ИНФОРМАТИКА

2014 январь-март № 1

УДК 517.958:537.8

В.Т. Ерофеенко

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМПОЗИТОВ ИЗ СФЕРИЧЕСКИХ БИИЗОТРОПНЫХ ЧАСТИЦ

Разрабатывается метод вычисления эффективных материальных параметров кирального композита, который состоит из разреженной системы дискретных рассеивателей, заполненных материалом с произвольными комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями и комплексными параметрами биизотропности. В полученных расчетных аналитических формулах используется точное аналитическое решение задачи дифракции на биизотропной сфере электромагнитных волн с длиной волны, значительно превосходящей диаметр частиц.

Введение

В настоящее время определяющее значение в научных исследованиях электродинамики приобретают исследования электродинамических свойств композитных материалов различных категорий [1, 2]. Композитные материалы представляют собой структурно неоднородную среду с большим разнообразием структурных элементов, отличающихся геометрией, химическим составом и уровнем линейных размеров. К ним относятся метаматериалы [3, 4], киральные среды [5], квадрупольные материалы [1], наноструктурные композиты [6] и др. Моделирование таких композитов сводится к эквивалентной замене структурно неоднородных материалов однородными средами [1, 7]. При этом выделяются основные материальные параметры идеальной среды, называемые эффективными параметрами. Разработан ряд методов моделирования эффективных параметров: метод Максвелла – Гарнетта для композитов, когда длина волны значительно больше размеров неоднородностей, а объемные коэффициенты заполнения малы [8]; метод интегральных уравнений Поклингтона для композитов с проволочными включениями [9–11]; методика [12, 13] для киральных композитов со сферическими частицами из магнитоэлектрических материалов с винтовой проводимостью поверхности. Обсуждаются подходы к моделированию эффективных параметров [14].

В настоящей работе предложен аналитический метод моделирования композитов, которые состоят из однородных сферических биизотропных частиц одинаковых радиусов, случайно распределенных в вакууме. Используется методика усреднения электрических и магнитных индукций и полей по неоднородной области больших размеров при воздействии на структуры плоской электромагнитной волны.

1. Композит из биизотропных частиц

В матрице, заполненной вакуумом с электрической и магнитной постоянными ε_0, μ_0, случайным образом размещено большое число биизотропных сферических частиц радиуса *R*, характеризуемых материальными параметрами ε, μ, G, Z.

Выделим частицу $D_R(0 \le r < R)$ с центром *O* в начале декартовых координат *Oxyz* ($Or\theta\varphi$ – сферические координаты). Обозначим области: $D_P(0 \le r < P)$ – шаровая область достаточно большого радиуса *P*; $D_{RP}(R < r < P)$ – шаровой слой вокруг частицы D_R; D_0 – область между частицами, $D_0 \subset D_P$; D_S – область внутри *S*-частицы, $D_P = \bigcup_{S=1}^{N} D_S \cup D_0$, $D_1 = D_R$.

Будем предполагать, что

$$R << P << \lambda, \tag{1}$$

где λ – длина электромагнитной волны $\vec{E}_0, \vec{H}_0$, распространяющейся в вакууме; $f \le 10$ ГГц, $R \le 4$ мкм, $P \approx 30R$. Введем обозначения: N – число частиц в области D_P; $V_R = \frac{4\pi}{3} R^3$ – объем частицы, V_P – объем области D_P; $\nu = \frac{N}{V_P}$ – концентрация частиц (число частиц в единице объема матрицы), $\tau = \nu V_R$ – объемный коэффициент заполнения матрицы сферическими частицами (суммарный объем сферических частиц в единице объема матрицы).

Построим математическую модель композита из биизотропных частиц, используя теорию биизотропных сред, электромагнитные поля в которых описываются уравнениями

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\vec{B};\ \operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\vec{D}, \tag{2}$$

где $\vec{B} = \mu_{эф}\vec{H} + Z_{эф}\vec{E}$, $\vec{D} = \varepsilon_{эф}\vec{E} + G_{эф}\vec{H}$, $\omega = 2\pi f$.

Проблема состоит в вычислении эффективных параметров $\varepsilon_{эф}, \mu_{эф}, G_{эф}, Z_{эф}$. Для построения модели композит подвергается воздействию электромагнитного поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ и исследуется отраженное поле. Сформируем вспомогательную краевую задачу дифракции поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ на изолированной частице D_R. Обозначим: $D'_R(R < r < \infty)$ – внешняя к шару D_R область, $\Gamma(r = R)$ – сферическая поверхность шара. В D'_R распространяется первичное электромагнитное поле $\vec{E}_0, \vec{H}_0$, колеблющееся с круговой частотой ω и временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$. Обозначим поля: $\vec{E}^0_R, \vec{H}^0_R$ – поле внутри шара D_R; $\vec{E}'_R, \vec{H}'_R$ – отраженное поле в D'_R; $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_R, \vec{H}_2 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_R$ – суммарное поле в области D'_R.

Краевая задача. Требуется для заданного первичного поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ определить электромагнитные поля $\vec{E}^0_R, \vec{H}^0_R \in C^1(D_R) \cap C(\overline{D}_R)$, $\vec{E}'_R, \vec{H}'_R \in C^1(D'_R) \cap C(\overline{D}'_R)$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}^0_R = i\omega\left(\mu\vec{H}^0_R + Z\vec{E}^0_R\right),\ \operatorname{rot}\vec{H}^0_R = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E}^0_R + G\vec{H}^0_R\right),\ 0 \le r < R, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}'_R = i\omega\mu_0\vec{H}'_R,\ \operatorname{rot}\vec{H}'_R = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}'_R,\ r > R; \tag{4}$$

граничным условиям

$$\vec{E}^0_{R\tau}\Big|_{r=R} = \vec{E}_{2\tau}\Big|_{r=R},\ \vec{H}^0_{R\tau}\Big|_{r=R} = \vec{H}_{2\tau}\Big|_{r=R} \tag{5}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial E'_R}{\partial r} - ik_0 E'_R\right) = 0. \tag{6}$$

2. Решение задачи дифракции на биизотропной сферической частице

В качестве первичного поля, воздействующего на частицы, выберем монохроматическое электромагнитное поле, которое представим в виде рядов по базисным сферическим полям [15, с. 188]:

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= \sum_{n,m}\left[a_{mn}\vec{m}_{mn}(\vec{r};k_0) + b_{mn}\vec{n}_{mn}(\vec{r};k_0)\right],\\ \vec{H}_0 &= h_0\sum_{n,m}\left[a_{mn}\vec{n}_{mn}(\vec{r};k_0) + b_{mn}\vec{m}_{mn}(\vec{r};k_0)\right],\end{aligned} \tag{7}$$

где a_{mn}, b_{mn} – заданные коэффициенты разложений, $\sum\limits_{n,m} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=-n}^{n}$, $h_0 = \dfrac{k_0}{i\omega\mu_0}$, $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, c – скорость света в вакууме; $\vec{n}_{mn} = f_n(k_0 r)\mathrm{Y}_n^m(\theta,\varphi)\vec{e}_r + g_n(k_0 r)\vec{\Pi}_{mn}(\theta,\varphi)$, $\vec{m}_{mn} = j_n(k_0 r)\vec{\mathrm{T}}_{mn}(\theta,\varphi)$, $\mathrm{Y}_n^m = P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $f_n(k_0 r) = \dfrac{n(n+1)}{k_0 r} j_n(k_0 r)$, $g_n(k_0, r) = \dfrac{1}{k_0 r}\dfrac{d}{dr}\left(r j_n(k_0 r)\right)$,

$$\vec{\Pi}_{mn} = \left(\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\theta + \frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\varphi\right)e^{im\varphi}, \quad \vec{\mathrm{T}}_{mn} = \left(\frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\theta - \frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\varphi\right)e^{im\varphi},$$

$n = 1, 2, \ldots, m = 0, \pm 1, \pm \ldots \pm n$; $j_n(x)$ – сферические функции Бесселя.

Лемма 1. Значение любого поля вида (7) в начале координат определяется формулами

$$\begin{aligned}
\vec{E}_0(0) &= \vec{E}_0^0 = E_x^0\vec{e}_x + E_y^0\vec{e}_y + E_z^0\vec{e}_z = E_+^0\vec{e}_+ + E_-^0\vec{e}_- + E_z^0\vec{e}_z = \\
&= \sum_{m=-1}^{1} b_{m1}\vec{n}_{m1}(0) = -\frac{2}{3}b_{11}\vec{e}_+ - \frac{1}{3}b_{-11}\vec{e}_- + \frac{2}{3}b_{01}\vec{e}_z, \\
\vec{H}_0(0) &= \vec{H}_0^0 = H_x^0\vec{e}_x + H_y^0\vec{e}_y + H_z^0\vec{e}_z = H_+^0\vec{e}_+ + H_-^0\vec{e}_- + H_z^0\vec{e}_z = \\
&= h_0\sum_{m=-1}^{1} a_{m1}\vec{n}_{m1}(0) = h_0\left(-\frac{2}{3}a_{11}\vec{e}_+ - \frac{1}{3}a_{-11}\vec{e}_- + \frac{2}{3}a_{01}\vec{e}_z\right),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\vec{e}_+ = i\vec{e}_y + \vec{e}_x$, $\vec{e}_- = i\vec{e}_y - \vec{e}_x$, $a_{01} = \dfrac{3}{2h_0}H_z^0$, $a_{11} = \dfrac{3}{4h_0}\left(iH_y^0 - H_x^0\right)$, $a_{-11} = \dfrac{3}{2h_0}\left(iH_y^0 + H_x^0\right)$,

$$b_{01} = \frac{3}{2}E_z^0, \quad b_{11} = \frac{3}{4}\left(iE_y^0 - E_x^0\right), \quad b_{-11} = \frac{3}{2}\left(iE_y^0 + E_x^0\right).$$

Доказательство следует из формул $\vec{n}_{mn}(0) = 0$ при $n = 2, 3, \ldots$; $\vec{n}_{01}(0) = \dfrac{2}{3}\vec{e}_z$, $\vec{n}_{11}(0) = -\dfrac{2}{3}\vec{e}_+$, $\vec{n}_{-11}(0) = -\dfrac{1}{3}\vec{e}_-$, $\vec{m}_{mn}(0) = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$; $m = 0, \pm 1, \ldots \pm n$. ■

Отраженное электромагнитное поле выразим через базисные сферические поля, которые удовлетворяют условию излучения (6) и уравнениям (4):

$$\begin{aligned}
\vec{E}'_R &= \sum_{n,m}\left[x_{mn}^{(2)}\tilde{\vec{m}}_{mn}(\vec{r}, k_0) + y_{mn}^{(2)}\tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r}, k_0)\right], \quad r > R, \\
\vec{H}'_R &= h_0\sum_{n,m}\left[x_{mn}^{(2)}\tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r}, k_0) + y_{mn}^{(2)}\tilde{\vec{m}}_{mn}(\vec{r}, k_0)\right],
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\tilde{\vec{n}}_{mn} = f_n^{(1)}(k_0 r)\mathrm{Y}_n^m(\theta,\varphi)\vec{e}_r + g_n^{(1)}(k_0 r)\vec{\Pi}_{mn}(\theta,\varphi)$, $\tilde{\vec{m}}_{mn} = h_n^{(1)}(k_0 r)\vec{\mathrm{T}}_{mn}(\theta,\varphi)$,

$$f_n^{(1)}(k_0 r) = \frac{n(n+1)}{k_0 r}h_n^{(1)}(k_0 r), \quad g_n^{(1)}(k_0 r) = \frac{1}{k_0 r}\frac{d}{dr}\left(r h_n^{(1)}(k_0 r)\right),$$

$h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Ханкеля.

Электромагнитное поле внутри шара D_R представим через базисные сферические поля в композитных средах, которые удовлетворяют уравнениям (3) [15, с. 122]:

$$\vec{E}_R^0 = \sum_{n,m}\left[x_{mn}^{(1)}\vec{K}_{mn}^{(1)}(\vec{r},k_1) + y_{mn}^{(1)}\vec{K}_{mn}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right], \quad 0 \le r < R,$$
$$\vec{H}_R^0 = \sum_{n,m}\left[x_{mn}^{(1)}\, p_1\vec{K}_{mn}^{(1)}(\vec{r},k_1) + y_{mn}^{(1)}\, p_2\vec{K}_{mn}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right], \tag{10}$$

где коэффициенты $x_{mn}^{(1)},\ y_{mn}^{(1)},\ x_{mn}^{(2)},\ y_{mn}^{(2)}$ определены в работе [15 , с. 275];

$$\vec{K}_{mn}^{(j)} = \vec{n}_{mn}(\vec{r},k_j) - q_j\vec{m}_{mn}(\vec{r},k_j),$$

$$k_j = \sqrt{g + \frac{1}{2}a^2 + af_j}, \quad 0 \le \arg k_j < \pi, \quad q_j = \frac{g}{k_j g_j},$$

$$p_j = \frac{1}{\mu}\left(\frac{ig}{\omega g_j} - Z\right), \quad f_j = (-1)^j f_0, \quad f_0 = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - b^2},$$

$$0 \le \arg\ f_0 < \pi, \quad g = \omega^2(\varepsilon\mu - ZG), \quad g_j = f_j - \frac{1}{2}a,$$

$$a = i\omega(G - Z), \quad b = \frac{\omega}{2}(G + Z), \quad j = 1, 2.$$

Удовлетворяя граничным условиям (5), получим систему алгебраических уравнений относительно $x_{mn}^{(1)},\ y_{mn}^{(1)},\ x_{mn}^{(2)},\ y_{mn}^{(2)}$:

$$x_{mn}^{(2)}h_n^{(1)}(\xi_0) + a_{mn}j_n(\xi_0) = -x_{mn}^{(1)}q_1 j_n(\xi_1) - y_{mn}^{(1)}q_2 j_n(\xi_2), \tag{11}$$

$$y_{mn}^{(2)}h_n^{(1)}(\xi_0) + b_{mn}j_n(\xi_0) = -x_{mn}^{(1)}\bar{p}_1 q_1 j_n(\xi_1) - y_{mn}^{(1)}\bar{p}_2 q_2 j_n(\xi_2); \tag{12}$$

$$x_{mn}^{(2)}g_n^{(1)}(\xi_0) + a_{mn}g_n(\xi_0) = x_{mn}^{(1)}\bar{p}_1 g_n(\xi_1) + y_{mn}^{(1)}\bar{p}_2 g_n(\xi_2), \tag{13}$$

$$y_{mn}^{(2)}g_n^{(1)}(\xi_0) + b_{mn}g_n(\xi_0) = x_{mn}^{(1)}g_n(\xi_1) + y_{mn}^{(1)}g_n(\xi_2), \tag{14}$$

где $\bar{p}_j = p_j / h_0$, $\xi_s = k_s R, \quad s = 0, 1, 2.$

Из уравнения (11) с помощью (13) исключим $x_{mn}^{(2)}$, а из уравнения (12) – $y_{mn}^{(2)}$. Используя формулу $h_n^{(1)}(\xi_0)g_n(\xi_0) - j_n(\xi_0)g_n^{(1)}(\xi_0) = \dfrac{1}{i\xi_0^2}$, получим систему

$$x_{mn}^{(1)}\left(\bar{p}_1 g_n(\xi_1)h_n^{(1)}(\xi_0) + q_1 j_n(\xi_1)g_n^{(1)}(\xi_0)\right) + y_{mn}^{(1)}\left(\bar{p}_2 g_n(\xi_2)h_n^{(1)}(\xi_0) + q_2 j_n(\xi_2)g_n^{(1)}(\xi_0)\right) = \frac{a_{mn}}{i\xi_0^2}; \tag{15}$$

$$x_{mn}^{(1)}\left(g_n(\xi_1)h_n^{(1)}(\xi_0) + \bar{p}_1 q_1 j_n(\xi_1)g_n^{(1)}(\xi_0)\right) + y_{mn}^{(1)}\left(g_n(\xi_2)h_n^{(1)}(\xi_0) + \bar{p}_2 q_2 j_n(\xi_2)g_n^{(1)}(\xi_0)\right) = \frac{b_{mn}}{i\xi_0^2}.$$

Полагая $n = 1$, запишем систему уравнений (11), (12), (15) в матричном виде:

$$\vec{X}_m^{(2)} = -\left(j_1(\xi_0)\hat{E}\vec{a}_m + \hat{Q}\vec{X}_m^{(1)} \right) \Big/ h_1^{(1)}(\xi_0); \tag{16}$$

$$i\xi_0^2 \hat{P}\vec{X}_m^{(1)} = \vec{a}_m, \tag{17}$$

где $\vec{X}_m^{(j)} = \begin{pmatrix} x_{m1}^{(j)} \\ y_{m1}^{(j)} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ b_{m1} \end{pmatrix}$, $\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, $\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$,

$$q_{11} = q_1 j_1(\xi_1), \quad q_{12} = q_2 j_1(\xi_2), \quad q_{21} = \overline{p}_1 q_1 j_1(\xi_1), \quad q_{22} = \overline{p}_2 q_2 j_1(\xi_2),$$

$$p_{11} = \overline{p}_1 g_1(\xi_1) h_1^{(1)}(\xi_0) + q_1 j_1(\xi_1) g_1^{(1)}(\xi_0), \;\; p_{12} = \overline{p}_2 g_1(\xi_2) h_1^{(1)}(\xi_0) + q_2 j_1(\xi_2) g_1^{(1)}(\xi_0), \tag{18}$$

$$p_{21} = g_1(\xi_1) h_1^{(1)}(\xi_0) + \overline{p}_1 q_1 j_1(\xi_1) g_1^{(1)}(\xi_0), \;\; p_{22} = g_1(\xi_2) h_1^{(1)}(\xi_0) + \overline{p}_2 q_2 j_1(\xi_2) g_1^{(1)}(\xi_0);$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \;\; h_1^{(1)}(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{i}{x^2} \right) e^{ix},$$

$$g_1(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{x} + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sin x \right), \;\; g_1^{(1)}(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{i}{x^2} + \frac{1}{x} - i \right) e^{ix}.$$

Подставив (17) в (16), получим соотношения

$$\vec{X}_m^{(2)} = -\hat{K}\vec{X}_m^{(1)}, \; \hat{K} = \left(i\xi_0^2 j_1(\xi_0)\hat{P} + \hat{Q} \right) \Big/ h_1^{(1)}(\xi_0), \; m = 0, \pm 1, \tag{19}$$

которые будут использоваться в дальнейшем.

3. Вычисление специальных интегралов

Вычислим вспомогательные интегралы вида

$$\vec{J}_{mn}^{\Upsilon} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Upsilon_n^m(\theta,\varphi)\vec{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi, \quad \vec{J}_{mn}^{\Pi} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{\Pi}_{mn}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$\vec{J}_{mn}^{\mathrm{T}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{\mathrm{T}}_{mn}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n.$$

Лемма 2. Имеют место формулы

$$\vec{J}_{mn}^{\mathrm{T}} = 0 \text{ при } n = 1, 2, \ldots; \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n;$$

$$\vec{J}_{mn}^{\Upsilon,\Pi} = 0 \text{ при } n \ge 2; \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n; \tag{20}$$

$$\vec{J}_{01}^{\Upsilon} = \frac{4\pi}{3}\vec{e}_z, \; \vec{J}_{01}^{\Pi} = \frac{8\pi}{3}\vec{e}_z, \; \vec{J}_{11}^{\Upsilon} = -\frac{4\pi}{3}\vec{e}_+, \; \vec{J}_{11}^{\Pi} = -\frac{8\pi}{3}\vec{e}_+, \; \vec{J}_{-11}^{\Upsilon} = -\frac{2\pi}{3}\vec{e}_-, \; \vec{J}_{-11}^{\Pi} = -\frac{4\pi}{3}\vec{e}_-.$$

Доказательство. Для примера вычислим интеграл, используя формулу [15, с. 283]:

$$\vec{J}^{\Upsilon}_{01}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\,\sin\theta\,\vec{e}_r\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\cos\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y+\cos\theta\,\vec{e}_z\right)d\varphi\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,\vec{e}_z=\frac{4\pi}{3}\vec{e}_z.$$

Аналогично вычисляются остальные интегралы (20).

Лемма 3. Для объемных интегралов

$$\tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\Pi}_{mn}=\int\limits_{D_{RP}}\tilde{\tilde{\vec{n}}}_{mn}(\vec{r},k_0)dV=\int_R^P\left(f_n^{(1)}(k_0r)\vec{J}^{\Upsilon}_{mn}+g_n^{(1)}(k_0r)\vec{J}^{\Pi}_{mn}\right)r^2dr,$$

$$\tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\mathrm{T}}_{mn}=\int\limits_{D_{RP}}\tilde{\tilde{\vec{m}}}_{mn}(\vec{r},k_0)dV=\int_R^P h_n^{(1)}(k_0r)\vec{J}^{\mathrm{T}}_{mn}r^2dr$$

имеют место формулы

$$\begin{gathered}\tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\mathrm{T}}_{mn}=0\ \text{при}\ n=1,2,\ldots;\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm n;\\ \tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\Pi}_{mn}=0\ \text{при}\ n\ge2;\ m=0,\pm1,\ldots\pm n;\\ \tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\Pi}_{01}=-2\bar{f}_0\vec{e}_z,\quad \tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\Pi}_{11}=2\bar{f}_0\vec{e}_+,\quad \tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\Pi}_{-11}=\bar{f}_0\vec{e}_-,\end{gathered}\tag{21}$$

где в асимптотическом приближении $\bar{f}_0=\dfrac{4\pi i}{3k_0^3}+\dfrac{V_R}{\xi_0}h_1^{(1)}(\xi_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства используются формулы (20). Вычислим для примера интеграл

$$\tilde{\tilde{\vec{I}}}{}^{\Pi}_{01}=\frac{4\pi}{3}\int_R^P\left(f_1^{(1)}(k_0r)+2g_1^{(1)}(k_0r)\right)r^2dr\,\vec{e}_z=-2\bar{f}_0\vec{e}_z,$$

где $$\bar{f}_0=-\frac{2\pi}{3}\int_R^P\left(f_1^{(1)}+2g_1^{(1)}\right)r^2dr=-\frac{4\pi}{3k_0}\int_R^P\left(h_1^{(1)}(k_0r)+\frac{\partial}{\partial r}\left(rh_1^{(1)}(k_0r)\right)\right)r\,dr=$$

$$=\frac{4\pi}{3k_0}\left(R^2h_1^{(1)}(k_0R)-P^2h_1^{(1)}(k_0P)\right).$$

Преобразуем величину $\bar{f}_0$ с учетом допущения (1) $\dfrac{1}{k_0P}<<\dfrac{1}{k_0^2P^2}$. Тогда для сферической функции Ханкеля получим асимптотическую формулу $h_1^{(1)}(k_0P)\approx-\dfrac{i}{k_0^2P^2}$. В результате $\bar{f}_0=\dfrac{4\pi i}{3k_0^3}+\dfrac{V_R}{k_0R}h_1^{(1)}(k_0R)$.

Лемма 4. Для объемных интегралов

$$\vec{I}^{\,\Pi}_{mn}\left(k_j\right)=\int\limits_{D_R}\vec{n}_{mn}\left(\vec{r},k_j\right)dV=\int\limits_0^R\left(f_n(k,r)\vec{J}^{\,\Upsilon}_{mn}+g_n(k,r)\vec{J}^{\,\Pi}_{mn}\right)r^2dr,$$

$$\vec{I}^{\,\mathrm{T}}_{mn}\left(k_j\right)=\int\limits_{D_R}\vec{m}_{mn}\left(\vec{r},k_j\right)dV=\int\limits_0^R j_n\left(k_jr\right)\vec{J}^{\,\mathrm{T}}_{mn}r^2dr$$

имеют место формулы

$$\begin{gathered}\vec{I}^{\,\mathrm{T}}_{mn}\left(k_j\right)=0 \text{ при } n=1,2,\ldots;\ m=0,\pm1,\ldots\pm n;\\ \vec{I}^{\,\Pi}_{mn}\left(k_j\right)=0 \text{ при } n\geq 2;\ m=0,\pm1,\ldots\pm n;\\ \vec{I}^{\,\Pi}_{01}\left(k_j\right)=-2\bar{f}_j\vec{e}_z,\ \vec{I}^{\,\Pi}_{11}\left(k_j\right)=2\bar{f}_j\vec{e}_+,\ \vec{I}^{\,\Pi}_{-11}\left(k_j\right)=\bar{f}_j\vec{e}_-,\end{gathered} \tag{22}$$

где $\bar{f}_j=-\dfrac{V_R}{k_jR}j_1\left(k_jR\right).$

Доказательство. Для доказательства используются формулы (20). Вычислим для примера интеграл

$$\vec{I}^{\,\Pi}_{01}=\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^R\left(f_1\left(k_jr\right)+2g_1\left(k_jr\right)\right)r^2dr\,\vec{e}_z=-2\bar{f}_j\vec{e}_z,$$

где $\bar{f}_j=-\dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int\limits_0^R\left(f_1+2g_1\right)r^2dr=-\frac{4\pi}{3k_j}\int\limits_0^R\left(j_1\left(k_jr\right)+\frac{d}{dr}\left(rj_1\left(k_jr\right)\right)\right)r\,dr=-\frac{4\pi}{3k_j}R^2j_1\left(k_jR\right).$

4. Усредненные электрические и магнитные поля в композите

В результате взаимодействия поля $\vec{E}_0,\vec{H}_0$ с частицами D_S композита в пространстве образуются отраженные поля $\vec{E}'_S,\vec{H}'_S$ и поля $\vec{E}_S,\vec{H}_S$, проникшие внутрь частиц D_S. Вычислим суммарные поля в области D_P:

$$\vec{E}_{\text{сум}}=\begin{cases}\vec{E}_0+\sum\limits_{S=1}^N\vec{E}'_S & \text{в } D_0,\\ \vec{E}_S & \text{в } D_S;\end{cases}\quad \vec{H}_{\text{сум}}=\begin{cases}\vec{H}_0+\sum\limits_{S=1}^N\vec{H}'_S & \text{в } D_0,\\ \vec{H}_S & \text{в } D_S.\end{cases} \tag{23}$$

Усредним поля (23) по объему D_P:

$$\begin{gathered}\vec{E}=\frac{1}{V_P}\int\limits_{D_P}\vec{E}_{\text{сум}}dV=\frac{1}{V_P}\left[\int\limits_{D_P}\vec{E}_0dV+\sum_{S=1}^N\left(\int\limits_{D_0}\vec{E}'_SdV+\int\limits_{D_S}\vec{E}_SdV-\int\limits_{D_S}\vec{E}_0dV\right)\right],\\ \vec{H}=\frac{1}{V_P}\int\limits_{D_P}\vec{H}_{\text{сум}}dV=\frac{1}{V_P}\left[\int\limits_{D_P}\vec{H}_0dV+\sum_{S=1}^N\left(\int\limits_{D_0}\vec{H}'_SdV+\int\limits_{D_S}\vec{H}_SdV-\int\limits_{D_S}\vec{H}_0dV\right)\right].\end{gathered} \tag{24}$$

Так как частицы находятся в одинаковых электродинамических условиях и выполнено условие (1), будем предполагать

$$\int_{D_S} \vec{E}_0 dV = \int_{D_R} \vec{E}_0 dV = V_R \vec{E}_0^0, \quad \int_{D_S} \vec{E}_S dV = \int_{D_R} \vec{E}_R dV;$$

$$\int_{D_S} \vec{H}_0 dV = \int_{D_R} \vec{H}_0 dV = V_R \vec{H}_0^0, \quad \int_{D_S} \vec{H}_S dV = \int_{D_R} \vec{H}_R dV,$$

пренебрегая малыми величинами $(k_0 P)^l$, $l \geq 2$ ($k_0 P < 0{,}025$).

Поскольку частицы расположены на достаточно больших расстояниях друг от друга по сравнению с радиусами самих частиц, будем предполагать, что отраженные поля $\vec{E}'_S, \vec{H}'_S$ взаимодействуют с окружающими частицами, но повторными отраженными от частиц полями будем пренебрегать. В рамках такого приближения получим

$$\int_{D_0} \vec{E}'_S dV = \int_{D_0} \vec{E}'_R dV = \int_{D_{RP}} \vec{E}'_R dV - \sum_{s=2}^{N} \int_{D_S} \vec{E}'_R dV = \int_{D_{RP}} \vec{E}'_R dV - V_R \sum_{S=2}^{N} \vec{E}'_R(\vec{r}_S);$$

$$\int_{D_0} \vec{H}'_S dV = \int_{D_{RP}} \vec{H}'_R dV - V_R \sum_{S=2}^{N} \vec{H}'_R(\vec{r}_S),$$

где $\vec{r}_S$ – координаты центра частицы D_S. Суммы, рассматривая их как интегральные, заменим на интегралы

$$\sum_{S=2}^{N} \vec{E}'_R(\vec{r}_S) = \nu \int_{D_{RP}} \vec{E}'_R(\vec{r}) dV, \quad \sum_{S=2}^{N} \vec{H}'_R(\vec{r}_S) = \nu \int_{D_{RP}} \vec{H}'_R(\vec{r}) dV.$$

Поля (24) примут вид

$$\vec{E} = \tau \vec{E}_0^0 + \nu \left(\bar{\tau} \int_{D_{RP}} \vec{E}'_R dV + \int_{D_R} \vec{E}_R dV \right),$$

$$\vec{H} = \tau \vec{H}_0^0 + \nu \left(\bar{\tau} \int_{D_{RP}} \vec{H}'_R dV + \int_{D_R} \vec{H}_R dV \right), \quad \bar{\tau} = 1 - \tau, \tag{25}$$

где $\vec{E}_R = \vec{E}_R^0 + \vec{E}_R^{(1)}$, $\vec{H}_R = \vec{H}_R^0 + \vec{H}_R^{(1)}$; $\vec{E}_R^0$, $\vec{H}_R^0$ – поле (10), возбужденное внутри частицы D_R первичным полем (7); $\vec{E}_R^{(1)}$, $\vec{H}_R^{(1)}$ – поле, возбужденное внутри частицы D_R суммой $\vec{E}''_R(\vec{r}) = \sum_{S=2}^{N} \vec{E}'_S(\vec{r})$, $\vec{H}''_R(\vec{r}) = \sum_{S=2}^{N} \vec{H}'_S(\vec{r})$ отраженных от соседних частиц полей.

Учитывая соотношения (9), (21), вычислим интегралы, входящие в формулы (25):

$$\int_{D_{RP}} \vec{E}'_R dV = \sum_{m=-1}^{1} y_{m1}^{(2)} \int_{D_{RP}} \tilde{\vec{n}}_{m1}(\vec{r}, k_0) dV = \bar{f}_0 \left(2 y_{11}^{(2)} \vec{e}_+ + y_{-11}^{(2)} \vec{e}_- - 2 y_{01}^{(2)} \vec{e}_z \right);$$

$$\int_{D_{RP}} \vec{H}'_R dV = \sum_{m=-1}^{1} x_{m1}^{(2)} \int_{D_{RP}} \tilde{\vec{n}}_{m1}(\vec{r}, k_0) dV = h_0 \bar{f}_0 \left(2 x_{11}^{(2)} \vec{e}_+ + x_{-11}^{(2)} \vec{e}_- - 2 x_{01}^{(2)} \vec{e}_z \right). \tag{26}$$

Для вычисления интегралов $\int_{D_{RP}} \vec{E}_R dV$, $\int_{D_{RP}} \vec{H}_R dV$ определим поле $\vec{E}_R^{(1)}, \vec{H}_R^{(1)}$, представив его в виде (7). Для использования леммы 1 вычислим значение поля $\vec{E}''_R, \vec{H}''_R$ в начале координат:

$$\vec{E}''_R(0)=\sum_{S=2}^{N}\vec{E}'_S(0)=\sum_{S=2}^{N}\vec{E}'_R(\vec{r}_S)\approx v\int_{D_{RP}}\vec{E}'_R(\vec{r})dV=v\bar{f}_0\left(2y_{11}^{(2)}\vec{e}_+ + y_{-11}^{(2)}\vec{e}_- - 2y_{01}^{(2)}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{H}''_R(0)=vh_0\bar{f}_0\left(2x_{11}^{(2)}\vec{e}_+ + x_{-11}^{(2)}\vec{e}_- - 2x_{01}^{(2)}\vec{e}_z\right).$$

В результате с учетом (8) получим представление поля в окрестности частицы D_1:

$$\vec{E}''_R(\vec{r})=\sum_{m=-1}^{1}\left(a_{m1}^{(1)}\vec{m}_{m1}(\vec{r})+b_{m1}^{(1)}\vec{n}_{m1}(\vec{r})\right)+\dots ,$$

$$\vec{H}''_R(\vec{r})=h_0\sum_{m=-1}^{1}\left(a_{m1}^{(1)}\vec{n}_{m1}(\vec{r})+b_{m1}^{(1)}\vec{m}_{m1}(\vec{r})\right)+\dots ,$$

где $a_{m1}^{(1)}=-3\nu\bar{f}_0x_{m1}^{(2)},\quad b_{m1}^{(1)}=-3\nu\bar{f}_0y_{m1}^{(2)}.$

Это поле возбуждает внутри частицы D_R поле вида (10):

$$\vec{E}_R^{(1)}(\vec{r})=\sum_{m=-1}^{1}\left(x_{m1}^{(3)}\vec{K}_{m1}^{(1)}(\vec{r},k_1)+y_{m1}^{(3)}\vec{K}_{m1}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right)+\dots ,$$

$$\vec{H}_R^{(1)}(\vec{r})=\sum_{m=-1}^{1}\left(x_{m1}^{(3)}p_1\vec{K}_{m1}^{(1)}(\vec{r},k_1)+y_{m1}^{(3)}p_2\vec{K}_{m1}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right)+\dots ,$$

где в соответствии с формулами (17), (19) получаем

$$\vec{X}_m^{(3)}=\frac{1}{i\xi_0^2}\hat{P}^{-1}\vec{a}_m^{(1)}=-\frac{3\nu\hat{\bar{f}}_0}{i\xi_0^2}\hat{P}^{-1}\vec{X}_m^{(2)}=\frac{3\nu\bar{f}_0}{i\xi_0^2}\hat{P}^{-1}\hat{K}\vec{X}_m^{(1)}.$$

Суммарное поле внутри частицы D_R примет вид

$$\vec{E}_R(\vec{r})=\sum_{m=-1}^{1}\left(x_{m1}^{(4)}\vec{K}_{m1}^{(1)}(\vec{r},k_1)+y_{m1}^{(4)}K_{m1}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right)+\dots ,$$

$$\vec{H}_R(\vec{r})=\sum_{m=-1}^{1}\left(x_{m1}^{(4)}p_1\vec{K}_{m1}^{(1)}(\vec{r},k_1)+y_{m1}^{(4)}p_2K_{m1}^{(2)}(\vec{r},k_2)\right)+\dots ,$$

где $\vec{X}_m^{(4)}=\vec{X}_m^{(1)}+\vec{X}_m^{(3)}=\hat{K}_1\vec{X}_m^{(1)},\quad \hat{K}_1=\hat{E}+\dfrac{3\nu\bar{f}_0}{i\xi_0^2}\hat{P}^{-1}\hat{K}$.

Учитывая (22), получим

$$\int_{D_R}K_{mn}^{(j)}dV=\int_{D_R}\vec{n}_{mn}(\vec{r},k_j)dV ,$$

$$\int_{D_R}\vec{E}_RdV=\sum_{m=-1}^{1}\left(x_{m1}^{(4)}\int_{D_R}\vec{n}_{m1}(\vec{r},k_1)dV+y_{m1}^{(4)}\int_{D_R}\vec{n}_{m1}(\vec{r},k_2)dV\right)=2\left(\bar{f}_1x_{11}^{(4)}+\bar{f}_2y_{11}^{(4)}\right)\vec{e}_+ +$$
$$+\left(\bar{f}_1x_{-11}^{(4)}+\bar{f}_2y_{-11}^{(4)}\right)\vec{e}_- -2\left(\bar{f}_1x_{01}^{(4)}+\bar{f}_2y_{01}^{(4)}\right)\vec{e}_z , \tag{27}$$

$$\int\limits_{D_R}\vec{H}_R dV=\sum_{m=-1}^{1}\left(x_{m1}^{(4)}p_1\int\limits_{D_R}\vec{n}_{m1}\left(\vec{r},k_1\right)dV+y_{m1}^{(4)}p_2\int\limits_{D_R}\vec{n}_{m1}\left(\vec{r},k_2\right)dV\right)=2\left(\bar{f}_1p_1x_{11}^{(4)}+\bar{f}_2p_2y_{11}^{(4)}\right)\vec{e}_++$$

$$+\left(\bar{f}_1\,p_1\,x_{-11}^{(4)}+\bar{f}_2\,p_2\,y_{-11}^{(4)}\right)\vec{e}_--2\left(\bar{f}_1\,p_1\,x_{01}^{(4)}+\bar{f}_2\,p_2\,y_{01}^{(4)}\right)\vec{e}_z\,.$$

Теорема 1. *Усредненные по области D_P в композитном материале со сферическими биизотропными частицами радиуса R электрическое и магнитное поля в базисе $\vec{e}_+,\vec{e}_-,\vec{e}_z$ при выполнении условия (1) определяются формулами*

$$\begin{gathered}
\vec{E}=-E_-\vec{e}_+-E_+\vec{e}_-+E_z\vec{e}_z=E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z=\\
=\left(-\frac{2\bar{\tau}}{3}b_{11}+2\nu\left(\bar{\tau}\,\bar{f}_0y_{11}^{(2)}+\bar{f}_1x_{11}^{(4)}+\bar{f}_2y_{11}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_++\\
+\left(-\frac{\bar{\tau}}{3}b_{-11}+\nu\left(\bar{\tau}\,\bar{f}_0y_{-11}^{(2)}+\bar{f}_1x_{-11}^{(4)}+\bar{f}_2y_{-11}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_-+\\
+\left(\frac{2\bar{\tau}}{3}b_{01}-2\nu\left(\bar{\tau}\,\bar{f}_0y_{01}^{(2)}+\bar{f}_1x_{01}^{(4)}+\bar{f}_2y_{01}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_z\,,\\
\vec{H}=-H_-\vec{e}_+-H_+\vec{e}_-+H_z\vec{e}_z=H_x\vec{e}_x+H_y\vec{e}_y+H_z\vec{e}_z=\\
=\left(-\frac{2}{3}h_0\bar{\tau}\,a_{11}+2\nu\left(\bar{\tau}\,h_0\,\bar{f}_0x_{11}^{(2)}+\bar{f}_1\,p_1x_{11}^{(4)}+\bar{f}_2p_2y_{11}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_++\\
+\left(-\frac{1}{3}h_0\bar{\tau}\,a_{-11}+\nu\left(\bar{\tau}\,h_0\,\bar{f}_0x_{-11}^{(2)}+\bar{f}_1\,p_1\,x_{-11}^{(4)}+\bar{f}_2\,p_2\,y_{-11}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_-+\\
+\left(\frac{2}{3}h_0\bar{\tau}\,a_{01}-2\nu\left(\bar{\tau}\,h_0\,\bar{f}_0\,x_{01}^{(2)}+\bar{f}_1\,p_1\,x_{01}^{(4)}+\bar{f}_2\,p_2\,y_{01}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_z\,,
\end{gathered}\tag{28}$$

где $E_+=\dfrac{1}{2}\left(iE_y+E_x\right),\ E_-=\dfrac{1}{2}\left(iE_y-E_x\right)$.

Для доказательства достаточно подставить выражения (8), (26), (27) в формулы (25).

Следствие 1. *Имеют место матричные соотношения для компонент полей (28)*

$$\vec{V}_+=\frac{1}{2}\hat{L}\vec{X}_{-1}^{(1)},\ \ \vec{V}_-=\hat{L}\vec{X}_1^{(1)},\ \ \vec{V}_z=\hat{L}\vec{X}_0^{(1)},\tag{29}$$

где

$$\hat{L}=i\frac{2}{3}\xi_0^2\bar{\tau}\hat{H}\hat{P}+2\nu\left(\bar{\tau}\,\bar{f}_0\hat{H}\hat{K}-\hat{F}\hat{K}_1\right),\tag{30}$$

$$\vec{V}_+=\begin{pmatrix}E_+\\H_+\end{pmatrix},\ \vec{V}_-=\begin{pmatrix}E_-\\H_-\end{pmatrix},\ \vec{V}_z=\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix},\ \hat{H}=\begin{pmatrix}0&1\\h_0&0\end{pmatrix},\ \hat{F}=\begin{pmatrix}\bar{f}_1; & \bar{f}_2\\ p_1\bar{f}_1; & p_2\bar{f}_2\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Приравняв *z*-е компоненты полей (28), получим равенства

$$E_z=\frac{2}{3}\bar{\tau}b_{01}-2\nu\left(\bar{\tau}\bar{f}_0y_{01}^{(2)}+\bar{f}_1x_{01}^{(4)}+\bar{f}_2y_{01}^{(4)}\right),$$

$$H_z = \frac{2}{3} h_0 \bar{\tau}\, a_{01} - 2\nu \left(\bar{\tau} h_0 \bar{f}_0 x_{01}^{(2)} + \bar{f}_1 p_1 x_{01}^{(4)} + \bar{f}_2 p_2 y_{01}^{(4)} \right).$$

Запишем их в матричном виде

$$\vec{V}_z = \frac{2\bar{\tau}}{3} \hat{H} \vec{a}_0 - 2\nu \left(\bar{\tau} \bar{f}_0 \hat{H} \vec{X}_0^{(2)} + \hat{F} \vec{X}_0^{(4)} \right).$$

Используя равенства (17), (19) при $m = 0$, получим третью формулу (29). Аналогично получим остальные формулы (29).

5. Усредненные электрическая и магнитная индукции

Запишем суммарные индукции в области D_P:

$$\vec{D}_{\text{сум}} = \begin{cases} \varepsilon_0 \left(\vec{E}_0 + \sum\limits_{S=1}^{N} \vec{E}'_S \right) & \text{в } D_0, \\ \varepsilon \vec{E}_S + G \vec{H}_S & \text{в } D_S; \end{cases} \quad \vec{B}_{\text{сум}} = \begin{cases} \mu_0 \left(\vec{H}_0 + \sum\limits_{S=1}^{N} \vec{H}'_S \right) & \text{в } D_0, \\ \mu \vec{H}_S + Z \vec{E}_S & \text{в } D_S. \end{cases} \tag{31}$$

Усредненные индукции определяются формулами

$$\vec{D} = \frac{1}{V_P} \int\limits_{D_P} \vec{D}_{\text{сум}} \mathrm{d}V; \quad \vec{B} = \frac{1}{V_P} \int\limits_{D_P} \vec{B}_{\text{сум}} \mathrm{d}V.$$

По аналогии с формулами (25) получим

$$\begin{gathered} \vec{D} = \varepsilon_0 \bar{\tau} \vec{E}_0^0 + \nu \left(\varepsilon_0 \bar{\tau} \int\limits_{D_{RP}} \vec{E}'_R \,\mathrm{d}V + \int\limits_{D_R} \left(\varepsilon \vec{E}_R + G \vec{H}_R \right) \mathrm{d}V \right); \\ \vec{B} = \mu_0 \bar{\tau} \vec{H}_0^0 + \nu \left(\mu_0 \bar{\tau} \int\limits_{D_{RP}} \vec{H}'_R \,\mathrm{d}V + \int\limits_{D_R} \left(\mu \vec{H}_R + Z \vec{E}_R \right) \mathrm{d}V \right). \end{gathered} \tag{32}$$

Теорема 2. *Усредненные по области* D_P *в композитном материале с биизотропными частицами электрическая и магнитная индукции в базисе* $\vec{e}_+, \vec{e}_-, \vec{e}_z$ *определяются выражениями*

$$\begin{gathered} \vec{D} = -D_- \vec{e}_+ - D_+ \vec{e}_- + D_z \vec{e}_z = D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y + D_z \vec{e}_z = \\ = \left(-\frac{2}{3} \varepsilon_0 \bar{\tau}\, b_{11} + 2\nu \left(\varepsilon_0 \bar{\tau} \bar{f}_0 y_{11}^{(2)} + f_1^{(1)} x_{11}^{(4)} + f_2^{(1)} y_{11}^{(4)} \right) \right) \vec{e}_+ + \\ + \left(-\frac{1}{3} \varepsilon_0 \bar{\tau}\, b_{-11} + \nu \left(\varepsilon_0 \bar{\tau} \bar{f}_0 y_{-11}^{(2)} + f_1^{(1)} x_{-11}^{(4)} + f_2^{(1)} y_{-11}^{(4)} \right) \right) \vec{e}_- + \\ + \left(\frac{2}{3} \varepsilon_0 \bar{\tau}\, b_{01} - 2\nu \left(\varepsilon_0 \bar{\tau} \bar{f}_0 y_{01}^{(2)} + f_1^{(1)} x_{01}^{(4)} + f_2^{(1)} y_{01}^{(4)} \right) \right) \vec{e}_z; \\ \vec{B} = -B_- \vec{e}_+ - B_+ \vec{e}_- + B_z \vec{e}_z = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z = \\ = \left(-\frac{2}{3} \mu_0 h_0 \bar{\tau}\, a_{11} + 2\nu \left(\mu_0 \bar{\tau} h_0 \bar{f}_0 x_{11}^{(2)} + f_1^{(2)} x_{11}^{(4)} + f_2^{(2)} y_{11}^{(4)} \right) \right) \vec{e}_+ + \end{gathered} \tag{33}$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\mu_0\,h_0\bar{\tau}\,a_{-11}+\nu\left(\mu_0\,\tau\,h_0\,\bar{f}_0x_{-11}^{(2)}+f_1^{(2)}x_{-11}^{(4)}+f_2^{(2)}y_{-11}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_-+$$

$$+\left(\frac{2}{3}\mu_0\,h_0\bar{\tau}\,a_{01}-2\nu\left(\mu_0\,\tau\,h_0\,\bar{f}_0x_{01}^{(2)}+f_1^{(2)}x_{01}^{(4)}+f_2^{(2)}y_{01}^{(4)}\right)\right)\vec{e}_z,$$

где $D_+=\frac{1}{2}\left(iD_y+D_x\right),\ D_-=\frac{1}{2}\left(iD_y-D_x\right),\ B_+=\frac{1}{2}\left(iB_y+B_x\right),\ B_-=\frac{1}{2}\left(iB_y-B_x\right),$

$$f_1^{(1)}=\bar{f}_1\left(\varepsilon+Gp_1\right),\ f_2^{(1)}=\bar{f}_2\left(\varepsilon+Gp_2\right),\ f_1^{(2)}=\bar{f}_1\left(Z+\mu p_1\right),\ f_2^{(2)}=\bar{f}_2\left(Z+\mu p_2\right).$$

Для доказательства достаточно подставить выражения (8), (26), (27) в формулы (32).

Следствие 2. *Имеют место матричные соотношения для компонент индукций (33)*

$$\vec{W}_+=\frac{1}{2}\hat{N}\vec{X}_{-1}^{(1)},\ \vec{W}_-=\hat{N}\vec{X}_1^{(1)},\ \vec{W}_z=\hat{N}\vec{X}_0^{(1)}, \tag{34}$$

где $\hat{N}=i\frac{2}{3}\bar{\tau}\xi_0^2\hat{H}_1\hat{P}+2\nu\left(\bar{\tau}\bar{f}_0\hat{H}_1\hat{K}-\hat{F}_1\hat{K}_1\right),$ (35)

$$\vec{W}_+=\begin{pmatrix}D_+\\B_+\end{pmatrix},\ \vec{W}_-=\begin{pmatrix}D_-\\B_-\end{pmatrix},\ \vec{W}_z=\begin{pmatrix}D_z\\B_z\end{pmatrix},\ \hat{H}_1=\begin{pmatrix}0; & \varepsilon_0\\ \mu_0h_0; & 0\end{pmatrix},\ \hat{F}_1=\begin{pmatrix}f_1^{(1)}, & f_2^{(1)}\\ f_1^{(2)}, & f_2^{(2)}\end{pmatrix}.$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством следствия 1.

6. Вычисление эффективных материальных параметров композита

Выразим векторы электрической и магнитной индукции (33) через векторы электрической и магнитной напряженностей поля. Воспользовавшись формулами (29), получим

$$\vec{X}_{-1}^{(1)}=2\hat{L}^{-1}\vec{V}_+,\ \vec{X}_1^{(1)}=\hat{L}^{-1}\vec{V}_-,\ \vec{X}_0^{(1)}=\hat{L}^{-1}\vec{V}_z.$$

Подставим полученные выражения в (34), тогда

$$\vec{W}_+=\hat{C}\vec{V}_+,\ \vec{W}_-=\hat{C}\vec{V}_-,\ \vec{W}_z=\hat{C}\vec{V}_z,\ \hat{C}=\hat{N}\hat{L}^{-1}, \tag{36}$$

где $\hat{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}.$

Запишем (36) в развернутом виде:

$$D_+=c_{11}E_++c_{12}H_+,\ D_-=c_{11}E_-+c_{12}H_-; \tag{37}$$

$$B_+=c_{21}E_++c_{22}H_+,\ B_-=c_{21}E_-+c_{22}H_-; \tag{38}$$

$$D_z=c_{11}E_z+c_{12}H_z,\ B_z=c_{21}E_z+c_{22}H_z. \tag{39}$$

Складывая и вычитая (37) (аналогично складывая и вычитая (38)), получим

$$\begin{aligned}&D_x=c_{11}E_x+c_{12}H_x,\quad D_y=c_{11}E_y+c_{12}H_y;\\ &B_x=c_{21}E_x+c_{22}H_x,\quad B_y=c_{21}E_x+c_{22}H_x.\end{aligned} \tag{40}$$

Равенства (39), (40) запишем в векторном виде:

$$\vec{D} = c_{11}\vec{E} + c_{12}\vec{H}, \ \vec{B} = c_{21}\vec{E} + c_{22}\vec{H} \ . \tag{41}$$

Теорема 3. *Композитный материал, состоящий из случайно распределенных биизотропных сферических частиц радиуса R и заполненный вакуумом в областях между частицами, является биизотропной средой. Эффективные параметры композита определяются формулами*

$$\varepsilon_{эф} = c_{11}, G_{эф} = c_{12}, \mu_{эф} = c_{22}, Z_{эф} = c_{21}, \tag{42}$$

где $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \hat{N}\hat{L}^{-1}$.

Для доказательства сравним индукции (41), построенные на основе разработанной методики моделирования, с индукциями уравнений (2). Получим формулы (42).

Заключение

Разработан алгоритм вычисления эффективных материальных параметров композита, состоящего из случайно распределенных в вакууме сферических биизотропных частиц с одинаковыми диаметрами. Эффективные параметры, зависящие от частоты поля, описывают однородную биизотропную среду, эквивалентную исходному дискретно неоднородному композиту. Параметры представлены в виде аналитических формул. При разработке модели рассмотрен случай, когда частицы находятся на достаточно больших расстояниях друг от друга и при этом их электродинамическое взаимодействие не учитывается. Для взаимодействия поля со структурными частицами композита использовалось точное решение задачи дифракции на биизотропном шаре. Разработанная модель позволяет рассчитывать композиты, состоящие из киральных частиц, частиц из материала Федорова – Борна и метаматериалов.

Работа выполнена по заданию ГПНИ «Информатика и космос».

Список литературы

1. Виноградов, А.П. Электродинамика композитных материалов / А.П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.

2. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин [и др.]. – М. : Акад. естествознания, 2006. – 296 с.

3. Лагарьков, А.Н. Радиопоглощающие материалы на основе метаматериалов / А.Н. Лагарьков, В.Н. Кисель, В.Н. Семененко // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 10. – С. 1119–1127.

4. Cui, Tie Jun. Metamaterials. Theory, Design and Applications /Tie Jun Cui, David R. Smith, Ruopeng Lui. – Springer, 2009. – 367 p.

5. Неганов, В.А. Современное состояние электродинамики искусственных киральных сред (обзор) / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – Т. 8, № 1 – С.7–33.

6. Федосюк, В.М. Наноструктурные пленки и нанопроволоки / В.М. Федосюк. – Минск : Изд. центр БГУ, 2006. – 310 с.

7. Памятных, Е.А. Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях / Е.А. Памятных, Е.А. Туров. – М. : Наука. Физматлит, 2000. – 240 с.

8. Исимару, А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. Т. 1. Однократное рассеяние / А. Исимару. – М. : Мир, 1981. – 280 с.

9. Guerin, F. Scattering of electromagnetic waves by helicees and application to the modeling of chiral composites / F.Guerin // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1995. – Vol. 28. – P. 623–642.

10. Демидчик, В.И. Математическое моделирование характеристик рассеяния проволочных частиц произвольной конфигурации и композитных материалов на их основе / В.И. Демидчик, Р.В. Корнеев, П.Д. Кухарчик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 38–41.

11. Демидчик, В.И. Анализ микроволновых свойств проволочных киральных рассеивателей методом интегральных уравнений / В.И. Демидчик, Р.В. Корнев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2004. – № 1. – С. 100–103.

12. Шатров, А.Д. Модель биизотропной среды из резонансных сферических частиц с идеальной смешанной проводимостью поверхности вдоль спиральных линий / А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 10. – С.1168–1170.

13. Костин, М.В. К теории киральной среды на основе сферических спирально проводящих частиц / М.В. Костин, В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43, № 8. – С. 921–926.

14. Виноградов, А.П. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов / А.П. Виноградов, А.В. Дорофеенко, С. Зухди // Успехи физических наук. – 2008. – Т. 178, № 5. – С. 514–518.

15. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.

16. Козлов, И.П. Дифракция электромагнитных волн на двух сферах / И.П. Козлов // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 1975. – Т. XVIII, № 7. – С. 997–1008.

Поступила 29.12.2013

НИИ прикладных проблем
математики и информатики БГУ,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by

V.T. Erofeenko

ELECTRODYNAMICAL MODEL FOR CALCULATING EFFECTIVE PARAMETERS OF COMPOSITES FROM SPHERICAL BI-ISOTROPIC PARTICLES

A method for calculation of the effective material parameters of chiral composites is developed. The composites consist of the disperse system of discrete reflectors filled with the material of arbitrary complex dielectric and magnetic penetrability and complex bi-isotropism. A strict analytical solution of the problem of diffraction on the bi-isotropic sphere of electromagnetic waves with wave length much greater than particles diameter is used in the formulas.