

УДК 539.3

О.Л. Швед

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕВИАТОРНОГО СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается перспективный подход к созданию нелинейных моделей упругопластичности на основе обобщения нелинейных моделей упругости. Для обобщенного материала Мурнагана предлагается способ нахождения вектора нормали к поверхности девиаторного сечения в условиях анизотропии.

Введение

Известно, что состояние теории нелинейно упругопластических материалов в отличие от нелинейно упругих материалов является неудовлетворительным [1]. Об этом свидетельствуют постоянно появляющиеся публикации, направленные на пересмотр основ теории. В упругости такого не наблюдается. Теоретические модели пытаются вывести из экспериментальных фактов, при этом отсутствует общая теоретическая концепция.

В настоящем исследовании взамен концепции гладкого дифференцированного многообразия, которая в упругопластичности работает «за пределами своих возможностей», предлагается использовать либо полностью, либо частично принцип сохранения потенциальной природы упругой деформации.

1. Подход к построению модели упругопластического материала

В работах [2, 3] предложены определяющие соотношения упругопластичности, уточненные по результатам проведенных исследований. Геометрически нелинейная модель упругости [4, 5] обобщается на геометрически нелинейную модель упругопластичности. Транспонированный градиент деформации $\overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T$ в упругом законе заменяется неособенным тензором \mathbf{F}_e , который определяется не в рамках кинематики. Напряжения в упругопластичности для анизотропного материала не связаны с мерой деформации, порождаемой чисто геометрическими построениями, как это получается в упругости [1].

Сохраняется потенциальная природа упругой деформации: требуется существование потенциалов напряжений и их скоростей. Второе требование является обязательным, а первое оказывается желательным, поскольку позволяет описать важное явление роста анизотропии материала в результате пластической деформации. Кстати, само понятие пластической деформации в предлагаемом подходе не определяется в общем случае в силу неоднозначности его определения [6]. Потенциальность в напряжениях ввел Грин (1839) для упругих материалов и для неупругих не использовал. Потенциальность в скоростях напряжений предлагали Хилл (1950), Ключников (1960) и другие исследователи для упругопластических материалов. Требование двойной потенциальности ранее не предлагалась, поскольку в стандартных подходах игнорировался девиатор упругих напряжений. Это требование дает теоретическое определение девиаторных сечений поверхности текучести и, следовательно, ее самой с учетом экспериментальных данных. Экспериментальными методами определить поверхность текучести в пространстве напряжений, как недавно выяснилось, невозможно [1]. При этом в предлагаемом подходе любой гиперупругий закон нелинейной упругости позволяет определить девиаторные сечения поверхности текучести, все кривые пластичности практически совпадают и близки к кривой пластичности А.Ю. Ишлинского.

В настоящей работе используется концепция поверхности текучести в пространстве напряжений. Активный упругопластический процесс представляем попеременным чередованием пластического и упругого состояний элементов деформируемого твердого тела на основа-

нии принципа В.Д. Ключникова [7]. Он состоит в замене данного пути нагружения некоторым, как угодно близким, на участках которого свойства пластичности либо заранее известны, либо постулируются более естественно, чем на исходном пути. Здесь выбирается специальный путь нагружения. Использование указанного принципа наряду с упрощением решения проблемы формулировки определяющих соотношений позволяет смягчить жесткость условия текучести (ввиду несжимаемости материала) с целью улучшения адекватности моделирования проблемных течений при обработке металлов давлением. Упругих и пластических зон, вообще говоря, не будет.

Согласно [1] при классическом подходе существующие теории пластичности, основанные на условии текучести, не описывают опыты Треска по экструзии свинца [8]. В работе [9] для проверки теории при численном моделировании процесса прямого выдавливания форма контейнера выбрана с углом при основании более 90° , в связи с этим проблемное течение в случае прямого угла исключалось. Возможности описания проблемных течений с использованием системы LS-DYNA для геометрически линейного материала Elastic Plastic и геометрически нелинейного Vampan проверялись в работах [10, 11]. Так, при моделировании опыта Треска с практически нулевым трением [10] наблюдались значительные отклонения от эксперимента и появление застойной зоны, которая в опыте, где трение было значительно больше, отсутствовала, а моделирование явления двойного бочкообразования при осадке высоких заготовок [11] показало качественное расхождение с опытными данными. При этом численные данные указанного явления в литературе также отсутствуют. Отметим еще одно проблемное течение – явление «запирания» области высокого давления (переход материалов из пластического состояния в упругое) [12]. Оно состоит в следующем. При сжатии тонкого диска на наковальне Бриджмена [13] начиная с некоторой величины усилия в центре диска образуется и расширяется упругая область и никаким сколь угодно большим давлением не удастся изменить остаточную толщину. Аналогичное явление наблюдается при деформировании материалов в аппарате высокого давления типа наковальни с лункой. С некоторой величины усилия вытекание материала из полости лунки прекращается, т. е. материал в лунке деформируется упруго. Эти явления привычны для практиков, но необычны с точки зрения механики материалов. Возможное их объяснение – невыпуклость поверхности текучести [12]. В силу того что поверхность девиаторного сечения получилась кусочно-вогнутой и подвижность материала была увеличена за счет чередования пластических и упругих состояний элементов деформируемого твердого тела, должны описываться явление «запирания» области высокого давления и опыты Треска по экструзии свинца.

Используется векторное представление симметричных девиаторов второго ранга, скалярное произведение таких «векторов» понимается как двойное скалярное произведение тензоров. Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный ортонормированный триэдр. Задается ортонормированный тензорный базис пространства девиаторов, два первых вектора из которого имеют вид $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$. Девиатор \mathbf{N} в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ представляется в векторном виде $\mathbf{N} = \sum_i w_i \mathbf{W}_i$.

В пластическом состоянии (при течении) материал предполагаем несжимаемым. Обозначим $\nabla \mathbf{v}$ и $\nabla \mathbf{v}^T$ – градиент и транспонированный градиент скорости соответственно. При течении по соотношениям нелинейной упругости $(\overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T)^{\cdot} = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T$ при условии несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ вычисляется тензор скорости упругих напряжений с использованием объективной О-производной: $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \overset{\Omega}{\dot{\mathbf{T}}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$, где $\overset{\Omega}{\dot{\mathbf{T}}}$ – материальная производная тензора напряжений Коши \mathbf{T} ; $\mathbf{\Omega}$ – косимметричный тензор упругого спина [14].

Поверхность текучести накладывает ограничение на девиаторную составляющую $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$, где $\mathbf{D} = 2^{-1}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ – тензор скорости деформаций. Поэтому при задании тензора скорости напряжений шаровая часть удаляется, а вектор \mathbf{Q} проецируется ортогонально

нормированному вектору внешней нормали \mathbf{N} ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$) к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести, причем берется только независимая от девиатора \mathbf{D} часть его проекции K . Формально это записывается как

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}), \quad (1)$$

где K – малый скаляр, определяемый в эксперименте по двухосным растяжению и сжатию. Из (1) следует, что в силу потенциальности тензоров $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ и \mathbf{Q} (первого тензора по модельному предположению, а второго – по построению) девиатор $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}$ должен иметь потенциал. В уравнении (1) и следствии из него заключается, вероятно, суть предлагаемого подхода. Подчеркнем, что девиатор упругих напряжений $\text{dev } \mathbf{T}$, который не зависит от скоростей, здесь не игнорируется (как в классическом подходе), а используется.

При разработке модели материала наряду с техническими трудностями, вызванными громоздкостью используемых соотношений, возникает вопрос об определении вектора нормали к поверхности девиаторного сечения в условиях нетривиальной анизотропии, например, для моноклинного материала. Известно [2, 3], что вектор нормали является одним из собственных векторов оператора $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$. Для вектора нормали предлагается следующий способ его выбора из пяти вычисленных собственных векторов оператора. Из условия потенциальности девиатора $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}$ можно найти в явном виде этот вектор \mathbf{N}_0 для изотропного материала и затем сравнивать его с вычисленными векторами. Ближайший вектор к вектору \mathbf{N}_0 будет искомым. Перейдем к отысканию вектора $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0$.

2. Изотропный упругий закон Мурнагана и вспомогательные соотношения

Рассмотрим изотропный упругий материал. Потенциал напряжений вводится через тензор напряжений Пиола $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\overset{0}{\nabla} \mathbf{R})$ на основании определения элементарной работы деформации (δ – знак вариации) [4]:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}} = \mathbf{P} (\delta \vartheta = \mathbf{P} \cdot \delta \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T). \quad (2)$$

С помощью соотношений $\mathbf{T} = (\sqrt{I_3})^{-1} \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{P}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}} = 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{G}} = -\mathbf{G}^{-1} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{G}^{-1}} \cdot \mathbf{G}^{-1}$

(I_3 – главный третий инвариант \mathbf{G} , $\mathbf{G} = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}$ – мера деформации Коши – Грина) потенциал записывается через тензор напряжений Коши [4].

Потенциал скоростей напряжений определяется через О-производную, которая для изотропного материала совпадает с производной Грина – Нахди и с производной Яуманна $\overset{w}{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}$ ($\mathbf{W} = 2^{-1}(\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v})$ – тензор вихря):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}} = \overset{\Omega}{\mathbf{T}} (\delta \varphi = \overset{\Omega}{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{D}). \quad (3)$$

Будем считать, что согласно (3) тензор $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ имеет потенциал $\varphi = \varphi(\mathbf{D})$ или выражение $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{D}$ является потенциальным.

Уравнение состояния упругого тела в форме Фингера по (2) имеет вид [4]

$$\mathbf{T} = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2), \quad (4)$$

где φ_i – скалярные функции от I_1, I_2, I_3 (главных первого, второго и третьего инвариантов меры Фингера $\mathbf{F} = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}$); \mathbf{E} – единичный тензор;

$$\mathbf{T} = 2(\sqrt{I_3})^{-1} \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}; \quad \varphi_0 = I_3 \frac{\partial \varphi}{\partial I_3}; \quad \varphi_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \varphi}{\partial I_2} \right); \quad \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial I_2}. \quad (5)$$

Если выполняется только соотношение (4), материал называют «упругим». Если существует такой скаляр $\varphi = \varphi(I_1, I_2, I_3)$ – удельная потенциальная энергия деформации (мера запасенной энергии), что выполняются дополнительно соотношения (5), то материал называют гиперупругим. Исключая потенциал φ из (5) ($\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1 \partial I_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_2 \partial I_1}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1 \partial I_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_3 \partial I_1}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_2 \partial I_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_3 \partial I_2}$), получаем условия интегрируемости (условия существования потенциала):

$$-\frac{\partial \varphi_2}{\partial I_1} = \frac{\partial}{\partial I_2} (\varphi_1 + I_1 \varphi_2), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial I_1} = I_3 \frac{\partial}{\partial I_3} (\varphi_1 + I_1 \varphi_2), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial I_2} = -I_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial I_3}. \quad (6)$$

Закон Мурнагана имеет вид [4, 5]

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2), \quad \varphi_0 = a_0 I_3, \quad \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \quad \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1, \\ a_0 &= 2^{-1} v_3, \quad b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9v_1 + 18v_2 + 8v_3), \quad b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3v_1 - 4v_2), \\ b_2 &= 16^{-1}(v_1 + 2v_2), \quad b_3 = -4^{-1}(v_2 + 2v_3), \quad c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3v_2 - 4v_3), \quad c_1 = -b_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где λ, μ – постоянные Ляме второго и v_1, v_2, v_3 третьего порядков соответственно.

Получим необходимые вспомогательные соотношения. Обозначим $d_i = \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^i$, $d'_i = \mathbf{E} \cdot (\text{dev } \mathbf{F})^i$, $i = 2, 3, \dots$. По определению второго инварианта ($I_2 = 2^{-1}(I_1^2 - d_2)$) и теореме Гамильтона – Кэли ($\mathbf{F}^3 = I_1 \mathbf{F}^2 - I_2 \mathbf{F} + I_3 \mathbf{E}$, $(\text{dev } \mathbf{F})^3 = 2^{-1} d'_2 \text{dev } \mathbf{F} + 3^{-1} d'_3 \mathbf{E}$) получаем

$$d_2 = I_1^2 - 2I_2, \quad d_3 = 3I_3 + I_1^3 - 3I_1 I_2, \quad d_4 = 4I_1 I_3 + I_1^4 - 3I_1^2 I_2 + 2I_2^2, \quad d'_4 = \frac{1}{2}(d'_2)^2; \quad (8)$$

$$d_2 = 3^{-1} I_1^2 + d'_2, \quad d_3 = 9^{-1} I_1^3 + I_1 d'_2 + d'_3, \quad d_4 = 27^{-1} I_1^4 + 3^{-1} 2I_1^2 d'_2 + 3^{-1} 4I_1 d'_3 + 2^{-1} (d'_2)^2; \quad (9)$$

$$I_2 = 3^{-1} I_1^2 - 2^{-1} d'_2, \quad I_3 = 27^{-1} I_1^3 - 6^{-1} I_1 d'_2 + 3^{-1} d'_3.$$

С учетом (8) и (9) находим

$$d_2 - 3^{-1}I_1^2 = d'_2, \quad d_3 - 3^{-1}I_1d_2 = 3^{-1}2I_1d'_2 + d'_3, \quad d_4 - 3^{-1}d_2^2 = 9^{-1}4I_1^2d'_2 + 3^{-1}4I_1d'_3 + 6^{-1}(d'_2)^2, \\ (d_4 - 3^{-1}d_2^2)(d_2 - 3^{-1}I_1^3) - (d_3 - 3^{-1}I_1d_2)^2 = 6^{-1}(d'_2)^3 - (d'_3)^2.$$

Поскольку $(d'_2)^3 \geq 6(d'_3)^2$ [4], при $d'_2 > 0$ из (9) получаем

$$d_2 - 3^{-1}I_1^2 > 0, \quad d_3 - 3^{-1}I_1d_2 > 0, \quad d_4 - 3^{-1}d_2^2 > 0, \quad (d_4 - 3^{-1}d_2^2)(d_2 - 3^{-1}I_1^2) \geq (d_3 - 3^{-1}I_1d_2)^2.$$

Если положить

$$r_2 = d_2 - 3^{-1}I_1^2, \quad r_1 = -(d_3 - 3^{-1}I_1d_2), \quad r_0 = d_4 - 3^{-1}d_2^2, \quad (10)$$

последнее неравенство запишется как

$$r_0r_2 \geq r_1^2. \quad (11)$$

С точностью до малых величин d'_i из (7) – (9) находим приближенные оценки

$$\varphi_1 = -2^{-1}\mu - \nu_3 + 4^{-1}(\lambda - \nu_2 - 4\nu_3)(I_1 - 3); \\ \varphi_2 = 2^{-1}(\mu + \nu_3) + 4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3)(I_1 - 3), \quad (12)$$

где $I_1 - 3$ – также малая величина.

3. Вектор нормали к поверхности девиаторного сечения для материала Мурнагана

Вычисляем из (7) девиатор \mathbf{Q} :

$$\dot{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (\mathbf{F}^2) \dot{=} \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \\ = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}^2 + \mathbf{F}^2 \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{F} \cdot (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}, \\ \dot{I}_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 2(I_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}), \quad \dot{I}_3 = I_3\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 2I_3\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = 0, \\ \dot{\varphi}_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial I_1} \cdot \dot{I}_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial I_2} \cdot \dot{I}_2 = 2\frac{\partial \varphi_i}{\partial I_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + 2\frac{\partial \varphi_i}{\partial I_2} (I_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}) = 2A_i\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} - 2B_i\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}, \quad (13) \\ \dot{\varphi}_i = 2A_i\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} - 2B_i\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} \quad (A_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial I_2}, B_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial I_2}).$$

Учитывая, что $\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} = 0$, девиатор \mathbf{Q} с точностью до шарового тензора можно представить в виде

$$\mathbf{Q} = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\dot{\varphi}_1\mathbf{F} + \dot{\varphi}_2\mathbf{F}^2 + \varphi_1(\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) + \varphi_2(2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^2)). \quad (14)$$

По представлению (14) получаем, что девиатор \mathbf{Q} имеет потенциал

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} (2(\sqrt{I_3})^{-1}(A_1(\mathbf{F} \cdot \mathbf{D})^2 - 2B_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} - 2B_2(\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D})^2 + \varphi_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}^2 + \varphi_2(2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}^2))).$$

Вектор нормали к поверхности девиаторного сечения запишем двумя возможными способами:

$$\mathbf{N} = (\text{dev } \mathbf{T})^2 - z \text{dev } \mathbf{T} + 3^{-1} 2J_2 \mathbf{E} \quad (J_2 = -2^{-1} \mathbf{E} \cdot (\text{dev } \mathbf{T})^2) \quad (15)$$

и, как будет удобно для доказательства последующих утверждений,

$$\mathbf{N} = q\mathbf{F}^2 + \mathbf{F} - 3^{-1}(qd_2 + I_1)\mathbf{E}. \quad (16)$$

Обозначим девиатор $\delta\mathbf{D}$ как вариацию девиатора \mathbf{D} . Так как выражение $\mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{D}$ является потенциальным, то должно быть потенциальным выражение $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{D}$. В последнем выражении будет только один чисто непотенциальный член $\gamma(\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{D} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \mathbf{F}^2 \cdot \delta\mathbf{D})$. Следовательно, выполняется $\gamma = 0$ по следствию из уравнения (1).

В соотношении (14) опустим множитель $4(\sqrt{I_3})^{-1}$. Используя теорему Гамильтона – Кэли, соотношения (7) – (10), (13), (16) и учитывая условие несжимаемости $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{D} &= q\mathbf{F}^2 \cdot \delta\mathbf{D} + \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{D} \quad (\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = 0), \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} &= 2^{-1}(\dot{\phi}_1 \mathbf{F} + \dot{\phi}_2 \mathbf{F}^2) \cdot \mathbf{N} + 2^{-1} \phi_1 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} + 2^{-1} \phi_2 (2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^2) \cdot \mathbf{N}, \\ 2^{-1}(\dot{\phi}_1 \mathbf{F} + \dot{\phi}_2 \mathbf{F}^2) \cdot \mathbf{N} &= 2^{-1}(\dot{\phi}_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} + \dot{\phi}_2 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{N}) = \\ &= ((-B_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} - B_2 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{N}) \mathbf{F}^2 + (A_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} + A_2 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{N}) \mathbf{F}) \cdot \mathbf{D}, \\ 2^{-1} \phi_1 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} &= \phi_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = \phi_1 (q\mathbf{F}^3 + \mathbf{F}^2 - 3^{-1}(qd_2 + I_1)\mathbf{F}) \cdot \mathbf{D} = \\ &= \phi_1 (\xi_2 \mathbf{F}^2 + \xi_1 \mathbf{F}) \cdot \mathbf{D}, \\ 2^{-1} \phi_2 (2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}^2) \cdot \mathbf{N} &= 2\phi_2 \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 2\phi_2 (q\mathbf{F}^4 + \mathbf{F}^3 - 3^{-1}(qd_2 + I_1)\mathbf{F}^2) \cdot \mathbf{D} = \\ &= 2\phi_2 (\eta_2 \mathbf{F}^2 + \eta_1 \mathbf{F}) \cdot \mathbf{D}, \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{F} &= r_2 - qr_1, \xi_2 = 1 + qI_1, \xi_1 = -3^{-1}I_1 - q(2^{-1}I_1^2 - 6^{-1}d_2), \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^2 &= -r_1 + qr_0, \eta_2 = 3^{-1}2I_1 + q(2^{-1}I_1^2 + 6^{-1}d_2), \eta_1 = -I_2 + q(I_3 - I_1 I_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Вычисляя $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{D}$ с точностью до потенциальных членов, находим

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1 + 2\phi_2 \gamma_2, \gamma_2 = \eta_2 - q\eta_1, \gamma_1 = \xi_2 - q\xi_1; \\ \gamma_0 &= -\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \mathbf{B}_1 - \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{N} \mathbf{B}_2 - q(\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \mathbf{A}_1 + \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{N} \mathbf{A}_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17), (18) для $j = 0, 1, 2$ получаем

$$0 = \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1 + 2\phi_2 \gamma_2, \quad \gamma_j = q^2 Q_{2j} + q Q_{1j} + Q_{0j}; \quad (19)$$

$$0 = \gamma = Q_2 q^2 + Q_1 q + Q_0, \quad Q_j = Q_{j0} + \phi_1 Q_{j1} + 2\phi_2 Q_{j2}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Q_{20} &= r_1 A_1 - r_0 A_2, & Q_{10} &= -r_2 A_1 + r_1 (A_2 + B_1) - r_0 B_2, & Q_{00} &= -r_2 B_1 + r_1 B_2, \\ Q_{21} &= 2^{-1} I_1^2 - 6^{-1} d_2, & Q_{11} &= 3^{-1} 4 I_1, & Q_{01} &= 1, \\ Q_{22} &= -(I_3 - I_1 I_2), & Q_{12} &= I_2 + 2^{-1} I_1^2 + 6^{-1} d_2, & Q_{02} &= 3^{-1} 2 I_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя (7) – (9), (12), (20) с точностью до величин $I_1 - 3$ и d'_i более высоких порядков, получаем

$$\begin{aligned} Q_0 &= 2^{-1}3\mu + v_3 + (I_1 - 3)(4^{-1}\lambda + 3^{-1}2\mu + 4^{-1}3v_2 + 3^{-1}5v_3) + (-4^{-1}v_2 - 2^{-1}v_3)d'_2; \\ Q_1 &= -\mu - 3v_3 + (I_1 - 3)(\lambda + 3^{-1}\mu - 2^{-1}v_2 - 4v_3) + (3^{-1}\mu + 6^{-1}v_2 + 2^{-1}v_3)d'_2; \\ Q_2 &= -\mu - 3v_3 + (I_1 - 3)(\lambda + 3^{-1}\mu - 2^{-1}v_2 - 3^{-1}14v_3) - (12^{-1}11\mu + 3^{-1}2v_2 + 6^{-1}11v_3)d'_2, \end{aligned} \quad (22)$$

где $(I_1 - 3)$ и d'_2 – малые величины, так что значения Q_i определяются главным образом первыми слагаемыми.

Если $Q_2 \neq 0$, всегда имеются два, возможно, комплексных или равных действительных значения q_1, q_2 решения уравнения (20) $Q_2q^2 + Q_1q + Q_0 = 0$. Им соответствуют два девиатора $\mathbf{N}_i = q_i\mathbf{F}^2 + \mathbf{F} - 3^{-1}(q_id_2 + I_1)\mathbf{E}$ ($i=1, 2$). Условие их ортогональности $\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0$ имеет вид $r_0q_1q_2 - r_1(q_1 + q_2) + r_2 = 0$ по (10), (16), и с учетом (20) находим

$$r_2Q_2 + r_1Q_1 + r_0Q_0 = 0, \quad (23)$$

где величины r_i, Q_i определяются по (10), (20) и (21).

Значения q_1, q_2 будут вещественными, если выполняется $Q_1^2 - 4Q_0Q_2 > 0$ при $Q_2 \neq 0$. Недопустимыми значениями упругих постоянных согласно (22) являются значения $\{(\mu, v_3), (v_3 \leq -3^{-1}\mu) \wedge (v_3 \geq -\mu)\}$. При $Q_0Q_2 > 0$ возможно следующее рассуждение. Используя (11), получаем $2Q_0Q_2(2r_1^2 - r_0r_2) \leq 2Q_0Q_2r_0r_2 < Q_0^2r_0^2 + Q_2^2r_2^2$, $4Q_0Q_2 < r_1^{-2}(r_0Q_0 + r_2Q_2)^2 = Q_1^2$ по (23).

Докажем теперь условие ортогональности (23). Непосредственно проверяем по (8) – (10), (21), (23) тождественность равенств

$$r_2Q_{2i} + r_1Q_{1i} + r_0Q_{0i} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (24)$$

Далее вычисляем

$$r_2Q_{20} + r_1Q_{10} + r_0Q_{00} = -(r_0r_2 - r_1^2)(A_2 + B_1) = 0 \quad (25)$$

согласно одному из условий интегрируемости (6): $\frac{\partial\varphi_2}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial I_2} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial I_2}$.

Умножая первое уравнение (24) на φ_1 , второе на $2\varphi_2$ и складывая их с уравнением (25), находим $0 = \varphi_1(r_2Q_{21} + r_1Q_{11} + r_0Q_{01}) + 2\varphi_2(r_2Q_{22} + r_1Q_{12} + r_0Q_{02}) + r_2Q_{20} + r_1Q_{10} + r_0Q_{00} = r_2(Q_{20} + \varphi_1Q_{21} + 2\varphi_2Q_{22}) + r_1(Q_{10} + \varphi_1Q_{11} + 2\varphi_2Q_{12}) + r_0(Q_{00} + \varphi_1Q_{01} + 2\varphi_2Q_{02}) = r_2Q_2 + r_1Q_1 + r_0Q_0$.

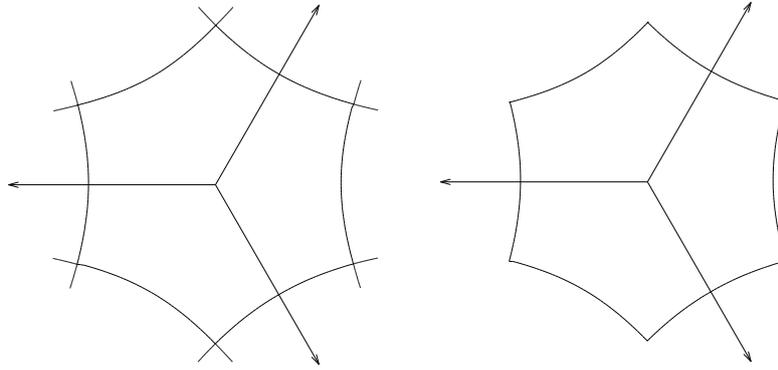
Следовательно, условие ортогональности (23) выполняется вследствие гиперупругости материала Мурнагана. К такому же выводу приходим в [15] для закона Синьорини. Можно показать, что этот факт имеет место при использовании в данном подходе любого гиперупругого материала. Таким образом, для этого материала при изотропии оба способа определения девиаторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ приводят к одному результату. Для негиперупругого материала возможно появление новых решений при вычислении $\gamma = 0$, поскольку при использовании собственных векторов симметричного оператора таких решений не получается.

Отметим, что для практического использования девиатора \mathbf{N} больше подходит представление (15). Его следует дополнить с учетом (20) и (21) соотношениями, которые дадим без вывода (аналогичные выкладки приведены в [16]):

$$\begin{aligned} Z_2 z^2 + Z_1 z + Z_0 &= 0, Z_0 = Q_0 \beta_4^2 + Q_1 \beta_2 \beta_4 + Q_2 \beta_2^2; \\ Z_1 &= 2Q_0 \beta_3 \beta_4 + Q_1 (\beta_1 \beta_4 + \beta_2 \beta_3) + 2Q_2 \beta_1 \beta_2, Z_2 = Q_0 \beta_3^2 + Q_1 \beta_1 \beta_3 + Q_2 \beta_1^2; \\ \beta_1 &= -2\varphi_2, \beta_2 = 4(\sqrt{I_3})^{-1} (\varphi_2^2 (I_1^2 - I_2) + 2\varphi_1 \varphi_2 I_1 + 2\varphi_2 \varphi_3 + \varphi_1^2); \\ \beta_3 &= -\varphi_1, \beta_4 = 4(\sqrt{I_3})^{-1} (\varphi_2^2 (I_3 - I_1 I_2) - 2\varphi_1 \varphi_2 I_2 + 2\varphi_1 \varphi_3) \quad (\varphi_3 = -3^{-1} (\varphi_1 I_1 + \varphi_2 d_2)). \end{aligned}$$

Представления (15) и (16) следует, конечно, нормировать и задать z, q с учетом знака $J_3 = 3^{-1} \mathbf{E} \cdot (\text{dev } \mathbf{T})^3$:

$$z = (-Z_1 + s\sqrt{Z_1^2 - 4Z_2 Z_0}) (2Z_2)^{-1}, \quad q = (-Q_1 + s\sqrt{Q_1^2 - 4Q_2 Q_0}) (2Q_2)^{-1}, \quad s = \begin{cases} 1 (J_3 \geq 0), \\ -1 (J_3 \leq 0). \end{cases} \quad (26)$$



Образование кривой пластичности

На рисунке в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ представлены результаты расчета кривой пластичности. Стрелками обозначены проекции на эту плоскость базисных диад $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$. Данные о постоянных Ляме взяты для молибдена из [4]: $\lambda = 1,63, \mu = 1,37, \nu_1 = -4,29, \nu_2 = -2,58, \nu_3 = -3,67 (10^5 \text{ МПа})$. Слева показаны представители двух семейств кривых, из которых получается изображенная справа кривая.

Заключение

Для вектора нормали к поверхности девиаторного сечения предлагается способ его выбора в условиях любой анизотропии из пяти вычисленных собственных векторов оператора \mathbf{Q} . Из условия потенциальности девиатора $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}$ по (1) находится в явном виде вектор \mathbf{N}_0 при изотропии согласно (16), (20), (21), (26). Затем он сравнивается с вычисленными собственными векторами. Ближайший из них к вектору \mathbf{N}_0 будет искомым вектором нормали при анизотропии. Способ выбора эффективен вне окрестности значения $J_3 = 0$. В самой окрестности требуется дополнительная процедура визуализации возможных векторов нормалей. Условие, что вектор нормали является одним из собственных векторов оператора \mathbf{Q} для обобщенно упругого материала, является только достаточным. Однако, например, для тела Сетха [4] оно является и необходимым.

Список литературы

1. Жилин, П.А. Основные уравнения неупругих сред / П.А. Жилин // Актуальные проблемы механики. Труды XXVIII летней школы. – СПб., 2001. – С. 14–58.
2. Швед, О.Л. О возможных определяющих соотношениях нелинейной упругопластичности / О.Л. Швед // Труды VII Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела. – Ростов н/Д., 2013. – Т. II. – С. 219–223.
3. Швед, О.Л. Определяющие соотношения ортотропного упругопластического материала / О.Л. Швед // Там же. – С. 224–228.
4. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
5. Murnagan, F.D. Finite deformation of an elastic solid / F.D. Murnagan. – N.Y. : Dover, 1967. – 140 p.
6. Naghdi, P.M. A critical review of the state of finite plasticity / P.M. Naghdi // ZAMP. – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.
7. Ключников, В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности / В.Д. Ключников. – М. : МГУ, 1994. – 189 с.
8. Белл, Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации / Дж.Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
9. Поздеев, А.А. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А.А. Поздеев, П.В. Трусов, Ю.И. Няшин. – М. : Наука, 1986. – 232 с.
10. Швед, О.Л. Математическое моделирование процесса прямого выдавливания свинца / О.Л. Швед, А.А. Абрамов // Информатика. – 2007. – № 4 (16). – С. 133–136.
11. Швед, О.Л. Исследование эффекта двойного бочкообразования при обработке металлов давлением с использованием системы LS-DYNA / О.Л. Швед, А.А. Абрамов // Информатика. – 2009. – № 1 (21). – С. 17–24.
12. Левитас, В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В.И. Левитас. – Киев : Наукова думка, 1987. – 232 с.
13. Бриджмен, П.В. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / П.В. Бриджмен. – М. : Изд-во иностр. лит., 1955. – 444 с.
14. Швед, О.Л. Определение тензора упругого спина в нелинейной теории пластичности / О.Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 52–58.
15. Махнач, В.И. Начальное условие пластичности при конечных деформациях / В.И. Махнач, О.Л. Швед // Вести НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С.95–99.
16. Швед, О.Л. Вариант определяющих соотношений идеальнопластической среды при конечных деформациях / О.Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэх. навук. – 2001. – № 1. – С. 120–125.

Поступила 6.02.2014

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

O.L. Shwed

**DEFINING DEVIATORIC SECTION OF THE FLUIDITY SURFACE
FOR MATHEMATICAL MODELING OF ELASTOPLASTIC
BEHAVIOR OF MATERIALS**

A prospective approach to the development of nonlinear models of elastoplasticity based on the generalization of nonlinear elasticity models is considered. For generalized Murnagan information, a way of finding a normal vector to the surface of deviatoric section under the condition of anisotropy is suggested.