

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.8; 621.3:007; 621.3:001.891.57
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2026-23-3-24-48>

Поступила в редакцию | Received 13.07.2026
Подписана в печать | Accepted 03.08.2026
Опубликована | Published 30.09.2026

Совместная оптимизация размещения разнородной зарядной инфраструктуры, маршрутизации разнотипных электробусов и расписаний зарядки

Н. Н. Гушинский, М. Я. Ковалев, Б. М. Розин✉

✉E-mail: rozin@newman.bas-net.by

*Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь*

Аннотация

Цели. При замене дизельных автобусов электробусами актуальной является задача выбора состава парка электробусов и назначения электробусам сервисных рейсов из заданного набора, зарядной инфраструктуры и расписаний зарядки. Цель исследования заключается в создании моделей и методов получения экономически эффективных решений этой задачи для разнотипных электробусов и зарядных станций при различных объемах пассажиропотока для разных рейсов.

Методы. Используются методы теории множеств, теории графов, исследования операций, математического программирования.

Результаты. Разработана математическая модель задачи оптимизации парка разнотипных электробусов, их маршрутизации, распределения по депо в начале и конце интервала планирования, определения мест и количества разнотипных зарядных станций на терминалах маршрутов и расписания зарядки. В качестве целевой функции выбраны общие дневные капитальные и операционные затраты на электробусы, зарядные станции и потребленную электроэнергию. Предложена двухуровневая декомпозиционная схема решения задачи, на верхнем уровне которой определяются дневные задания электробусов (назначение разнотипным электробусам последовательностей сервисных рейсов с различным объемом пассажиропотока), а на нижнем – распределение электробусов по депо, размещение зарядных станций на терминалах маршрутов и расписания зарядки электробусов при фиксированном назначении на рейсы. Для решения подзадачи верхнего уровня предложен эвристический алгоритм локального поиска, для подзадачи нижнего уровня разработана модель смешанного целочисленного линейного программирования.

Заключение. Решение подзадачи верхнего уровня заключается в выборе назначения электробусов различных типов на сервисные рейсы с разным объемом пассажиропотока. Для решения сформулированной подзадачи нижнего уровня можно использовать стандартные решатели, например Gurobi Optimizer.

Ключевые слова: электробус, аккумуляторная батарея, станция зарядки, оптимизация, смешанное целочисленное линейное программирование

Благодарности. Исследование выполнялось при частичной поддержке проекта БРФФИ № Ф26КИ-018 «Методы искусственного интеллекта при построении расписаний для современного производства, логистики и электротранспорта».

Для цитирования. Гушинский, Н. Н. Совместная оптимизация размещения разнородной зарядной инфраструктуры, маршрутизации разнотипных электробусов и расписаний зарядки / Н. Н. Гушинский, М. Я. Ковалев, Б. М. Розин // Информатика. – 2026. – Т. 23, № 3. – С. 24–48. – <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2026-23-3-24-48>.

Конфликт интересов. М. Я. Ковалев является членом редакционной коллегии журнала «Информатика» с 2009 г., но не имеет никакого отношения к решению опубликовать эту статью. Статья прошла принятую в журнале процедуру рецензирования. Об иных конфликтах интересов авторы не заявляли.

Joint optimization of heterogeneous charging infrastructure location, heterogeneous electric bus routing and charging scheduling

Nikolai N. Guschinsky, Mikhail Y. Kovalyov, Boris M. Rozin✉

✉E-mail: rozin@newman.bas-net.by

*The United Institute of Informatics Problems
of the National Academy of Sciences of Belarus,
st. Surganova, 6, Minsk, 220012, Belarus*

Abstract

Objectives. When replacing diesel buses with electric buses, the problem of selecting the composition of the electric bus fleet, assigning service trips from a given set to electric buses, and determining charging infrastructure and charging schedules becomes relevant. The aim of the study is to create models and methods for obtaining cost-effective solutions to this problem for heterogeneous electric buses and charging stations under different passenger flow volumes for different trips.

Methods. Methods of set theory, graph theory, operations research, and mathematical programming are used.

Results. A mathematical model has been developed for the problem of optimizing a fleet of various-type electric buses, their routing, assignment to depots at the beginning and end of the planning interval, determination of the locations and number of charging stations of different types at route terminals, and charging schedules. The objective function is the total daily capital and operating costs of electric buses, charging stations, and consumed electricity. A two-level decomposition scheme for solving the problem is proposed, at the upper level of which daily assignments for electric buses are determined (assigning different types of electric buses to service trip sequences with varying passenger volumes). The lower level distributes electric buses among depots, locates charging stations at route terminals, and determines charging schedules for electric buses with fixed trip assignments. A heuristic local search algorithm is proposed for solving the upper-level subproblem, and a mixed integer linear programming model is developed for the lower-level subproblem.

Conclusion. The solution to the upper-level subproblem consists of assigning different types of electric buses to service trips with varying passenger volumes. Standard solvers, such as Gurobi Optimizer, can be used to solve the formulated lower-level subproblem.

Keywords: electric bus, battery, charging station, optimization, mixed integer linear programming

Acknowledgements. The research was carried out with partial support from the Project of BRFFR № Ф26КИ-018 "Artificial intelligence methods of scheduling for modern manufacturing, logistics, and electric transport".

For citation. Guschinsky N. N., Kovalyov M. Y., Rozin B. M. *Joint optimization of heterogeneous charging infrastructure location, heterogeneous electric bus routing and charging scheduling*. Informatika [Informatics], 2026, vol. 23, no. 3, pp. 24–48 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2026-23-3-24-48>.

Conflict of interests. M. Y. Kovalyov has been a member of the editorial board of the journal "Informatics" since 2009 but had no role in the decision to publish this article. The article has undergone the journal's established peer-review process. The authors declare of no other conflicts of interest.

Введение

В последние годы значительное внимание в литературе уделяется различным аспектам планирования парка и зарядной инфраструктуры для городского электротранспорта, в частности *электробусов* (далее ЭБ) [1–5]. Применяемые технологии зарядки ЭБ варьируются в широком диапазоне (URL: <https://zeeus.eu/uploads/publications/documents/zeeus-report2017-2018-final.pdf>): в депо; на конечных остановках (терминалах) маршрутов; в депо и на конечных остановках; в депо, на конечных и промежуточных остановках. На практике чаще всего применяются технологии быстрой зарядки аккумуляторных батарей (далее *батарей*) ЭБ на терминалах маршрутов и медленной зарядки в депо, как правило, в ночной период [1]. Для зарядки на маршруте, включая терминалы, обычно требуются зарядные устройства большой мощности (до 400–500 кВт), в то время как для зарядки в депо могут использоваться зарядные устройства малой мощности (80–100 кВт) [2, 3]. Наиболее распространена в последнее время технология быстрой зарядки ЭБ на терминалах [4, 5].

При выборе парка ЭБ и их зарядной инфраструктуры требуется учитывать множество факторов, в том числе расписание сервисных рейсов с различными объемами пассажиропотока, расход электроэнергии в зависимости от типа ЭБ, маршрутов и особенностей эксплуатации (погодных условий и интенсивности трафика), размещение и скорость зарядки разнотипных *зарядных станций* (далее ЗС), стоимостные характеристики ЭБ и ЗС, тарифы на электроэнергию и т. д. Также по мере роста парка городских ЭБ возрастает нагрузка на энергосистему, что требует принятия решений по сглаживанию пиковых нагрузок.

ЭБ обычно отправляются в путь из депо и возвращаются в то же или другое депо в конце дня. Для восстановления затраченной электроэнергии используются технологии медленной зарядки в ночное время в депо и быстрой подзарядки в течение дня на терминалах маршрутов. После ночной зарядки в депо ЭБ на следующий день отправляются с полностью заряженными батареями. При подзарядке в течение дня уровень заряда батареи ЭБ может быть восстановлен частично на любой ЗС до уровня, достаточного для выполнения следующего рейса. Обычно предполагается, что ЭБ могут заряжаться в любом терминале. Для оптимизации расхода электроэнергии и уменьшения пиковых нагрузок на электросеть применяются зависящие от времени тарифы на электроэнергию.

Настоящее исследование посвящено решению комплексной задачи оптимального по стоимости выбора состава парка разнотипных ЭБ, распределения ЭБ по депо, назначения ЭБ на сервисные рейсы с различными объемами пассажиропотока, выбора терминалов для установки и количества устанавливаемых разнотипных ЗС, а также расписаний зарядки ЭБ на ЗС.

Предлагаемая модель охватывает следующие практически значимые ключевые компоненты задачи: разнотипные ЭБ, несколько депо ограниченной вместимости, различный пассажиропоток, разнотипные ЗС и зависящие от времени тарифы на электроэнергию.

Рассматриваемый подход к решению комплексной задачи заключается в двухуровневой декомпозиции исходной задачи на подзадачу нижнего уровня – выбора оптимального распределения ЭБ по депо, зарядной инфраструктуры терминалов и распи-

саний зарядки ЭБ при фиксированных последовательностях выполняемых каждым ЭБ сервисных рейсов и подзадачу верхнего уровня – выбора эффективного назначения ЭБ последовательностей сервисных рейсов.

1. Обзор литературы

Обзор охватывает следующие важные практические аспекты маршрутизации и зарядки ЭБ: выбор состава парка ЭБ, назначение ЭБ на сервисные рейсы в соответствии с заданным расписанием, выбор мест размещения и состава устанавливаемых ЗС, формирование расписания зарядки ЭБ на ЗС, распределение ЭБ по депо.

Ряд исследований посвящен комплексным задачам совместной оптимизации парка ЭБ, зарядной инфраструктуры, назначения ЭБ на сервисные рейсы и расписаний зарядки ЭБ.

В работе [6] для системы маршрутов с несколькими депо и многими терминалами исследуется задача совместной оптимизации диспетчеризации заданного набора рейсов для парка однородных ЭБ, расписаний их быстрой подзарядки между рейсами на идентичных ЗС терминалов и распределения ЭБ по различным депо. Учитываются зависящие от времени суток тарифы на электроэнергию, а также возможность управления скоростью зарядки: любой ЭБ может заряжаться на последовательности временных интервалов в промежутке между сервисными рейсами с различными кусочно-постоянными скоростями зарядки. Зарядка в депо не рассматривается. Сокращение количества используемых ЭБ может достигаться за счет дополнительных порожних (без пассажиров) рейсов между терминалами. В качестве цели выбрана минимизация общих капитальных и эксплуатационных затрат на ЭБ и ЗС, на порожние рейсы, потраченную электроэнергию и затрат на контрактную мощность сети для ЗС. В работе не учитываются ограниченность поставляемой энергосетью мощности для каждого места размещения зарядной инфраструктуры и предельное количество ЗС. Соответственно, возможная конкуренция ЭБ за ресурсы времени на ЗС не учитывается. Предложена формулировка *смешанного целочисленного линейного программирования* (СЦЛП) для этой задачи. Для подзадачи поиска мест размещения ЗС и назначения ЭБ на рейсы разработана процедура локального поиска.

В статье [7] рассматривается задача выбора расписания и назначения ЭБ на сервисные рейсы для системы маршрутов с многими терминалами, а также выбора мест установки ЗС с целью минимизации количества используемых идентичных ЭБ при выполнении ограничений, касающихся маршрутизации и зарядки. Заданное множество сервисных рейсов, как и в работе [6], разделено по маршрутным линиям, определяемым начальным и конечным терминалами, а также последовательностью промежуточных остановок. Каждый маршрут между терминалами характеризуется интервалом между рейсами и числом рейсов, каждый сервисный рейс характеризуется длительностью, расстоянием и затратами энергии. Интервал между соседними рейсами является параметром, который может принимать фиксированное значение либо выбираться из заданного диапазона значений. Предложена формулировка задачи в форме СЦЛП. В этой формулировке имеется ограничение на количество устанавливаемых в терминале ЗС, но при этом не учитывается полностью возможность конкуренции ЭБ за ресурсы времени на ЗС.

В работе [8] исследована задача определения парка разнотипных ЭБ для выполнения заданного набора сервисных рейсов и количества однотипных зарядных устройств для подзарядки ЭБ, размещаемых в одном депо, для стратегии полной зарядки ЭБ при каждом посещении депо и неизменных тарифах на электроэнергию. Был предложен генетический алгоритм в сочетании с моделью смешанного целочисленного нелинейного программирования. В работе [9] авторы исследовали задачу маршрутизации однотипных ЭБ для заданного набора рейсов с выбором одинаковых зарядных устройств для установки на терминалах. Приведены две формулировки этой задачи оптимизации. Первая основана на теории функции дефицита, а вторая представляет собой двухкритериальную модель целочисленного линейного программирования.

В исследовании [10] предложена модель задачи совместной оптимизации назначения на рейсы и зарядки разнотипного парка ЭБ в городских транспортных системах, совмещающая определение состава парка, планирование рейсов и зарядной инфраструктуры депо из однотипных зарядных устройств. Допускаются ограниченная задержка отправления в рейсы и управление скоростью движения ЭБ для соблюдения расписания прибытия на конечные терминалы. Расписание зарядки ЭБ на ЗС выбирается в условиях переменных тарифов на электроэнергию. Задача решается с использованием комбинации генетического алгоритма и метода роя частиц с ограничениями.

В работе [11] исследуется задача маршрутизации городских разнотипных ЭБ на основе заданного расписания рейсов с различными объемами пассажиропотока нескольких типов. Для повышения эффективности использования ЭБ различных типов предлагается методология принятия решений, позволяющая назначать разнотипные рейсы из заданного расписания ЭБ допустимого типа с учетом потребности в подзарядке и возможности замены ЭБ электробусом большей вместимости. Предложена оптимизационная модель в форме СЦП выбора ЭБ различных типов для минимизации годовых общих затрат, включающих затраты на покупку ЭБ, на покупку и установку однородных зарядных устройств, расходы на подзарядку ЭБ, а также эксплуатационные расходы на сервисные и порожние рейсы. Разработана эвристическая процедура на основе генетического алгоритма в сочетании с алгоритмом получения допустимых расписаний ЭБ в качестве функции пригодности. Процедура рассматривает возможность включения в расписание ЭБ поездок для подзарядки в ближайшее депо и замены ЭБ допустимого типа. Процедура протестирована на реальном примере транспортной сети района Дасин г. Пекина.

В исследовании [12] предлагается комплексная оптимизационная модель для формирования парка разнотипных ЭБ, выбора зарядной инфраструктуры на базе разнородных ЗС и расписания зарядки. В модели учитываются факторы, имеющие практическую значимость, включая стратегию частичной зарядки, непрерывность процесса зарядки, зависимость тарифов на электроэнергию от времени суток и совместимость транспортных средств с зарядными устройствами. Формулируется модель смешанного целочисленного программирования для минимизации общих затрат электротранспортной системы, включая затраты на зарядные устройства, ЭБ и электроэнергию. Разработан алгоритм генерации столбцов для решения задачи, и выполнено экспериментальное исследование на примере реальной транспортной сети в Нанкине, Китай.

В статье [13] рассматривается модель задачи совместной оптимизации назначения на рейсы и зарядки однородных ЭБ в городских транспортных системах, совмещающая определение состава парка ЭБ, планирование рейсов и зарядной инфраструктуры терминалов из однотипных зарядных устройств, а также расписание зарядки на терминалах ЭБ в дневное время при неизменных дневных тарифах на электроэнергию.

В ряде исследований, например [6], отмечается высокая вычислительная трудоемкость решения таких комплексных задач. Поэтому многие авторы, чтобы иметь возможность получать приемлемое по качеству решение в условиях ограниченных ресурсов времени и вычислительных мощностей, рассматривают решение отдельных компонентов задачи либо их комбинаций.

Анализ известных результатов для комплексных моделей оптимального планирования электротранспорта, включающих выбор смешанного парка ЭБ, зарядной инфраструктуры разнотипных зарядных устройств и расписаний зарядки, выявил недостаток внимания к необходимости сокращения количества используемых ЗС в условиях ограниченной пропускной способности зарядной инфраструктуры и конкуренции ЭБ за ресурс времени зарядки. Отчасти это связано с существенной дополнительной сложностью задачи вследствие необходимости учета ограничений на отсутствие пересечения событий зарядки различных ЭБ на одной ЗС.

Система ограничений оптимизационной модели, предложенной в настоящем исследовании, учитывает ограниченность пропускной способности зарядной инфраструктуры и исключает возможность пересечения событий зарядки различных ЭБ на одной ЗС. Таким образом, предложенная модель свободна от недостатков описанных выше моделей.

2. Постановка задачи

Рассматривается множество I сервисных рейсов, выполняемых в рамках периодически повторяющегося дневного интервала $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$, для городских маршрутов, характеризующихся начальным и конечным терминалами, а также последовательностью промежуточных остановок. Каждому маршруту между двумя заданными терминалами могут соответствовать несколько сервисных рейсов ЭБ, отличающихся моментами времени отправления и прибытия. Парк ЭБ $V = \bigcup_{m=1}^{\bar{m}} V_m$ составляют ЭБ $v \in V_m$ типа $m = m(v)$, $m \in BT = \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$, характеризующиеся пассажироместимостью U_m (меньшему номеру типа соответствует большая вместимость), емкостью E_m (кВт·ч) батареи, диапазоном хода без подзарядки и общими суточными капитальными и эксплуатационными затратами c_m^{bus} . Множество I сервисных рейсов состоит из подмножеств I_m рейсов ($I = \bigcup_{m=1}^{\bar{m}} I_m$) с объемом пассажиропотока, допускающим обслуживание ЭБ типов $m' \leq m$, $m' \in BT$. При этом для любого рейса $i \in I$ существует хотя бы один тип ЭБ из V , способный его выполнить.

Для каждого сервисного рейса $i \in I$ заданы его тип $\pi(i)$ (максимальный номер типа ЭБ допустимой вместимости), стартовый a_i и конечный b_i терминалы, моменты времени α_i начала и β_i окончания рейса. В дальнейшем (если не определено иное) моменты времени и длительности измеряются в часах (ч). Для допустимого типа ЭБ $m = m(i)$ должно выполняться условие $1 \leq m \leq \pi(i)$. Для любой допустимой пары (сервисный рейс, тип ЭБ) $= (i, m)$ задана величина $g_{i,m}$ расхода *относительного заряда* батареи (далее *заряд*) ЭБ типа $m \in BT$, измеряемого в долях ее энергетической емкости, в сервисном рейсе $i \in I$. Аналогично для любой допустимой тройки (i, j, m) задана величина $g_{i,j,m}$ расхода

заряда ЭБ типа m в порожнем (без пассажиров) рейсе из терминала b_i в терминал a_j , $i, j \in I$. Первый рейс ЭБ типа m из депо $d \in D$ в стартовый терминал a_i сервисного рейса $i \in I$, как и последний рейс из конечного терминала b_j последнего сервисного рейса $j \in I$ в депо $d' \in D$, являются порожними и характеризуются длительностями $\gamma_{d,i}$, $\gamma_{j,d'}$ и величинами $g_{d,i,m}$, $g_{j,d',m}$ расхода заряда ЭБ типа m соответственно.

Допускаются переключения ЭБ с обслуживания одного маршрута на другой, т. е. ЭБ может обслуживать допустимые по вместимости запланированные рейсы по нескольким маршрутам. Сервисные рейсы (i, j) , $i, j \in I$, совместимы (могут быть выполнены одним ЭБ), если при $a_j = b_i$ (стартовый терминал рейса j является конечным терминалом рейса i) выполняется $\beta_i \leq \alpha_j$ и при $a_j \neq b_i$ выполняется $\beta_i + \gamma_{i,j} \leq \alpha_j$, где $\gamma_{i,j}$ – длительность порожнего рейса независимо от типа ЭБ. На любом из терминалов b_i либо a_j (при $a_j \neq b_i$) либо на обоих этих терминалах ЭБ, выполняющий рейсы i, j , может восстанавливать потраченный заряд батареи, если на соответствующем терминале установлены ЗС и интервал пребывания ЭБ на терминале позволяет выполнить операцию зарядки. Уровень заряда в процессе функционирования ЭБ типа m должен оставаться в рамках допустимого диапазона $[u_m^{\min}, u_m^{\max}]$, где $0 < u_m^{\min}$, $u_m^{\max}$ – уровень заряда полностью заряженной батареи, $u_m^{\max} \leq 1$. Любой терминал $\theta \in \Theta = \{a_i, b_i \mid i \in I\}$ может быть укомплектован ЗС различных типов $\rho \in CT$, характеризующихся величиной P_ρ (кВт) номинальной мощности и общими суточными капитальными и эксплуатационными затратами c_ρ^{ch} . Таким образом, терминал θ может комплектоваться ЗС из набора $C_\theta = \bigcup_{\rho \in CT} C_\theta^{(\rho)}$ с предельным общим количеством $|C_\theta|$ в зависимости от $\theta \in \Theta$.

Любой ЭБ может заряжаться при каждом посещении любого терминала не более одного раза и не более чем на одной ЗС. В каждый момент времени на одной ЗС может заряжаться не более одного ЭБ. Каждой операции зарядки ЭБ предшествует операция настройки ЗС и ЭБ длительности Δ , во время которой зарядка или настройка другого ЭБ не происходят. Длительность любой операции зарядки должна быть не меньше минимальной величины $tc_{\min}$.

Будем говорить, что каждому из терминалов b_i и a_j (при $a_j \neq b_i$) и ЭБ, последовательно выполняющему рейсы i, j , соответствует *опция зарядки*. Опция называется *непустой*, если временной интервал пребывания ЭБ в терминале позволяет выполнить зарядку, иначе она называется *пустой*. Если ЭБ посещает два терминала b_i , a_j при $a_j \neq b_i$, то возможны следующие комбинации опций зарядки: а) пустые опции в обоих терминалах при выполнении $\beta_i + \gamma_{i,j} + \Delta + tc_{\min} > \alpha_j$; б) одна пустая в одном из терминалов (b_i или a_j) и непустая в другом терминале при $\beta_i + \gamma_{i,j} + \Delta + tc_{\min} \leq \alpha_j < \beta_i + \gamma_{i,j} + 2(\Delta + tc_{\min})$; в) обе непустые опции в обоих терминалах (b_i и a_j) при $\beta_i + \gamma_{i,j} + 2(\Delta + tc_{\min}) \leq \alpha_j$. Если же ЭБ посещает один терминал между i и j , т. е. $b_i = a_j$, то этому терминалу соответствует комбинация опций, состоящая из единственной непустой опции при $\beta_i + \Delta + tc_{\min} \leq \alpha_j$ либо пустой при $\beta_i + \Delta + tc_{\min} > \alpha_j$. Реализацию опции зарядки будем называть событием зарядки. Реализация непустой опции зарядки в терминале зависит от выбираемого решения, включающего размещение ЗС в этом терминале, и от выполнения условия превышения длительности события зарядки минимальной величины $tc_{\min}$.

Первоначально каждый ЭБ $v \in V_m$, $m \in BT$, размещается в депо из заданного множества $D = \{d_1, d_2, \dots, \bar{d}\}$, в котором он восстанавливает заряд батареи ночью до максимального уровня $u_m^{\max}$. Процесс зарядки ЭБ в депо не рассматривается. В течение суток он

посещает депо однократно. ЭБ не обязан возвращаться в свое отправное депо в конце дня. Однако, поскольку дневные расписания обслуживания сервисных рейсов являются периодическими, требуется, чтобы начальное и конечное распределения количеств ЭБ каждого типа по депо совпадали. При этом должны учитываться предельные емкости $Ub_{d,m}$ каждого депо $d \in D$ для ЭБ типа $m \in BT$. Будем считать, что любому ЭБ, выполняющему порожний рейс (d, i) и (или) (j, d') из депо d в стартовый терминал a_i либо из конечного терминала b_j в депо d' , $i, j \in I$, $d, d' \in D$, соответствует по одной непустой опции зарядки в терминалах a_i и b_j . Это означает, что времени пребывания ЭБ в стартовом и конечном терминалах (при нефиксированных моментах времени выхода (возвращения) в депо) достаточно для восстановления заряда, потраченного в порожнем рейсе из депо либо в последнем сервисном рейсе перед возвращением в депо, до максимального уровня на ЗС любого типа.

Определим взаимно однозначное отображение z некоторого подмножества ЭБ парка V в некоторый набор $\Omega(z)$ непересекающихся последовательностей совместимых сервисных рейсов, дневных заданий ЭБ, образующих в совокупности все рейсы из I . Это отображение определяет множества ЭБ $V_m(z) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\eta_m(z)}\}$, $m=1, 2, \dots, \bar{m}$, каждого типа, где $\eta_m(z)$ – количество используемых ЭБ типа m , и назначает каждому ЭБ $v \in V_m(z)$ последовательность сервисных рейсов $\omega_v(z) = (j_{v,1}, j_{v,2}, \dots, j_{v,\bar{l}_v})$, такую, что $\beta_{j_{v,l}} + \gamma_{j_{v,l}, j_{v,l+1}} \leq \alpha_{j_{v,l+1}}$, $l=1, 2, \dots, \bar{l}_v - 1$, $j_{v,l} \in \bigcup_{\xi=m}^{\bar{m}} I_\xi$, $\omega_v(z) \cap \omega_{v'}(z) = \emptyset$ для $v \neq v'$, $v, v' \in V(z)$ и $\bigcup_{m=1, v \in V_m(z)}^{\bar{m}} \omega_v(z) = I$. Набор $\Omega(z) = \{\omega_v(z) | v \in V\}$ непересекающихся заданий, включающих в совокупности все рейсы из I , будем называть *назначением* z ЭБ парка $v \in V$, $z \in Z$. Отметим, что $\eta_m(z)$ равно количеству заданий, выполняемых ЭБ из $V_m(z)$, $m \in BT$. Пусть Z – множество всех таких назначений.

Задание $\omega_v(z)$ однозначно определяет для каждой пары (i, j) , $i, j \in \omega_v(z)$, смежных сервисных рейсов наличие порожнего рейса (при $a_j \neq b_i$) либо его отсутствие (при $a_j = b_i$) и тип $tp_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3\}$ комбинации опций зарядки на обоих терминалах в промежутке между рейсами, где 0 – пустые опции – одна при $a_j = b_i$ либо две при $a_j \neq b_i$, если $\alpha_j < \beta_i + \gamma_{i,j} + \Delta + tc_{\min}$, 1 – одна непустая опция при $b_i = a_j$, если $\beta_i + \Delta + tc_{\min} \leq \alpha_j$, 2 – две непустые опции при $b_i \neq a_j$, если $\beta_i + \gamma_{i,j} + 2(\Delta + tc_{\min}) \leq \alpha_j$, 3 – одна непустая (либо в b_i , либо в a_j) и другая пустая опции при $b_i \neq a_j$, если $\Delta + tc_{\min} \leq \alpha_j - \beta_i - \gamma_{i,j} < 2(\Delta + tc_{\min})$. Напомним, что первый рейс задания $\omega_v(z)$ является порожним из некоторого стартового депо $d_v^s \in D$, а последний рейс – также порожний в некоторое финишное депо $d_v^f \in D$. Как было сказано выше, стартовому терминалу $a_{j_{v,1}}$ первого рейса $j_{v,1}$ задания $\omega_v(z)$ соответствует непустая опция зарядки ($tp_{d_v^s, j_{v,1}} = 1$) и конечному терминалу $b_{j_{v,\bar{l}_v}}$ последнего рейса $j_{v,\bar{l}_v}$ также соответствует непустая опция зарядки ($tp_{j_{v,\bar{l}_v}, d_v^f} = 1$).

Обозначим $Q_\theta(z)$ множество всех опций зарядки (включая пустые) всех ЭБ $v \in V(z)$ в течение дня на терминале $\theta \in \Theta$ при фиксированном z . Восстановление уровня заряда для пары (m, ρ) (предполагая, что любые пары (m, ρ) совместимы) на любой ЗС $c \in C_\theta^{(\rho)}$ типа ρ в допустимом диапазоне $[u_m^{\min}, u_m^{\max}]$ осуществляется на постоянной мощности $P_\rho = E_m \cdot f_{m,\rho}$ (кВт) со скоростью $f_{m,\rho}$ единиц заряда в час. Таким образом, максималь-

ная длительность зарядки батареи любого ЭБ типа m на ЗС типа ρ составляет

$$\tau_{m,\rho}^{\max} = \frac{u_m^{\max} - u_m^{\min}}{f_{m,\rho}}, \quad m \in BT, \rho \in CT. \text{ Положим } Q(z) = \bigcup_{\theta \in \Theta} Q_\theta(z).$$

Сопоставим каждой опции зарядки из множества $Q(z)$ всех опций индекс q , однозначно определяющий используемый ЭБ $v(q)$, его тип $m(q)$, назначенное ему задание $\omega_{v(q)}(z)$ сервисных рейсов, терминал $\theta(q)$ выполнения этой опции и допустимый диапазон $[A_q, B_q]$ моментов начала и завершения зарядки, которые определяются далее в разд. 3.1 на основе входных данных и фиксированного назначения z .

Рассматриваемый периодически повторяющийся дневной период $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$ работы транспорта разбивается на подынтервалы $T_p = [\underline{T}_p, \bar{T}_p]$, $p = 1, \dots, \bar{p}$, $\underline{T}_1 = \underline{\Gamma}$, $\bar{T}_{\bar{p}} = \bar{\Gamma}$, характеризующиеся постоянными тарифами c_p^e на электроэнергию. Предполагается, что все сервисные рейсы и соответствующие события зарядки ЭБ выполняются в рамках заданного диапазона $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$. Достаточное для этого условие $0 \leq \underline{\Gamma} \leq \alpha_j - \Delta - \tau_{m,\rho}^{\max} < \alpha_j < \beta_j < \beta_j + \Delta + \tau_{m,\rho}^{\max} \leq \bar{\Gamma} \leq 24$, $j \in I$, $m = 1, 2, \dots, \bar{m}$, $\rho \in CT$, считаем выполненным.

Также для уменьшения комбинаторной сложности и в соответствии с реальностью считаем, что длина любого подынтервала T_p больше максимальной длительности любой зарядки. Из этого следует, что при любой зарядке действует один либо два последовательных тарифа на электроэнергию.

Рассматривается *представительный день* года (для Европы, как правило, рабочий день февраля), характеризующий наибольшим расходом ЭБ электроэнергии вследствие неблагоприятных погодных условий и дорожной обстановки. Пропускная способность зарядной инфраструктуры, обеспечивающая функционирование парка ЭБ для такого дня, позволяет обеспечить его функционирование для любого дня года.

Рассматриваемая задача заключается в определении подмножеств используемых разнотипных ЭБ, назначении выбранным ЭБ допустимых последовательностей сервисных рейсов, выборе депо для размещения ЭБ, выборе терминалов для размещения ЗС и количества размещаемых на каждом из них ЗС каждого типа, а также расписаний зарядки ЭБ, минимизирующих суточные капитальные и операционные затраты на ЭБ, ЗС и потребленную электроэнергию в периоде $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$. Назначенные последовательности сервисных рейсов должны обеспечивать выполнение всех запланированных в периоде $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$ сервисных рейсов допустимыми по вместимости ЭБ. Размещение ЗС на терминалах должно обеспечивать возможность восстановления уровня заряда ЭБ для выполнения назначенных им рейсов, а расписания их зарядки должны учитывать приведенные выше условия и ограничения по времени и уровню заряда при приходе и выходе из терминалов, а также совместимость выполнения операций зарядки на каждой ЗС. Кроме того, для сглаживания нежелательных пиковых нагрузок мощности на городскую энергосеть дополнительно накладываются ограничения на количество размещаемых в отдельных терминалах ЗС, что влечет необходимость перераспределения операций зарядки части ЭБ во времени и пространстве.

С точки зрения теории сложности вычислений рассматриваемая задача является NP-трудной в сильном смысле, поскольку к ней сводятся некоторые классические NP-полные в сильном смысле задачи [14]. Например, NP-полная в сильном смысле задача о существовании гамильтонова цикла в произвольном ориентированном графе

эквивалентна задаче существования одной допустимой последовательности всех сервисных рейсов (выполняемых одним ЭБ), в которой сервисный рейс соответствует вершине произвольного ориентированного графа и возможность или невозможность выполнения двух сервисных рейсов непосредственно друг за другом эквивалентны наличию или отсутствию дуги в графе между соответствующими вершинами. Другим примером является NP-полная в сильном смысле задача «многопроцессорное расписание», которая эквивалентна задаче существования допустимого расписания зарядки n ЭБ m параллельными ЗС в заданном интервале времени. Из NP-трудности задачи следует, что отыскание оптимального решения ее примеров большой размерности за приемлемое время, скорее всего, невозможно и необходимо сосредоточиться на построении практически приемлемых эвристических решений.

3. Декомпозиционная схема решения задачи

Предлагается следующая двухуровневая декомпозиционная схема решения задачи. В подзадаче нижнего уровня предполагается, что используемые ЭБ и назначенные им допустимые последовательности сервисных рейсов заданы и требуется определить стартовые и финишные депо для ЭБ, разместить ЗС на терминалах и определить расписания зарядки ЭБ таким образом, чтобы минимизировать общие дневные затраты на ЗС и потребленную электроэнергию.

На верхнем уровне решается подзадача отыскания назначения $z \in Z$, т. е. выбора ЭБ и назначения им допустимых последовательностей сервисных рейсов. При этом должны обеспечиваться достаточные интервалы пребывания ЭБ на терминалах для восстановления их уровня заряда в промежутках между рейсами. Возможная конкуренция за ресурсы ЗС не учитывается. Целью является минимизация функции $\Psi(z) = \sum_{m \in BT} c_m^{bus} \eta_m(z) + \Phi^*(z)$, включающей оптимальное значение $\Phi^*(z)$ целевой функции подзадачи нижнего уровня для назначения z и суточные капитальные и операционные затраты $\sum_{m \in BT} c_m^{bus} \eta_m(z)$ на ЭБ парка.

Для решения подзадачи нижнего уровня предлагается оригинальная модель СЦЛП, описание которой приводится в подразд. 3.1. Для решения подзадачи верхнего уровня используется эвристический алгоритм, описываемый в подразд. 3.2.

3.1. Подзадача нижнего уровня

Описывается модель СЦЛП выбора терминалов размещения и количества размещаемых ЗС каждого типа, расписания зарядки ЭБ и распределения ЭБ по депо при фиксированном назначении заданий ЭБ. Заметим, что любому рейсу $i \in I$ соответствуют его тип $\pi(i)$ и ЭБ $v(i) \in V$ типа $m(i) := m(v(i))$. При этом тип $m(i)$ ЭБ, выполняющего рейс i , удовлетворяет условиям $1 \leq m(i) \leq \pi(i)$.

Далее назначение z считается фиксированным и для краткости опущено. На основании входных данных определяются следующие дополнительные параметры:

I_θ^- – множество рейсов $i \in I$, таких, что $a_i = \theta$;

I_θ^+ – множество рейсов $i \in I$, таких, что $b_i = \theta$;

Q_i^- – множество опций зарядки в терминале $\theta = a_i$ после порожнего рейса из депо d для всех пар (d, a_i) , $d \in D$, $i \in I$;

Q_i^+ – множество опций зарядки в терминале $\theta=b_i$ перед порожним рейсом в депо d для всех пар (b_i, d) , $d \in D$, $i \in I$;

$Q_{i,j,\theta}$ – множество опций зарядки в $\theta \in \{b_i, a_j\}$ между рейсами $i, j \in I$;

$q(\theta_{j_v,l})$ – индекс опции зарядки ЭБ v в терминале $\theta_{j_v,l} \in \{a_{j_v,l}, b_{j_v,l}\}$ задания $\omega_v = (j_{v,1}, j_{v,2}, \dots, j_{v,\bar{l}_v})$ для $l=1, 2, \dots, \bar{l}_v$, $v \in V$;

Q_θ – множество опций зарядки в $\theta \in \Theta$, $Q_\theta = \bigcup_{i \in I_\theta^-} Q_i^- \cup \bigcup_{i \in I_\theta^+} Q_i^+ \cup \bigcup_{i,j \in I} Q_{i,j,\theta}$;

Q – множество опций зарядки во всех терминалах, $Q = \bigcup_{\theta \in \Theta} Q_\theta$;

$Q_\theta^{(p)}$ – множество опций зарядки в терминале θ , таких, что $[A_q, B_q] \subseteq T_p$, $p \in \{1, \dots, \bar{p}\}$;

$Q_\theta^{(p,+)}$ – множество опций зарядки в терминале θ , таких, что $\bar{T}_p \in [A_q, B_q]$, при выполнении зарядки в которых могут применяться два различных тарифа c_p^e и c_{p+1}^e , $p \in \{1, \dots, \bar{p}-1\}$;

$\bar{Q}_\theta = \bigcup_{p=1}^{\bar{p}-1} Q_\theta^{(p,+)}$ – множество опций зарядки в терминале θ , при выполнении которых могут применяться два различных тарифа;

$Q_\theta \setminus \bar{Q}_\theta$ – множество опций зарядки в терминале θ , при выполнении которых применяется единственный тариф.

Допустимые диапазоны моментов начала и завершения зарядки для опций $q \in Q$:

$[A_q, B_q] = [\alpha_i - \Delta - \max\{\tau_{m,p}^{\max} \mid m \in BT, p \in CT\}, \alpha_i]$, $q \in Q_i^-$, $i \in I_\theta^-$, $d \in D$;

$[A_q, B_q] = [\beta_i, \beta_i + \Delta + \max\{\tau_{m,p}^{\max} \mid m \in BT, p \in CT\}]$, $q \in Q_i^+$, $i \in I_\theta^+$, $d \in D$;

$[A_q, B_q] = [0, 0]$, если $q \in Q \setminus (Q_i^- \cup Q_i^+)$, $tp_{i,j}=0$, $i, j \in I$;

$[A_q, B_q] = [\beta_i, \alpha_j]$, если $q \in Q \setminus (Q_i^- \cup Q_i^+)$, $tp_{i,j}=1$, $i, j \in I$;

$[A_q, B_q] = [\beta_i, \alpha_j - \gamma_{i,j}]$, если $q \in Q_{i,j,b_i}$, $tp_{i,j} \in \{2, 3\}$, $i, j \in I$;

$[A_q, B_q] = [\beta_i + \gamma_{i,j}, \alpha_j]$, если $q \in Q_{i,j,a_j}$, $tp_{i,j} \in \{2, 3\}$, $i, j \in I$.

Управляемые переменные

$S_{c,q}$ – момент начала события зарядки q на ЗС $c \in C_\theta$ (для пустой опции $S_{c,q}=0$);

$F_{c,q}$ – момент завершения события зарядки q на ЗС $c \in C_\theta$ (для пустой опции $F_{c,q}=0$);

$t_{c,q}^{(p)}$ – длительность события зарядки q на ЗС $c \in C_\theta$ (для пустой опции $t_{c,q}^{(p)}=0$);

$y_{c,q}^{(p)} \in \{0, 1\}$ – принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $t_{c,q}^{(p)} > 0$ (для пустой опции $y_{c,q}^{(p)}=0$);

$\tau_q^{(p)}$ – длительность события зарядки q на ЗС $c \in C_\theta^{(p)}$ (для пустой опции $\tau_q^{(p)}=0$);

$y_q^{(p)} \in \{0, 1\}$ – принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $\tau_q^{(p)} > 0$ (для пустой опции $y_q^{(p)}=0$);

$\sigma_{\theta,c}^{(p)} \in \{0, 1\}$ – принимает значение 1 тогда и только тогда, когда происходит событие зарядки на ЗС $c \in C_\theta^{(p)}$ терминала θ ($\sigma_{\theta,c}^{(p)}=0$, если ЗС $c \in C_\theta^{(p)}$ соответствуют только пустые опции);

$\mu_\theta^{(p)}$ – количество используемых ЗС $c \in C_\theta^{(p)}$ терминала θ ;

u_i^1 – уровень заряда ЭБ $v(i)$ после прибытия в терминал a_i рейса $i \in I$;

u_i^2 – уровень заряда ЭБ $v(i)$ после возможной зарядки в терминале a_i рейса $i \in I$;
 u_i^3 – уровень заряда ЭБ $v(i)$ после прибытия в терминал b_i рейса $i \in I$;
 u_i^4 – уровень заряда ЭБ $v(i)$ после возможной зарядки в терминале b_i рейса $i \in I$;
 $x_d^{(s)}(i) \in \{0,1\}$ – принимает значение 1 тогда и только тогда, когда рейс $i \in I$ является первым для ЭБ $v(i)$ типа $m(i)$ и порожний рейс в a_i выполняется из депо d , иначе 0;
 $x_d^{(e)}(i) \in \{0,1\}$ – принимает значение 1 тогда и только тогда, когда рейс $i \in I$ является последним для ЭБ $v(i)$ типа $m(i)$ и порожний рейс из b_i выполняется в депо d , иначе 0.

Определим кусочно-линейные функции $\tilde{C}_p^{(p)}(t)$ кумулятивной стоимости зарядки от момента завершения t зарядки для любых опций $q \in Q_0^{(p,+)}$, $p \in CT$, $p=1, \dots, \bar{p}-1$:

$$\tilde{C}_p^{(p)}(t) = 0 \text{ для } 0 \leq t \leq A_q;$$

$$\tilde{C}_p^{(p)}(t) = c_p^e P_p t \text{ для } A_q \leq t \leq \bar{T}_p;$$

$$\tilde{C}_p^{(p)}(t) = c_p^e P_p A_q + c_{p+1}^e P_p t \text{ для } \bar{T}_p \leq t \leq B_q.$$

Для использования функции $\tilde{C}_p^{(p)}(t)$ в модели СЦПП введем дополнительные переменные: $w_{q,1}^{(p)} = \{1, \text{ если } y_q^{(p)} = 1 \text{ и } A_q \leq t \leq \bar{T}_p, 0 - \text{ иначе}\}$, $w_{q,2}^{(p)} = \{1, \text{ если } y_q^{(p)} = 1 \text{ и } \bar{T}_p \leq t \leq B_q, 0 - \text{ иначе}\}$ и условие $(1 - y_q^{(p)}) + w_{q,1}^{(p)} + w_{q,2}^{(p)} = 1$.

Отметим, что $1 - y_q^{(p)} = 0$ при $0 \leq t \leq A_q$. (Соответствующие условия для системы ограничений оптимизационной задачи СЦПП формируются стандартными средствами пакетов СЦПП.)

Обозначим через $\mu(z)$, $\tau(z)$, $t(z)$, $y(z)$, $S(z)$, $F(z)$, $u(z)$, $x(z)$ векторы значений переменных μ , τ , t , y , S , F , u , x при фиксированном наборе z последовательностей сервисных рейсов, $z \in Z$.

Подзадача нижнего уровня заключается в отыскании векторов $\mu(z)$ количеств ЗС каждого типа в терминалах $\theta \in \Theta$; длительностей $\tau(z)$, $t(z)$ зарядки всех ЭБ $v \in V(z)$ для всех их опций q зарядки в соответствующих терминалах $\theta(q)$, моментов $S(z)$, $F(z)$ старта и завершения этих событий зарядки, уровней $u(z)$ заряда каждого ЭБ перед посещением терминала и после каждой опции зарядки, а также значений $x(z)$ булевых переменных $x_d^{(s)}(i)$ (либо $x_d^{(e)}(i)$), определяющих рейс i для некоторого ЭБ $v(i) \in V(z)$ как первый сервисный с предшествующим порожним рейсом из стартового депо $d_{v(i)}^s$ (либо соответственно как последний сервисный с последующим порожним рейсом в финишное депо $d_{v(i)}^f$). Целью является минимизация функции $\Phi(\mu(z), \tau(z), t(z), y(z), S(z), F(z), u(z), x(z))$ при выполнении системы ограничений. Целевая функция и ограничения подзадачи описаны ниже.

Целевая функция подзадачи нижнего уровня

Целевая функция (1) представляет общие суточные затраты на ЗС и потраченную электроэнергию при фиксированном z . Суточные инвестиционные и операционные затраты на ЗС всех типов определяются суммой произведений суточных затрат c_p^{ch} , $p \in CT$, на одну ЗС каждого типа p и количеств $\mu_\theta^{(p)}(z)$ ЗС этого типа для каждого из терминалов $\theta \in \Theta$. Суточные затраты на электроэнергию ЭБ выражаются суммой произведений тарифов c_p^e на величины электроэнергии, потребленной ЭБ $v \in V(z)$ для событий зарядки из

множеств $Q_\theta \setminus \bar{Q}_\theta$, выполняющихся на ЗС $\rho \in CT$ при постоянных тарифах в пределах диапазонов T_p , $p=1, \dots, \bar{p}$, $\theta \in \Theta$, а также суммой разностей между значениями кусочно-линейных функций $\tilde{C}_p^{(\rho)}(\cdot)$ кумулятивной стоимости энергии в конце и начале зарядки для событий зарядки из множеств $\bar{Q}_\theta$, «окна» зарядки которых принадлежат двум интервалам $p, p+1$ с различными тарифами, $p=1, \dots, \bar{p}-1$, $\theta \in \Theta$:

$$\begin{aligned} \min \Phi(\mu(z), \tau(z), t(z), y(z), S(z), F(z), u(z), x(z)) = \\ = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{\rho \in CT} c_p^{ch} \mu_\theta^{(\rho)}(z) + \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{\rho \in CT} \left[\sum_{q \in Q_\theta(z) \setminus \bar{Q}_\theta(z)} \sum_{p=1}^{\bar{p}} c_p^e P_\rho \cdot \tau_q^{(\rho)}(z) + \sum_{q \in Q_\theta(z)} \sum_{p=1}^{\bar{p}-1} \sum_{c \in C_\theta^{(\rho)}} (\tilde{C}_p^{(\rho)}(F_{c,q}) - \tilde{C}_p^{(\rho)}(S_{c,q})) \right]. \quad (1) \end{aligned}$$

В дальнейшем назначение z считается фиксированным и опущено для краткости изложения.

Ограничения подзадачи нижнего уровня

Условия для разнотипных ЗС терминалов определяются ограничениями

$$\mu_\theta^{(\rho)} = \sum_{c \in C_\theta^{(\rho)}} \sigma_{\theta,c}^{(\rho)}, \quad \rho \in CT, \quad \theta \in \Theta, \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta,c}^{(\rho)} \leq \sum_{q \in Q_\theta} y_{c,q}^{(\rho)}, \quad c \in C_\theta^{(\rho)}, \quad \rho \in CT, \quad \theta \in \Theta, \quad (3)$$

$$0 \leq |Q_\theta| \cdot \sigma_{\theta,c}^{(\rho)} - \sum_{q \in Q_\theta} y_{c,q}^{(\rho)}, \quad c \in C_\theta^{(\rho)}, \quad \rho \in CT, \quad \theta \in \Theta, \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta,c+1}^{(\rho)} \leq \sigma_{\theta,c}^{(\rho)}, \quad c, c+1 \in C_\theta^{(\rho)}, \quad \rho \in CT, \quad \theta \in \Theta, \quad (5)$$

$$\sum_{\rho \in CT} \mu_\theta^{(\rho)} \leq |C_\theta|, \quad \theta \in \Theta, \quad (6)$$

$$\sum_{\rho \in CT} \sum_{c \in C_\theta^{(\rho)}} y_{c,q}^{(\rho)} \leq 1, \quad q \in Q_\theta, \quad \theta \in \Theta. \quad (7)$$

Условия (2)–(7) обеспечивают равенство значения параметра $\mu_\theta^{(\rho)}$ числу используемых ЗС типа ρ терминала θ и исключают наличие неиспользуемых ЗС каждого типа. Ограничения (3), (4) обеспечивают значение булевой переменной $\sigma_{\theta,c}^{(\rho)}$ равным 1, только если ЗС типа ρ с номером c используется для выполнения опций зарядки ЭБ. Из ограничения (5) следует, что исключается учет неиспользуемых ЗС каждого типа. Согласно ограничению (6) число используемых ЗС всех типов не может превышать предельно допустимого числа $|C_\theta|$. Ограничения (7) обеспечивают выполнение любой опции зарядки не более чем на одной ЗС.

Условия баланса размещения количеств ЭБ каждого типа по депо имеют вид

$$\sum_{d \in D} x_d^{(s)}(j_{v,1}) = 1, \quad v \in V, \quad (8)$$

$$\sum_{d \in D} x_d^{(e)}(j_{v,\bar{v}}) = 1, \quad v \in V, \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} x_d^{(s)}(i) - \sum_{i \in I} x_d^{(e)}(i) = 0, \quad d \in D. \quad (10)$$

$$\sum_{i \in I, m(i)=m} x_d^{(s)}(i) \leq Ub_{d,m}, \quad d \in D, \quad m \in BT. \quad (11)$$

Ограничения (8), (9) обеспечивают назначение единственного депо для первого и последнего рейсов, выполняемых ЭБ $v \in V$. Ограничения (10) обеспечивают баланс

для каждого депо количества выходящих и входящих ЭБ каждого типа. Ограничения (11) устанавливают предельное количество ЭБ типа m , которое может вместить депо $d \in D$.

Условия баланса уровней заряда в терминалах определяются следующим образом:

$$u_i^3 = u_i^2 - g_{i,m(i)}, i \in I, \quad (12)$$

$$u_{j_v,1}^1 = u_{m(v)}^{\max} - \sum_{d \in D} g_{d,j_v,1,m(j_v,1)} x_d^{(s)}(j_v,1) \geq u_{m(v)}^{\min}, v \in V, \quad (13)$$

$$u_{j_v,\bar{l}_v}^4 - \sum_{d \in D} g_{j_v,\bar{l}_v,d,m(j_v,\bar{l}_v)} x_d^{(e)}(j_v,\bar{l}_v) \geq u_{m(v)}^{\min}, v \in V, \quad (14)$$

$$u_{j_v,1}^2 = u_{j_v,1}^1 + \sum_{\rho \in CT} \sum_{q \in Q_{j_v,1}^-} \sum_{c \in C_{j_v,1}^{(\rho)}} f_{m(j_v,1),\rho} \tau_q^{(\rho)}, v \in V, \quad (15)$$

$$u_{j_v,\bar{l}_v}^4 = u_{j_v,\bar{l}_v}^3 + \sum_{\rho \in CT} \sum_{q \in Q_{j_v,\bar{l}_v}^+} \sum_{c \in C_{j_v,\bar{l}_v}^{(\rho)}} f_{m(j_v,\bar{l}_v),\rho} \tau_q^{(\rho)}, v \in V, \quad (16)$$

$$u_{j_v,l+1}^1 = u_{j_v,l}^4 - g_{j_v,l,j_v,l+1,m(j_v,l)}, l=1,2,..., \bar{l}_v-1, v \in V, \quad (17)$$

$$u_{j_v,l}^4 = u_{j_v,l}^3, tp_{j_v,l,j_v,l+1} = 0, l=1,2,..., \bar{l}_v-1, v \in V, \quad (18)$$

$$u_{j_v,l}^4 = u_{j_v,l}^3 + \sum_{\rho \in CT} f_{m(j_v,l),\rho} \sum_{q \in Q_{j_v,l,j_v,l+1,b_{j_v,l}}} \tau_q^{(\rho)}, tp_{j_v,l,j_v,l+1} \in \{1,2,3\}, l=1,2,..., \bar{l}_v-1, v \in V, \quad (19)$$

$$u_{j_v,l+1}^2 = u_{j_v,l+1}^1, tp_{j_v,l,j_v,l+1} = 0, l=1,2,..., \bar{l}_v-1, v \in V, \quad (20)$$

$$u_{j_v,l+1}^2 = u_{j_v,l+1}^1 + \sum_{\rho \in CT} f_{m(j_v,l+1),\rho} \sum_{q \in Q_{j_v,l,j_v,l+1,a_{j_v,l+1}}} \tau_q^{(\rho)}, tp_{j_v,l,j_v,l+1} \in \{1,2,3\}, l=1,2,..., \bar{l}_v-1, v \in V, \quad (21)$$

$$u_{j_v,l}^2 - u_{j_v,l}^1 \geq tc_{\min} \sum_{\rho \in CT} y_{q(a_{j_v,l}),\rho}^{(\rho)} f_{m(j_v,l),\rho}, l=1,2,..., \bar{l}_v, v \in V, \quad (22)$$

$$u_{j_v,l}^4 - u_{j_v,l}^3 \geq tc_{\min} \sum_{\rho \in CT} y_{q(b_{j_v,l}),\rho}^{(\rho)} f_{m(j_v,l),\rho}, l=1,2,..., \bar{l}_v, v \in V. \quad (23)$$

Условие (12) определяет уровень заряда после прибытия в терминал b_i любого рейса $i \in I$. Условия (13), (14) обеспечивают уровень заряда ЭБ при прибытии из стартового депо в стартовый терминал первого рейса (соответственно, в финишное депо после последнего рейса) не ниже нижней границы диапазона допустимых уровней заряда. Условия (15), (16) определяют уровень заряда после прибытия и возможной зарядки в стартовом терминале для первого (соответственно, конечном терминале последнего рейса) ЭБ. Условия (12), (17)–(21) определяют уровни заряда в каждом терминале после прибытия и (или) возможной зарядки для рейса $j_{v,l+1}$ непосредственно после рейса $j_{v,l}$ в задании ЭБ v в зависимости от значения параметра $tp_{j_v,l,j_v,l+1}$. Условия (22), (23) обеспечивают выполнение зарядки в начальном либо конечном терминале рейса при длительности зарядки, не меньшей чем $tc_{\min}$.

Условия для длительностей событий зарядки ЭБ на различных ЗС в терминалах определяются соотношениями

$$\sum_{c \in C_{\theta}^{(\rho)}} t_{c,q}^{(\rho)} = \tau_q^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (24)$$

$$tc_{\min} y_{c,q}^{(\rho)} \leq t_{c,q}^{(\rho)} \leq \tau_{m(q),\rho}^{\max} y_{c,q}^{(\rho)}, c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (25)$$

$$\sum_{c \in C_{\theta}^{(\rho)}} y_{c,q}^{(\rho)} = y_q^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (26)$$

$$\sum_{\rho \in CT} y_{q'}^{(\rho)} + \sum_{\rho \in CT} y_{q''}^{(\rho)} \leq 1, q' \in Q_{j_v,l,j_v,l+1,b_{j_v,l}}, q'' \in Q_{j_v,l,j_v,l+1,a_{j_v,l+1}}, v \in V, tp_{j_v,l,j_v,l+1} = 3, l=1, 2, ..., \bar{l}_v-1. \quad (27)$$

Условия (24)–(27) определяют переменные $y_{c,q}^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ посредством $t_{c,q}^{(p)}$, $\tau_q^{(p)}$ и обеспечивают не более одной зарядки между рейсами $j_{v,l}$ и $j_{v,l+1}$ ЭБ v при $tp_{j_{v,l},j_{v,l+1}}=3$.

Моменты начала и завершения событий зарядки в терминалах должны удовлетворять условиям

$$F_{c,q} = S_{c,q} + \Delta \sum_{\rho \in CT} y_{c,q}^{(\rho)} + \sum_{\rho \in CT} t_{c,q}^{(\rho)}, \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \quad (28)$$

$$S_{c,q} \geq A_q \sum_{\rho \in CT} y_{c,q}^{(\rho)}, \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \quad (29)$$

$$F_{c,q} \leq B_q \sum_{\rho \in CT} y_{c,q}^{(\rho)}, \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \quad (30)$$

$$\sum_{\substack{c' \in \bigcup_{\rho \in CT} C_{b_i}^{(\rho)}}} F_{c',q'} + \gamma_{ij} \leq \sum_{\substack{c'' \in \bigcup_{\rho \in CT} C_{a_j}^{(\rho)}}} S_{c'',q''} + 24(1 - \sum_{\rho \in CT} y_{q''}^{(\rho)}), \quad q' \in Q_{i,j,b_i}, q'' \in Q_{i,j,a_j}, i \in I, tp_{ij}=2. \quad (31)$$

Ограничения (28)–(31) определяют моменты старта $S_{c,q}$ и завершения $F_{c,q}$ каждой возможной опции зарядки в пределах ее допустимого диапазона и обеспечивают начало возможной зарядки на терминале a_j по прошествии длительности γ_{ij} порожнего рейса после отправления из терминала b_i .

$$(F_{c,q'} \leq S_{c,q''}) \vee (F_{c,q''} \leq S_{c,q'}), \quad c \in \bigcup_{\rho \in CT} C_{\theta}^{(\rho)}, q', q'' \in Q_{\theta}, [A_{q'}, B_{q'}] \cap [A_{q''}, B_{q''}] \neq \emptyset, \theta \in \Theta. \quad (32)$$

Ограничения (32) обеспечивают отсутствие пересечения различных событий зарядки по времени на одной ЗС любого терминала, $\vee$ – исключающее «или».

Область значений переменных задачи задают следующие ограничения:

$$y_{c,q}^{(\rho)} \in \{0,1\}, \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (33)$$

$$y_q^{(\rho)} \in \{0,1\}, \quad q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (34)$$

$$t_{c,q}^{(\rho)} \in [0, \tau_{m(q),\rho}^{\max}], \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (35)$$

$$\tau_q^{(\rho)} \in [0, \tau_{m(q),\rho}^{\max}], \quad q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (36)$$

$$\sigma_{\theta,c}^{(\rho)} \in \{0,1\}, \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (37)$$

$$\mu_{\theta}^{(\rho)} \in [0, |C_{\theta}|], \quad \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (38)$$

$$S_{c,q} \in [0, B_q], \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (39)$$

$$F_{c,q} \in [0, B_q], \quad c \in C_{\theta}^{(\rho)}, q \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta, \rho \in CT, \quad (40)$$

$$x_d^{(s)}(i) \in \{0,1\}, \quad d \in D, i \in I, \quad (41)$$

$$x_d^{(e)}(i) \in \{0,1\}, \quad d \in D, i \in I, \quad (42)$$

$$u_{m(v(i))}^{\min} \leq u_i^1, u_i^2, u_i^3, u_i^4 \leq u_{m(v(i))}^{\max}, \quad i \in I. \quad (43)$$

Переменные $y_{c,q}^{(\rho)}$, $y_q^{(\rho)}$, $\sigma_{\theta,c}^{(\rho)}$, $x_d^{(s)}(i)$, $x_d^{(e)}(i)$ являются булевыми, а $\mu_{\theta}^{(\rho)}$ – неотрицательными целочисленными, переменные $t_{c,q}^{(\rho)}$, $\tau_q^{(\rho)}$, $u_i^1, u_i^2, u_i^3, u_i^4$, $S_{c,q}$, $F_{c,q}$ принимают неотрицательные действительные значения.

Обозначим $\Phi^*(z)$ минимальное значение целевой функции подзадачи нижнего уровня при фиксированном назначении $z \in Z$. Положим $\Phi^*(z)=\infty$, если подзадача нижнего уровня для z неразрешима.

Подзадачу (1)–(43) при фиксированном назначении $z \in Z$ будем называть также задачей $A(z)$, а $\Phi^*(z)$ – минимальным значением задачи $A(z)$.

3.2. Подзадача верхнего уровня

Напомним, что общие суточные инвестиционные и операционные затраты на парк ЭБ, зарядную инфраструктуру и электроэнергию при фиксированном назначении z ЭБ парка сервисных рейсов определяются выражением $\Psi(z) = \sum_{m \in BT} c_m^{bus} \eta_m(z) + \Phi^*(z)$, первый

член которого представляет суточные затраты на ЭБ, а $\Phi^*(z)$ – минимальное значение целевой функции подзадачи нижнего уровня. Задача верхнего уровня заключается в выборе назначения $z^* \in Z$, минимизирующего общие суточные затраты $\Psi(z)$.

Для решения задачи верхнего уровня предлагается эвристический алгоритм локального поиска (АЛП) наилучшего назначения, включающий следующие алгоритмы:

1. Алгоритм поиска первоначального назначения $z^0 \in Z$ ЭБ парка $v \in V_m$ (типа m) сервисных рейсов $i \in I_m$ (ПНСР) соответствующего им типа $\pi(i)=m$, $m \in BT = \{1, 2, \dots, \bar{m}\}$. Алгоритм ПНСР итеративно применяет алгоритм формирования первоначального задания ЭБ (ФПЗЭ) для каждого из используемых ЭБ парка типа m в порядке возрастания индекса $v \in V_m$, $m \in BT$.

2. Алгоритм порождения новых вариантов назначений $z \in Z$ посредством обмена совместимыми сервисными рейсами (ОСР) между случайно выбираемыми заданиями ω_v , ω_w пары ЭБ $v, w \in V$.

3. Алгоритм порождения новых вариантов назначений $z \in Z$ посредством переноса сервисного рейса (ПСР) $i \in I$ из случайно выбираемого задания ω_v ЭБ $v \in V_m$ в другое задание ω_w ЭБ $w \in \bigcup_{\zeta=1}^m V_\zeta$.

4. Эвристические алгоритмы Con-Greedy и Rand, предложенные в работе [15] для задачи оптимизации расписания зарядки ЭБ в единственном терминале на минимальном количестве однородных ЗС при фиксированном множестве событий зарядки с фиксированными моментами начала и завершения зарядки. Алгоритмы Con-Greedy и Rand предназначены для нахождения верхней оценки числа ЗС каждого типа для каждого терминала транспортной сети. Алгоритмы модифицируются для событий зарядки типа $tp_{i,j}=2$ на двух соседних терминалах при фиксированных длительностях зарядки на ЗС различных типов. Для корректного решения задач оптимизации расписания и состава ЗС на терминалах необходимо:

– предварительно корректировать момент возможного начала зарядки на втором терминале при положительной длительности зарядки на первом терминале;

– в зависимости от последовательности решения задач оптимизации расписания и состава ЗС определять момент начала (окончания) зарядки с учетом длительности порожнего рейса между терминалами.

Введем дополнительные обозначения, используемые далее для описания алгоритмов:

λ – коэффициент, отражающий отношение удельных расходов на порожние рейсы, выполняемые ЭБ, к общим удельным расходам на ЭБ, $\lambda \in [0, 1]$;

ε – размер окрестности моментов начала сервисных рейсов;

$A^p(z)$ – релаксированная задача СЦПП (1)–(31), (33)–(43); по сравнению с задачей $A(z)$ в ней опущены ограничения (32), запрещающие пересечение событий зарядки на любой ЗС;

Φ^{pek} – текущее рекордное (наименьшее) значение целевой функции задачи $A(z)$;

$\Phi^p = \Phi^{p*}(z)$ – оптимальное значение целевой функции релаксированной задачи $A^p(z)$ для назначения z ;

$\bar{\Phi}(z)$ – верхняя оценка значения задачи $A(z)$, полученная посредством замены в значении $\Phi^{p*}(z)$ целевой функции релаксированной задачи $A^p(z)$ компонент стоимостей ЗС терминалов стоимостями минимальных количеств ЗС терминалов, найденных с помощью алгоритмов Con-Greedy и Rand на базе решения $A^p(z)$;

z^0 – начальное назначение;

z^{mek} – текущее назначение;

z^{pek} – текущий рекорд назначения среди решений задачи $A(z)$;

$\Xi(z^{mek})$ – набор вариантов возможных назначений z' , порождаемых из z^{mek} процедурами ОСР и ПСР;

$\varphi \geq 1$ – предельное число вариантов назначений в любом наборе $\Xi(z^{mek})$;

$\chi \geq 0$ – доля предельно допустимого превышения $(1+\chi)\Phi^{pek}$ рекордного значения Φ^{pek} среди оценок $\bar{\Phi}(z)$ решений задачи $A^p(z^{mek})$ при формировании набора $\Xi(z^{mek})$ вариантов возможных назначений;

CPU – предельное время решения;

Iter – количество выполняемых итераций;

Iter_c – количество итераций без улучшения целевой функции.

3.2.1. Эвристические алгоритмы ПНСР, ФПЗЭ и процедура выбора сервисного рейса (ВСР)

Алгоритм ПНСР: первоначальное назначение сервисных рейсов ЭБ.

Вход: $I_m, V_m, m \in VT$, параметры λ, ε .

Выход: назначение z .

Алгоритм ПНСР итеративно в порядке возрастания индекса v используемых ЭБ парка типа m обращается к алгоритму формирования первоначального задания ω_v ЭБ (ФПЗЭ) для каждого $v \in V_m, m \in VT$.

Алгоритм ФПЗЭ: формирование первоначального задания ЭБ.

Вход: $v \in V_m, I^c \subseteq I_m, m \in VT$, параметры λ, ε .

Выход: задание ω_v .

Алгоритм ФПЗЭ последовательно обращается к одному из вариантов (ВСР1, ВСР2, ВСР3, ВСР4) эвристической процедуры ВСР из подмножества $I^c \subseteq I_m$ еще не распределенных сервисных рейсов типа m и проверки допустимости включения его в задание. Используемые варианты ВСР1, ВСР2, ВСР3, ВСР4 этой процедуры описаны ниже. Проверка допустимости включения очередного рейса в задание алгоритмом включает условия совместимости по времени с предыдущим рейсом уже построенной последовательности, а также условия достаточности времени пребывания ЭБ в промежуточных терминалах для пополнения заряда на ЗС с максимально возможной мощностью до уровня, обеспечивающего выполнение включаемого рейса.

Варианты эвристической процедуры ВСР выбора очередного сервисного рейса типа m

Предложенные варианты процедуры выбора рейса применяются для разнотипных сервисных рейсов процедур выбора (см. [13]) из множества однотипных сервисных рейсов, обслуживаемых идентичными ЭБ.

Посредством каждого из вариантов ВСП1, ВСП2, ВСП3, ВСП4 процедуры ВСП для каждого ЭБ $v \in V_m$ в порядке возрастания индекса v формируется максимальная по включению последовательность (задание) $\omega_v = \{j_{v,1}, j_{v,2}, \dots, j_{v,\bar{l}_v}\}$ совместимых сервисных рейсов $j_{v,l} \in I_m$, $\beta_{j_{v,l}} + \gamma_{j_{v,l}, j_{v,l+1}} \leq \alpha_{j_{v,l+1}}$, $l=1, 2, \dots, \bar{l}_v - 1$, типа m , назначаемых этому ЭБ.

Варианты процедуры ВСП отличаются способом выбора очередного сервисного рейса для рассматриваемого ЭБ: ВСП1 ориентирован на минимизацию суммарной длительности интервалов между сервисными рейсами ЭБ с целью увеличения количества выполняемых им сервисных рейсов; ВСП2 минимизирует взвешенную комбинацию дневных затрат на ЭБ и затрат на потраченную им в порожних рейсах электроэнергию; ВСП3 и ВСП4 являются рандомизированными аналогами процедуры в заданной окрестности минимального значения для ВСП1 и ВСП2 соответственно.

Используемые обозначения:

I^c – текущее подмножество нераспределенных сервисных рейсов из множества I_m ;

i^c – текущий сервисный рейс, распределяемый ЭБ v ;

ω_v^c – текущее задание ЭБ v ;

R_θ^- – доступный ресурс заряда в терминале $\theta \in \{b_i, a_j \mid i, j \in I^c\}$ перед возможной зарядкой в θ ;

R_θ^+ – доступный ресурс заряда ЭБ в терминале $\theta \in \{b_i, a_j \mid i, j \in I^c\}$ после возможной зарядки в θ ;

$D_{i^c, m}^-$ – подмножество депо из D , таких, что для каждого $d \in D_{i^c, m}^-$ заряд $g_{d, i^c, m}$, потраченный в порожнем рейсе ЭБ $v \in V_m$ из депо d в начальный терминал a_{i^c} , не может быть восстановлен на этом терминале вследствие недопустимо малой длительности зарядки $g_{d, i^c, m} < t_{cmin} \cdot \min\{f_{m, \rho} \mid \rho \in CT\}$; f_{m, ρ^*} – максимальная скорость зарядки для ЭБ типа m , $f_{m, \rho^*} = \max\{f_{m, \rho} \mid \rho \in CT\}$;

E_θ – доступная величина заряда при возможной зарядке в θ , $E_\theta \geq 0$;

γ_{ij} – длительность порожнего рейса из терминала b_i после рейса i в терминал a_j рейса j ;

$H(x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда, $H(x)=0$ при $x<0$ и 1 при $x \geq 0$;

$\text{sgn}(x)$ – функция знака, $\text{sgn}(x)=-1$ при $x<0$, 0 при $x=0$ и 1 при $x \geq 0$.

Процедура ВСП1: выбор очередного сервисного рейса с минимальным временем начала.

Вход: i, I^c .

Выход: $j^* = \arg \min\{\alpha_j \mid j \in I^c\}$.

Процедура ВСП2: выбор очередного сервисного рейса с минимальной взвешенной суммой времени начала рейса и длительности предшествующего порожнего рейса.

Вход: i, I^c, λ .

Выход: $j^* = \arg \min\{\alpha_j + \lambda \gamma_{ij} \mid j \in I^c\}$.

Процедура ВСП3: случайный выбор очередного сервисного рейса из окрестности минимального значения момента начала.

Вход: i, I^c, ε .

Выход: j^* выбирается в множестве I^c равномерно среди значений моментов старта из отрезка $[\alpha^*, \alpha^* + \varepsilon]$, где $\alpha^* = \min\{\alpha_j \mid j \in I^c\}$.

Процедура ВСП4: случайный выбор очередного сервисного рейса из окрестности минимального значения взвешенной суммы начала рейса и длительности предшествующего порожнего рейса.

Вход: $i, I^c, \lambda, \varepsilon$.

Выход: j^* выбирается в множестве I^c равновероятно среди значений моментов старта из отрезка $[\delta_{ij}^*, \delta_{ij}^* + \varepsilon]$, где $\delta_{ij}^* = \min\{\alpha_j + \lambda \gamma_{ij} \mid j \in I^c\}$.

Эвристический алгоритм ПФЗЭ

Шаг 0. Полагаем $\omega_v^c = \emptyset$.

Шаг 1. Если $I^c = \emptyset$, то конец (ω_v^c – решение).

Иначе, если $I^c \neq \emptyset$, выбираем первый сервисный рейс $i^* = j_{v,1}$ одним из вариантов процедуры ВСП. Переход к шагу 2.

Шаг 2. Если $D \setminus D_{i^*,m}^- \neq \emptyset$, то существует депо $d^s \in D \setminus D_{i^*,m}^-$, после порожнего рейса из которого в терминал a_{i^*} выполняется $R_{a_{i^*}}^+ = u_m^{\max} - u_m^{\min}$. Тогда по условиям задачи $R_{a_{i^*}}^+ - g_{i^*,m} = u_m^{\max} - u_m^{\min} - g_{i^*,m} \geq 0$. Полагаем $i^c = i^*$, $\omega_v^c = \{i^c\}$, $R_{a_{i^c}}^+ = u_m^{\max} - u_m^{\min}$. Иначе, если $D \setminus D_{i^*,m}^- = \emptyset$ и $u_m^{\max} - u_m^{\min} - \min_{d \in D_{i^*,m}^-} g_{d,i^*,m} - g_{i^*,m} \geq 0$, полагаем $i^c = i^*$, $\omega_v^c = \{i^c\}$, $R_{a_{i^c}}^+ = u_m^{\max} - u_m^{\min} - \min_{d \in D_{i^*,m}^-} g_{d,i^*,m}$.

Определяем $R_{b_{i^c}}^- = R_{a_{i^c}}^+ - g_{i^c,m} \geq 0$.

Полагаем $I^c = I^c \setminus \{i^c\}$. Переход к шагу 3.

Иначе, если $D \setminus D_{i^*,m}^- = \emptyset$ и $u_m^{\max} - u_m^{\min} - \min_{d \in D_{i^*,m}^-} g_{d,i^*,m} - g_{i^*,m} < 0$, то i^* – недопустимый рейс.

Полагаем $I^c = I^c \setminus \{i^*\}$.

Переход к шагу 1.

Шаг 3. Если $I^c = \emptyset$, то конец (ω_v^c – решение).

Иначе для i^c ищем очередной сервисный рейс $j^* \in I^c$ одним из вариантов процедуры ВСП при выполнении условия допустимости уровня заряда в терминале b_{i^c} для порожнего рейса в a_{j^*} :

$$R_{b_{i^c}}^- + H(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c,j^*} - \Delta - tc_{min}) \cdot f_{m,p^*}(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c,j^*} - \Delta) \geq g_{i^c,j^*,m}. \quad (44)$$

Шаг 3.1. Если для j^* условие (44) не выполняется, то переход к шагу 3.2, иначе полагаем

$$E_{b_{i^c}} = \min \{ u_m^{\max} - u_m^{\min} - R_{b_{i^c}}^- ; H(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c,j^*} - \Delta - tc_{min}) \cdot f_{m,p^*}(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c,j^*} - \Delta) \},$$

$$R_{b_{i^c}}^+ = R_{b_{i^c}}^- + E_{b_{i^c}}.$$

Определяем $R_{a_{j^*}}^- = R_{b_{i^c}}^+ - g_{i^c,j^*,m}$, $E_{a_{j^*}} = \min \{ u_m^{\max} - u_m^{\min} - R_{a_{j^*}}^- ; H(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c,j^*} - \Delta - tc_{min}) \cdot f_{m,p^*}(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c,j^*} - \Delta) - \frac{E_{b_{i^c}}}{f_{m,p^*}} - \Delta \cdot \text{sgn}(E_{b_{i^c}}) - \Delta - tc_{min} \} \cdot f_{m,p^*}(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c,j^*} - \Delta - tc_{min}) - \frac{E_{b_{i^c}}}{f_{m,p^*}} - \Delta \cdot \text{sgn}(E_{b_{i^c}}) - \Delta$ и проверяем условие допустимости для сервисного рейса j^* :

$$R_{a_{j^*}}^- + E_{a_{j^*}} \geq g_{j^*,m}. \quad (45)$$

Если для j^* условие (45) не выполняется, то переход к шагу 3.2. Иначе полагаем

$$R_{a_{j^*}}^+ = R_{a_{j^*}}^- + E_{a_{j^*}}, R_{b_{j^*}}^- = R_{a_{j^*}}^+ - g_{j^*,m}.$$

Полагаем $\omega_v^c = \omega_v^c \cup \{j^*\}$, $I^c = I^c \setminus \{j^*\}$, $i^c = j^*$. Переход к шагу 3.

Шаг 3.2. Выбранный j^* недопустим, полагаем $I^c = I^c \setminus \{j^*\}$. Переход к шагу 3.

Замечание 1. Если в результате выполнения алгоритма ФПЗЭ задание $\omega_v^c = \emptyset$, то ЭБ v не используется. В этом случае $\omega_v^c = \emptyset$ для всех $v \leq o \leq \eta_m(z)$.

Замечание 2. Если при завершении работы алгоритма ПНСР $I^c \neq \emptyset$, то допустимое решение задачи не найдено.

3.2.2. Эвристические алгоритмы ОСР и ПСР

Алгоритм ОСР: обмен сервисными рейсами заданий.

Вход: задания ω_v, ω_w , рейсы $i_{v,q}, j_{w,p}$, $v, w \in V$.

Выход: модифицированные задания $\tilde{\omega}_v, \tilde{\omega}_w$.

Алгоритм ОСР сводится к построению на основе $\omega_v, \omega_w \in Z^{mek}$ пары модифицированных заданий $\tilde{\omega}_v, \tilde{\omega}_w$ посредством обмена случайно выбранными одинарными рейсами совместимых типов для каждого из заданий. Вероятности выбора заданий ω_v, ω_w и рейсов для обмена пропорциональны экономии энергозатрат при замене пары ω_v, ω_w парой $\tilde{\omega}_v, \tilde{\omega}_w$.

При заданном текущем назначении z^{mek} случайно выбираются $\omega_v = (i_{v,1}, \dots, i_{v,q-1}, i_{v,q}, i_{v,q+1}, \dots, i_{v,f_v})$, $\omega_w = (j_{w,1}, \dots, j_{w,p-1}, j_{w,p}, j_{w,p+1}, \dots, j_{w,f_w})$, $\omega_v, \omega_w \in Z^{mek}$ и по одному рейсу $i_{v,q} \in \omega_v, j_{w,p} \in \omega_w$ из них, при обмене которыми для всех рейсов пары модифицированных заданий $\tilde{\omega}_v = (i_{v,1}, \dots, i_{v,q-1}, j_{w,p}, i_{v,q+1}, \dots, i_{v,f_v})$, $\tilde{\omega}_w = (j_{w,1}, \dots, j_{w,p-1}, i_{v,q}, j_{w,p+1}, \dots, j_{w,f_w})$ выполняются временные условия совместимости

$$\beta_{i_{v,q-1}} + \gamma_{i_{v,q-1}, j_{w,p}} \leq \alpha_{j_{w,p}}, \quad (46)$$

$$\beta_{j_{w,p}} + \gamma_{j_{w,p}, i_{v,q+1}} \leq \alpha_{i_{v,q+1}}, \quad (47)$$

$$\beta_{j_{w,p-1}} + \gamma_{j_{w,p-1}, i_{v,q}} \leq \alpha_{i_{v,q}}, \quad (48)$$

$$\beta_{i_{v,q}} + \gamma_{i_{v,q}, j_{w,p+1}} \leq \alpha_{j_{w,p+1}}. \quad (49)$$

Алгоритм ПСР: перенос сервисного рейса из одного задания в другое.

Вход: задания ω_v, ω_w , рейсы $i_{v,q}, j_{w,p}$, $v, w \in V$.

Выход: модифицированные задания $\hat{\omega}_v, \hat{\omega}_w$.

Алгоритм ПСР сводится к построению на базе заданий $\omega_v, \omega_w \in Z^{mek}$ пары модифицированных заданий $\hat{\omega}_v, \hat{\omega}_w$ за счет переноса случайно выбираемого совместимого рейса $i_{v,q} \in \omega_v$ в задание ω_w после случайно выбираемого рейса $j_{w,p} \in \omega_w$.

При заданном назначении z^{mek} случайно выбираются пара заданий $\omega_v = (i_{v,1}, \dots, i_{v,q-1}, i_{v,q}, i_{v,q+1}, \dots, i_{v,f_v})$, $\omega_w = (j_{w,1}, \dots, j_{w,p}, j_{w,p+1}, \dots, j_{w,f_w})$ ЭБ $v \in V_m, w \in V_m \cup \dots \cup V_1$, $\omega_v, \omega_w \in Z^{mek}$, рейс $i_{v,q}$ из одного задания ω_v для переноса, а также рейс $j_{w,p}$ из другого задания ω_w как предшественник рейса $i_{v,q}$ в модифицированном новом задании $\hat{\omega}_w$. Вероятности выбора заданий ω_v, ω_w и рейсов $i_{v,q}, j_{w,p}$ пропорциональны экономии энергозатрат при замене пары

ω_v, ω_w парой $\hat{\omega}_v, \hat{\omega}_w$. Строится пара модифицированных заданий $\hat{\omega}_v = (i_{v,1}, \dots, i_{v,q-1}, i_{v,q+1}, \dots, i_{v,f_v})$, $\hat{\omega}_w = (j_{w,1}, \dots, j_{w,p}, i_{v,q}, j_{w,p+1}, \dots, j_{w,f_w})$ за счет переноса рейса $i_{v,q}$ из задания ω_v и включения его в задание ω_w после рейса $j_{w,p}$ при выполнении временных условий совместности

$$\beta_{i_{v,q-1}} + \gamma_{i_{v,q-1}, i_{v,q+1}} \leq \alpha_{j_{w,q+1}}, \quad (50)$$

$$\beta_{j_{w,p}} + \gamma_{j_{w,p}, i_{v,q}} \leq \alpha_{i_{v,q}}, \quad (51)$$

$$\beta_{i_{v,q}} + \gamma_{i_{v,q}, j_{w,p+1}} \leq \alpha_{j_{w,p+1}}. \quad (52)$$

Замечание 3. При использовании алгоритма ПСР в некоторых случаях количество $|V_m|$ применяемых ЭБ типа m может быть сокращено при сохранении неизменным количества ЭБ других типов.

3.2.3. Эвристический алгоритм локального поиска АЛП

Алгоритм АЛП: построение назначения $z^* \in Z$.

Вход: I, V , параметры χ, φ .

Выход: z^* .

Шаг 0. Строится множество Z^0 первоначальных назначений с помощью итеративного применения алгоритма ПНСР.

Шаг 1. Пока $Z^0 \neq \emptyset$, выбирается произвольное первоначальное назначение $z^0 \in Z^0$.

Шаг 2. Решается задача $A(z^0)$. Если $\Phi^*(z^0) < \infty$, то z^0 принимается в качестве рекорда назначения для исходной задачи $z^{pek} := z^0$, также полагается $\Phi^{pek} = \Phi^*(z^{pek})$, $z^{mek} = z^0$ и $\Xi(z^{mek}) = \{z^0\}$. Переход к шагу 3. Иначе, если $\Phi^*(z^0) = \infty$, для z^0 задача неразрешима. Полагается $Z^0 = Z^0 \setminus \{z^0\}$. Переход к шагу 1.

Шаг 3. Итеративно, пока $|\Xi(z^{mek})| \leq \varphi$ и множество кандидатов пар заданий из z^{mek} для обмена рейсами непусто, для z^{mek} применяется алгоритм ОСР порождения новых вариантов назначений z' посредством случайно выбираемых двух заданий $\omega_v, \omega_w \in z^{mek}$ и рейсов этих заданий на обмен. Для варианта z' , полученного алгоритмом ОСР, решается релаксированная задача $A^p(z')$ и с помощью алгоритмов Con-Greedy и Rand вычисляется верхняя оценка $\bar{\Phi}(z')$. Если $\Phi^*(z') = \infty$ либо $\bar{\Phi}(z') > (1+\chi)\Phi^{pek}$, то вариант исключается из рассмотрения. Иначе при $\bar{\Phi}(z') \leq (1+\chi)\Phi^{pek}$ полагается $\Xi(z^{mek}) = \Xi(z^{mek}) \cup \{z'\}$. Варианты в $\Xi(z^{mek})$ упорядочиваются в порядке возрастания оценки $\bar{\Phi}(z)$.

Шаг 4. Для каждого $z \in \Xi(z^{mek})$ решается задача $A(z)$. Если $\min \{\Phi^*(z) | z \in \Xi(z^{mek})\} < \Phi^{pek}$, то рекорд назначения обновляется $z^{pek} := \arg \min \{\Phi^*(z) | z \in \Xi(z^{mek})\}$, полагается $\Phi^{pek} := \Phi^*(z^{pek})$, $z^{mek} := z^{pek}$ и переход к шагу 3. Иначе, если $z^{mek} = z^{pek}$ (рекорд не изменился), полагается $\Xi(z^{mek}) = \{z^{pek}\}$ и переход к шагу 5.

Шаг 5. Итеративно, пока $|\Xi(z^{mek})| \leq \varphi$ и множество кандидатов пар заданий из z^{mek} для переноса рейсов непусто, для z^{mek} применяется алгоритм ПСР порождения новых вариантов назначений z' посредством случайно выбираемых из z^{mek} заданий, рейсов этих заданий и переноса этих рейсов из одного задания в другое. Для варианта z' , полученного алгоритмом ПСР, решается релаксированная задача $A^p(z')$ и вычисляется верхняя оценка $\bar{\Phi}(z')$. Если $\Phi^*(z') = \infty$ либо $\bar{\Phi}(z') > (1+\chi)\Phi^{pek}$, то вариант исключается из рассмотрения. Иначе при $\bar{\Phi}(z') \leq (1+\chi)\Phi^{pek}$ полагается $\Xi(z^{mek}) = \Xi(z^{mek}) \cup \{z'\}$. Варианты в $\Xi(z^{mek})$ упорядочиваются в порядке возрастания оценки $\bar{\Phi}(z)$.

Шаг 6. Для каждого $z \in \Xi(z^{mek})$ решается задача $A(z)$. Если $\min \{\Phi^*(z) | z \in \Xi(z^{mek})\} < \Phi^{pek}$, то рекорд назначения обновляется $z^{pek} := \arg \min \{\Phi^*(z) | z \in \Xi(z^{mek})\}$, полагается $\Xi(z^{mek}) = \{z^{pek}\}$ и переход к шагу 5. Иначе, если $z^{mek} = z^{pek}$ (рекорд не изменился), то полагается $z^* := z^{pek}$, $\Phi^* := \Phi^*(z^{pek})$. Переход к шагу 1.

Последовательность шагов 0–6 алгоритма АЛП повторяется до тех пор, пока не выполнится хотя бы один из критериев останова по заданным предельным значениям параметров: CPU – время решения, Iter – число выполняемых итераций, Iter_c – число итераций без улучшения значения целевой функции.

Замечание 4. Используемые в алгоритме АЛП параметры мощности φ множества рассматриваемых вариантов назначений и доли χ предельно допустимого превышения рекордного значения целевой функции предназначены для выхода из окрестности локального оптимума в процессе поиска решения задачи. Предполагаемые оценки диапазонов целесообразных значений параметров φ и χ представляются отрезками [3, 10] и [0,1, 0,3] соответственно. Эффективность подбора этих значений зависит от проблемной ситуации, определяемой соотношением капитальных и операционных затрат на компоненты ЭБ, ЗС транспортной системы, характеристиками маршрутов, тарифами и т. п., а также от размерности решаемой задачи (мощности парка ЭБ, размеров транспортной сети и количества выполняемых рейсов).

Заключение

Разработаны математическая модель и декомпозиционная двухуровневая схема решения задачи оптимизации состава разнотипного парка ЭБ, распределения ЭБ по депо из заданного набора, назначения ЭБ на разнотипные сервисные рейсы из заданного множества, мест размещения и состава размещаемых на терминалах маршрутов разнотипных ЗС различной мощности, а также расписания зарядки на них в течение дня. Подзадача нижнего уровня заключается в оптимизации распределения ЭБ по депо, комплектации терминалов маршрутов ЗС и расписаний зарядки ЭБ при фиксированных составе парка и назначении рейсов ЭБ. Подзадача верхнего уровня состоит в выборе эффективного назначения ЭБ парка последовательностей рейсов. Для подзадачи нижнего уровня разработана новая модель смешанного целочисленного линейного программирования. Для подзадачи верхнего уровня предложен комплекс эвристических алгоритмов построения первоначального назначения и локального поиска за счет обмена сервисными рейсами различных последовательностей и перемещения рейсов из одной последовательности в другую. В дальнейшем целесообразно провести экспериментальную проверку предложенных модели и методов на реальных примерах транспортной сети с использованием парка разнотипных ЭБ. Интерес также представляет исследование совместимости ЭБ различных типов с разными типами ЗС.

Вклад авторов. Н. Н. Гуцинским уточнена модель смешанного целочисленного линейного программирования для подзадачи нижнего уровня, а также внесены корректировки в схему алгоритма локального поиска. М. Я. Ковалевым выполнена верификация предложенных математической модели, декомпозиционной схемы и методов решения подзадач, а также редактирование статьи. Б. М. Розиным предложена постановка задачи и двухуровневая декомпозиционная схема ее решения. Для подзадачи нижнего уровня при фиксированных последовательностях сер-

висных рейсов для ЭБ парка разработана модель смешанного целочисленного линейного программирования. Для подзадачи верхнего уровня предложен эвристический алгоритм локального поиска. Представлена первоначальная версия текста статьи.

Список использованных источников

1. Dirks, N. On the integration of battery electric buses into urban bus networks / N. Dirks, M. Schiffer, G. Walther // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. – 2022. – Vol. 139. – Art. 103628. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0968090X22000730?via%3Dihub> (date of access: 13.04.2026). – <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103628>.
2. Battery capacity and recharging needs for electric buses in city transit service / Z. Gao, Z. Lin, T. J. LaClair [et al.] // *Energy*. – 2017. – Vol. 122. – P. 588–600.
3. Olsson, O. Method to analyze cost effectiveness of different electric bus systems / O. Olsson, A. Grauers, S. Pettersson // *EVS29 Intern. Battery, Hybrid and Fuel Cell Electric Vehicle Symp., Montreal, Quebec, Canada, June 2016*. – Montreal, 2016. – URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1159796/FULLTEXT01.pdf> (date of access: 13.04.2026).
4. Fleet and charging infrastructure decisions for fast-charging city electric bus service / N. Guschinsky, M. Y. Kovalyov, B. Rozin, N. Brauner // *Computers and Operations Research*. – 2021. – Vol. 135. – Art. 105449. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054821002021?via%3Dihub> (date of access: 13.04.2026). – <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105449>.
5. Designing fast-charge urban electric bus services: An Integer Linear Programming model / O. Battaïa, A. Dolgui, N. Guschinsky, M. Y. Kovalev // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. – 2023. – Vol. 171. – Art. 103065. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1366554523000534?via%3Dihub> (date of access: 13.04.2026). – <https://doi.org/10.1016/j.tre.2023.103065>.
6. Nath, R. B. On the impact of co-optimizing station locations, trip assignment, and charging schedules for electric buses / R. B. Nath, T. Rambha, M. Schiffer // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. – 2024. – Vol. 167. – Art. 104839. – URL: <https://arxiv.org/pdf/2403.09763> (date of access: 13.04.2026).
7. Integrated solution for electric bus timetabling and vehicle scheduling combined with choices of charging locations / N.-H. Quttineh, C. H. Häll, E. J. Ekström, A. Ceder // *Journal of Public Transportation*. – 2023. – Vol. 25. – Art. 100055. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077291X23000164> (date of access: 13.04.2026).
8. Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure / M. Rogge, E. van der Hurk, A. Larsen, D. U. Sauer // *Applied Energy*. – 2018. – Vol. 211. – P. 282–295.
9. Liu, T. Battery-electric transit vehicle scheduling with optimal number of stationary chargers / T. Liu, A. Ceder // *Transportation Research Part C*. – 2020. – Vol. 114. – P. 118–139.
10. Enhancing public transportation sustainability: Insights from electric bus scheduling and charge optimization / F. Behnia, S. S. M. N. Souq, B.-A. Schuelke-Leech, M. Mirhassani // *Sustainable Cities and Society*. – 2025. – Vol. 125. – Art. 106298. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210670725001751?via%3Dihub> (date of access: 13.04.2026). – <https://doi.org/10.1016/j.scs.2025.106298>.
11. Optimization of electric vehicle scheduling with multiple vehicle types in public transport / E. Yao, T. Liu, T. Lu, Y. Yang // *Sustainable Cities and Society*. – 2020. – Vol. 52. – Art. 101862. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S2210670719318098> (date of access: 13.04.2026).
12. Mixed electric bus fleet scheduling problem with partial mixed-route and partial recharging / A. Zhang, T. Li, Y. Zheng [et al.] // *International Journal of Sustainable Transportation*. – 2021. – Vol. 16. – P. 73–83.

13. Гушинский, Н. Н. О совместной оптимизации размещения зарядных станций, маршрутизации электробусов и расписаний зарядки / Н. Н. Гушинский, М. Я. Ковалев, Б. М. Розин // Информатика. – 2025. – Т. 22, № 4. – С. 7–23. – <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2025-22-4-7-23>.

14. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи : пер. с англ. / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 462 с.

15. Cost minimizing decisions on equipment and charging schedule for electric buses in a single depot / N. Guschinsky, M. Y. Kovalyov, E. Pesch, B. Rozin // *Transportation Research Part E*. – 2023. – Vol. 180. – Art. 103337. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1366554523003253?via%3Dihub> (date of access: 13.04.2026). – <https://doi.org/10.1016/j.tre.2023.103337>.

References

1. Dirks N., Schiffer M., Walther G. On the integration of battery electric buses into urban bus networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2022, vol. 139, art. 103628. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0968090X22000730?via%3Dihub> (accessed 13.04.2026). <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103628>.

2. Gao Z., Lin Z., LaClair T. J., Liu C., Li J.-M., ..., Ward J. Battery capacity and recharging needs for electric buses in city transit service. *Energy*, 2017, vol. 122, pp. 588–600.

3. Olsson O., Grauers A., Pettersson S. Method to analyze cost effectiveness of different electric bus systems. *EVS29 International Battery, Hybrid and Fuel Cell Electric Vehicle Symposium, Montreal, Quebec, Canada, June 2016*. Montreal, 2016. Available at: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1159796/FULLTEXT01.pdf> (accessed 13.04.2026).

4. Guschinsky N., Kovalyov M. Y., Rozin B., Brauner N. Fleet and charging infrastructure decisions for fast-charging city electric bus service. *Computers and Operations Research*, 2021, vol. 135, art. 105449. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054821002021?via%3Dihub> (accessed 13.04.2026). <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105449>.

5. Battaia O., Dolgui A., Guschinsky N., Kovalev M. Y. Designing fast-charge urban electric bus services: An Integer Linear Programming model. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2023, vol. 171, art. 103065. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1366554523000534?via%3Dihub> (accessed 13.04.2026). <https://doi.org/10.1016/j.tre.2023.103065>.

6. Nath R.B., Rambha T., Schiffer M. On the impact of co-optimizing station locations, trip assignment, and charging schedules for electric buses. *Transportation research Part C: Emerging technologies*, 2024, vol. 167, art. 104839. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2403.09763> (accessed 13.04.2026).

7. Quttineh N.-H., Häll C. H., Ekström E. J., Ceder A. Integrated solution for electric bus timetabling and vehicle scheduling combined with choices of charging locations. *Journal of Public Transportation*, 2023, vol. 25, art. 100055. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077291X23000164> (accessed 13.04.2026).

8. Rogge M., van der Hurk E., Larsen A., Sauer D. U. Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure. *Applied Energy*, 2018, vol. 211, pp. 282–295.

9. Liu T., Ceder A. Battery-electric transit vehicle scheduling with optimal number of stationary chargers. *Transportation Research Part C*, 2020, vol. 114, pp. 118–139.

10. Behnia F., Souq S. S. M. N., Schuelke-Leech B.-A., Mirhassani M. Enhancing public transportation sustainability: Insights from electric bus scheduling and charge optimization. *Sustainable Cities and Society*, 2025, vol. 125, art. 106298. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210670725001751?via%3Dihub> (accessed 13.04.2026). <https://doi.org/10.1016/j.scs.2025.106298>.

11. Yao E., Liu T., Lu T., Yang Y. Optimization of electric vehicle scheduling with multiple vehicle types in public transport. *Sustainable Cities and Society*, 2020, vol. 52, art. 101862. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S2210670719318098> (accessed 13.04.2026).
12. Zhang A., Li T., Zheng Y., Li X., Abdullah M., Dong C. Mixed electric bus fleet scheduling problem with partial mixed-route and partial recharging. *International Journal of Sustainable Transportation*, 2021, vol. 16, pp. 73–83.
13. Guschinsky N. N., Kovalyov M. Y., Rozin B. M. *On the joint optimization of charging stations location, electric bus routing and charging scheduling*. *Informatika [Informatics]*, 2025, vol. 22, no. 4, pp. 7–23 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2025-22-4-7-23>.
14. Garey M. R., Johnson D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. (Series of Books in the Mathematical Sciences). W. H. Freeman and Company, 1979, 340 p.
15. Guschinsky N., Kovalev M. Y., Pesch E., Rozin B. Cost minimizing decisions on equipment and charging schedule for electric buses in a single depot. *Transportation Research Part E*, 2023, vol. 180, art. 103337. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1366554523003253?via%3Dihub> (accessed 13.04.2026). <https://doi.org/10.1016/j.tre.2023.103337>.

Информация об авторах

Гуцинский Николай Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: gyshin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-1166-2387>

Ковалев Михаил Яковлевич, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-0832-0829>

Розин Борис Матвеевич, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: rozin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-3814-6569>

Information about the authors

Nikolai N. Guschinsky, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: gyshin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-1166-2387>

Mikhail Y. Kovalyov, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Principal Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-0832-0829>

Boris M. Rozin, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: rozin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-3814-6569>