с}$), керосином ($\tilde{\rho}_1 = 800 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 2330 \text{ м/с}$), кирпичом ($\tilde{\rho}_1 = 1500 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 3600 \text{ м/с}$), область D_2 – алюминием ($\tilde{\rho} = 2600 \text{ кг/м}^3$, $E = 65 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ – модуль Юнга, $\nu = 0,32$ – коэффициент Пуассона), $h_1 = 2 \text{ м}$, $h_2 = 0,01 \text{ м}$, $a = 0,1 \text{ м}$, $f = 150 \text{ Гц}$, $\theta_0 = \pi / 2$.

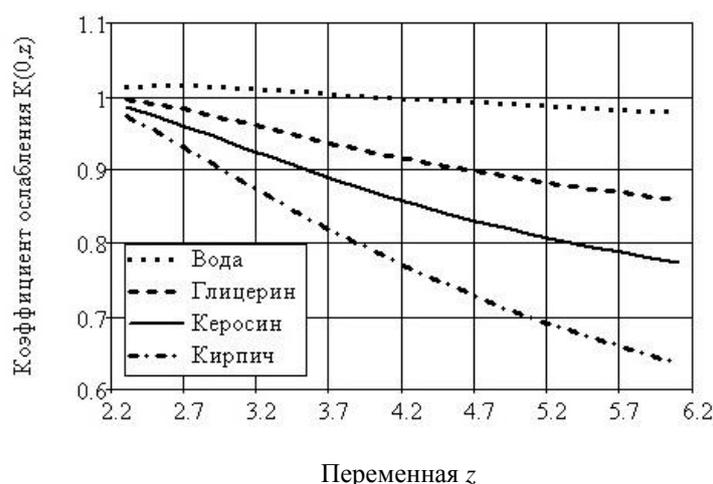


Рис. 3. Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,z)$ в случае заполнения области D_1 различными веществами

На рис. 4 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,z)$, $z > h_1 + h_2$, если область D_0 заполнена машинным маслом ($\tilde{\rho}_0 = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1390 \text{ м/с}$), область D_1 – водой ($\tilde{\rho}_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 1500 \text{ м/с}$), область D_2 – каучуком ($\tilde{\rho} = 910 \text{ кг/м}^3$, $E = 0,79 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,46$), стеклом ($\tilde{\rho} = 2500 \text{ кг/м}^3$, $E = 49 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,2$), вольфрамом ($\tilde{\rho} = 19250 \text{ кг/м}^3$, $E = 39 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,29$), иридием ($\tilde{\rho} = 22650 \text{ кг/м}^3$, $E = 52,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,26$), $h_1 = 3 \text{ м}$, $h_2 = 0,01 \text{ м}$, $a = 0,25 \text{ м}$, $\theta_0 = \pi/2$, $f = 50 \text{ Гц}$.

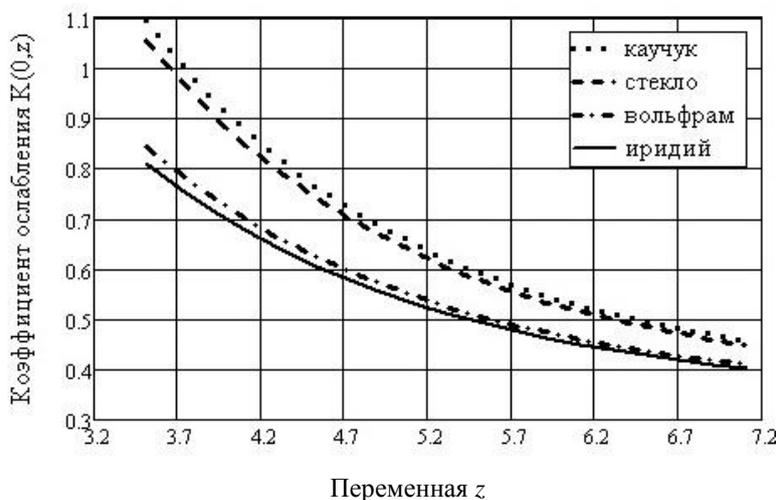


Рис. 4. Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,z)$ в случае заполнения области D_2 различными веществами

На рис. 5 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,z)$, $z > h_1 + h_2$, для различных значений частоты исходного звукового поля в случае, если область D_0 заполнена воздухом ($\tilde{\rho}_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 343 \text{ м/с}$), область D_1 – азотом ($\tilde{\rho}_1 = 830 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 962 \text{ м/с}$), область D_2 – алюминием ($\tilde{\rho} = 2600 \text{ кг/м}^3$, $E = 65 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,32$), $h_1 = 4 \text{ м}$, $h_2 = 0,02 \text{ м}$, $a = 0,3 \text{ м}$, $\theta_0 = \pi/2$.

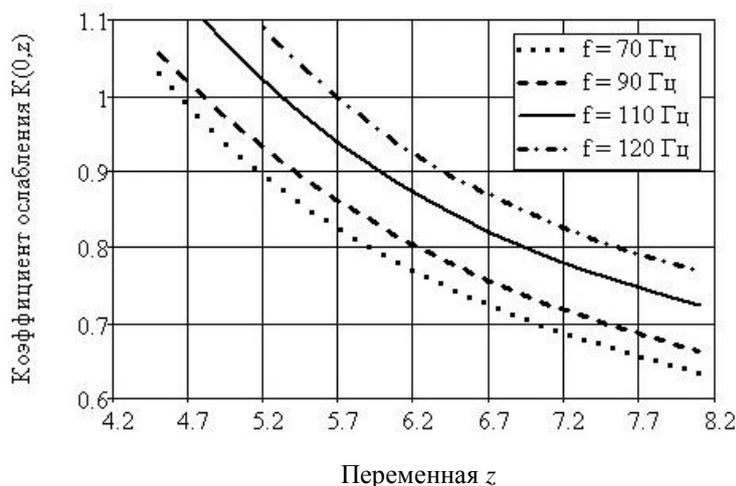


Рис. 5. Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0, z)$ для различных значений частоты исходного поля

На рис. 6 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0, z)$, $z > h_1 + h_2$, в случае отсутствия незамкнутой сферической оболочки Γ_1 для различных значений h_2 , если область D_0 заполнена машинным маслом ($\tilde{\rho}_0 = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1390 \text{ м/с}$), область D_1 – керосином ($\tilde{\rho}_1 = 800 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 2330 \text{ м/с}$), область D_2 – каучуком ($\tilde{\rho} = 910 \text{ кг/м}^3$, $E = 0,79 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,46$), $h_1 = 3,5 \text{ м}$, $f = 50 \text{ Гц}$.

Графики показывают, что при уменьшении толщины h_2 упругого слоя практически отсутствует экранирующий эффект.

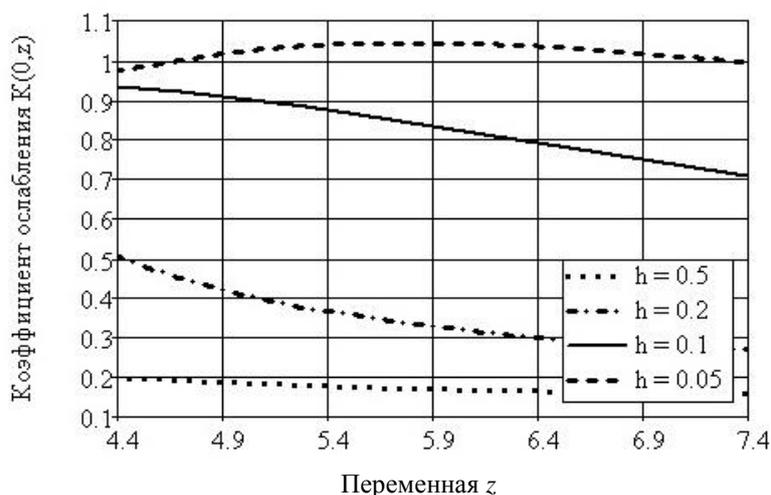


Рис. 6. Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0, z)$ для различных значений толщины упругого слоя в случае отсутствия тонкой сферической оболочки

Заключение

С помощью теоремы сложения для цилиндрических и сферических волновых функций решение поставленной задачи о проникновении звукового поля через плоский упругий слой сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра. Парные уравнения преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго

рода с вполне непрерывным оператором. В качестве источника звукового поля рассматривается сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки.

Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи, плотности сред, модуля Юнга, коэффициента Пуассона и скорости звука в средах на значение коэффициента ослабления звукового поля. Вычислительные эксперименты показали, что если упругий слой экрана заполнен веществом с большим значением модуля Юнга, эффективность экранирования улучшается. Коэффициент экранирования уменьшается, если скорости распространения звука в средах, в которых не распространяются сдвиговые волны, различные. Коэффициент ослабления поля зависит от круговой частоты звукового источника ω и угла θ_0 : с увеличением частоты ω коэффициент экранирования увеличивается, с увеличением угла θ_0 – уменьшается. Разработанная методика и программное обеспечение могут найти практическое использование при изготовлении звуковых экранов.

Список литературы

1. Бреховских, Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. – М. : Изд-во АН СССР, 1957. – 502 с.
2. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostic / A.P. Sarvazyan [et al.] // *Ultrasonics Med. Biol.* – 1998. – Vol. 24. – P. 1419–1435.
3. Иванов, Н.И. Инженерная акустика. Теория и практика борьбы с шумом / Н.И. Иванов. – М. : Логос, 2008. – 424 с.
4. Абракитов, В.Э. Многослойная ограждающая панель / В.Э. Абракитов, В.А. Руссова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://abrakitov.narod.ru/Monograph/6-1.htm>. – Дата доступа : 07.09.2013.
5. IV Всерос. науч.-практ. конф. с международным участием «Защита населения от повышенного шумового воздействия» // [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://onlinereg.ru/noise2013>. – Дата доступа : 07.10.2013.
6. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями / Е.В. Глушков [и др.] // *Акустический журнал*. – 2012. – № 3. – С. 370–385.
7. Fatyanov, A.G. High-performance modeling acoustic and elastic waves using the parallel Dichotomy Algorithm / A.G. Fatyanov, A.V. Terekhov // *Journal of Computational Physics*. – 2011. – Vol. 230. – P. 699–715.
8. Investigation of Lamb elastic waves in anisotropic multilayered composites applying the Green's matrix / A. Karmazin [et al.] // *Ultrasonics*. – 2011. – Vol. 51. – P. 17–28.
9. An analytical solution for wave-induced seabed response in a multi-layered poro-elastic seabed / X-L. Zhou [et al.] // *Ocean Engineering*. – 2011. – Vol. 38. – P. 119–129.
10. Андреев, В.Р. Стоячие сдвиговые волны в слоистых резиноподобных средах / В.Р. Андреев, Т.Б. Крит, О.А. Сапожников // *Акустический журнал*. – 2010. – Т. 56. – № 5. – С. 579–586.
11. Acoustic wave transmission through piezoelectric structured materials / M. Lam [et al.] // *Ultrasonics*. – 2009. – Vol. 49. – P. 424–431.
12. Ito, K. A domain decomposition solver for acoustic scattering by elastic objects in layered media / K. Ito, Z. Qiao, J. Toivanen // *Journal of Computational Physics*. – 2008. – Vol. 227. – P. 8685–8698.
13. Sadler, J. A ray technique to calculate reflected and transmitted waves in layered media / J. Sadler, R. Gr. Maev // *ScienceDirect*. – 2008. – Vol. 48. – P. 687–696.
14. Pokrovski, A.A. Lax-Phillips theory for sound waves scattering by thin infinite elastic planes / A.A. Pokrovski // *Computers Math. Applic.* – 1997. – Vol. 34. – P. 143–171.
15. Schmidt, H. Efficient numerical solution technique for wave propagation in horizontally stratified environments / H. Schmidt, F.B. Jensen // *Comp. and Maths. with Appls.* – 1985. – Vol. 11. – P. 699–715.
16. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1970. – 873 с.
17. Шендарев, Е.Л. Излучение и рассеяние звука / Е.Л. Шендарев. – Л. : Судостроение, 1989. – 304 с.

18. Ерофеенко, В.Т. Моделирование двухсторонних граничных условий для акустических волн на упругом экране / В.Т. Ерофеенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 76–84.
19. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
20. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
21. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.
22. Шушкевич, Г.Ч. Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения / Г.Ч. Шушкевич. – Гродно : ГрГУ, 1999. – 238 с.
23. Резуненко, В.А. Дифракция плоской звуковой волны на сфере с круговым отверстием / В.А. Резуненко // Вісник Харків. нац. універ. ім. В.Н. Каразіна. Сер. «Мат., прик. мат. і мех.». – 2009. – № 850. – С. 71–77.
24. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 1. / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 287 с.
25. Петров, Ю. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю. Петров. – СПб. : БХВ – Петербург, 2012. – 160 с.
26. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 848 с.

Поступила 11.11. 2013

*Гродненский государственный
университет им. Янки Купалы,
Гродно, Ожешко, 22
e-mail: g_shu@tut.by*

G.Ch. Shushkevich, N.N. Kiselyova

SOUND FIELD SHIELDING BY FLAT ELASTIC LAYER AND THIN UNCLOSED SPHERICAL SHELL

An analytical solution of a boundary problem describing the process of penetration of a sound field of a spherical radiator located inside a thin unclosed spherical shell through a flat elastic layer is constructed. An influence of some parameters of the problem on the value of the attenuation coefficient (screening) of the sound field was studied by using a numerical simulation.