

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFORMATION TECHNOLOGIES

УДК 004.728.4  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2026-23-1-39-57>

Поступила в редакцию | Received 20.02.2026  
Подписана в печать | Accepted 13.03.2026  
Опубликована | Published 31.03.2026

## Алгоритмы многокритериальной маршрутизации в беспроводных mesh-сетях

А. К. Шульган<sup>✉</sup>, Ю. И. Воротницкий  
<sup>✉</sup>E-mail: [anton.shulgan@mail.ru](mailto:anton.shulgan@mail.ru)

*Белорусский государственный университет,  
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь*

### Аннотация

**Цели.** Современные беспроводные mesh-сети предъявляют высокие требования к адаптивности протоколов маршрутизации. Стандартные алгоритмы не всегда способны обеспечить требуемое качество обслуживания (QoS) из-за изменчивости таких параметров, как отношение сигнал/шум, загрузка канала и мобильность узлов.

**Методы.** Предлагается метод многокритериальной маршрутизации, использующий интегральный критерий качества обслуживания в модифицированном алгоритме Дейкстры.

**Результаты.** Исследованы результаты маршрутизации в схеме из восьми узлов и в схеме с четырьмя кластерами из пяти устройств. Предложен механизм снижения вероятности ложного отбрасывания маршрута в методе многокритериальной маршрутизации.

**Заключение.** Разработан итерационный алгоритм настройки весовых коэффициентов, который в сочетании с минимаксным критерием позволяет исключать ложные решения об отсутствии QoS-осуществимого маршрута и получать приемлемые решения для разных профилей трафика. Разработаны двухуровневый подход и алгоритм маршрутизации в кластеризованной сети, обеспечивающие снижение вычислительной сложности и локализацию перерасчета маршрутов при изменении состояния сети – качества радиоканалов или энергосостояния узлов.

**Ключевые слова:** mesh-сеть, алгоритм Дейкстры, многокритериальная маршрутизация, кластеры, качество обслуживания, интегральный критерий, энергоэффективность

**Для цитирования.** Шульган, А. К. Алгоритмы многокритериальной маршрутизации в беспроводных mesh-сетях / А. К. Шульган, Ю. И. Воротницкий // Информатика. – 2026. – Т. 23, № 1. – С. 39–57. – <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2026-23-1-39-57>.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

# Multicriteria routing algorithms in wireless mesh networks

Anton K. Shulgan<sup>✉</sup>, Yury I. Vorotnitsky

<sup>✉</sup>E-mail: anton.shulgan@mail.ru

*Belarusian State University,  
av. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220030, Belarus*

## Abstract

**Objectives.** Modern wireless mesh networks place high demands on the adaptability of routing protocols. Standard algorithms are not always able to ensure the required quality of service (QoS) due to variability in parameters such as signal-to-noise ratio, channel load, and node mobility.

**Methods.** A method for multi-criteria routing is proposed using an integral quality of service criterion in a modified Dijkstra's algorithm.

**Results.** Routing results in an eight-node network and in a network with four clusters of five devices are analyzed. A mechanism for reducing the probability of false route discards in the multi-criteria routing method is proposed.

**Conclusion.** An iterative algorithm for adjusting weighting coefficients has been developed. In combination with the minimax criterion, it allows to eliminate false positives regarding the absence of a QoS-feasible route and to obtain acceptable solutions for different traffic profiles. A two-level approach and routing algorithm in a clustered network have been developed, ensuring a reduction in computational complexity and localization of route recalculation when the network state changes – specifically the quality of radio channels or the energy state of nodes.

**Keywords:** mesh, Dijkstra's algorithm, multi-criteria routing, clusters, QoS, integral criterion, energy efficiency

**For citation.** Shulgan A. K., Vorotnitsky Yu. I. *Multicriteria routing algorithms in wireless mesh networks*. *Informatika [Informatics]*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 39–57 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2026-23-1-39-57>.

**Conflict of interests.** The authors declare of no conflict of interest.

## Введение

Беспроводные сенсорные сети, имеющие mesh-топологии, строятся как самоорганизующиеся сети, где узлы одновременно выступают источниками данных и маршрутизаторами. Такая архитектура повышает покрытие и отказоустойчивость, но усиливает требования к маршрутизации: каналы подвержены затуханию и интерференции, узлы обладают ограниченными запасами энергии, а приложения предъявляют требования к надежности и параметрам качества обслуживания. Вследствие этого маршрутизация в беспроводных сенсорных сетях рассматривается как задача компромисса между несколькими критериями. Отмечается, что распространены два способа формализации компромисса в многокритериальной задаче оптимизации: сведение метрик к единой функции стоимости (например, взвешенной сумме) и оптимизация при ограничениях, когда один критерий минимизируется при выполнении порогов по другим [1–3]. При этом отмечается (см., например [4, 5]), что скаляризация метрик и «взвешенные» маршруты – наиболее актуальный и практичный для ресурсно-ограниченных узлов подход.

В работах [6–10] рассматривалась задача поиска оптимального маршрута между узлами мультисервисной телекоммуникационной сети при наличии нескольких параметров QoS, в [9] указывались оптимальные решения оптимизационных задач. В качестве параметров QoS каждого канала связи используются: полоса пропускания  $Y$ , задержка  $D$ , вариация задержки (джиттер)  $J$  и вероятность потерь пакетов  $Z$ . Путь называется QoS-осуществимым, если для него выполняются ограничения на каждый параметр QoS:

$$Y \geq Y_{min}; Z \leq Z_{max}; D \leq D_{max}; J \leq J_{max}. \quad (1)$$

Для удобства расчета потерь используется преобразование  $X = -\ln(1 - Z)$ , позволяющее вычислять соответствующий показатель по пути как сумму по ребрам. Затем многокритериальная задача сводится к минимизации скалярного интегрального критерия качества  $R$ , получаемого сверткой нормированных параметров QoS с весовыми коэффициентами. Модификация алгоритма Дейкстры заключается в использовании расширенной метки вершины, содержащей значения параметров QoS по текущему пути и величину  $R$ , а также в отбрасывании путей, не удовлетворяющих ограничениям QoS. В настоящей работе данный подход, позволяющий объединять два названных выше способа формализации многокритериальной задачи, обобщается для критериев качества и архитектурных решений беспроводных mesh-сетей.

Предложенная модель в настоящей работе адаптируется к беспроводным mesh-сетям. В беспроводных сенсорных mesh-сетях маршрутизация должна учитывать не только классические QoS-параметры, но и энергетические ограничения узлов. В частности, для задач умного города и инфраструктурного мониторинга важно предотвращать деградацию связности сети из-за исчерпания энергии промежуточных ретрансляторов.

## 1. Интегральный критерий качества обслуживания в модифицированном алгоритме Дейкстры

Для беспроводной mesh-сети рассмотрим граф  $G(V, E)$ , где  $V$  – множество узлов,  $E$  – множество двунаправленных радиоканалов (ребер). Каждому ребру  $e_{ij}$  сопоставляется вектор параметров QoS:  $(Y_{ij}, D_{ij}, J_{ij}, Z_{ij}, T_{ij})$ . Для преобразования вероятностей потерь используется соотношение  $X_{ij} = -\ln(1 - Z_{ij})$ .

Пусть каждому узлу  $v$  соответствует запас энергии  $E_v$  (в Вт·ч). Для типа трафика  $k$  задается усредненная мощность  $P_k$  (Вт), характеризующая энергопотребление узла при участии в передаче, приеме и ретрансляции пакетов данного типа. Тогда оценка времени жизни узла для трафика  $k$  определяется как

$$T_{v,k} = E_v / P_k, \text{ ч.} \quad (2)$$

Время жизни маршрута  $p$  для трафика  $k$  предлагается оценивать как минимум по всем узлам, входящим в маршрут:

$$T_{p,k} = \min\{T_{v,k} : v \in p\}, \text{ ч.} \quad (3)$$

Такое определение соответствует «узкому месту» по энергии: маршрут считается устойчивым лишь до момента, когда первым исчерпает энергию какой-либо из его узлов. При расширении пути на новую вершину параметр  $T$  обновляется операцией минимума, что обеспечивает монотонность (неулучшаемость) критерия при добавлении ребер.

Для пути  $p = (s, \dots, t)$  значения показателей QoS вычисляются по правилам

$$Y_p = \min\{Y_e : e \in p\}; D_p = \Sigma D_e, J_p = \Sigma J_e, X_p = \Sigma X_e, e \in p;$$

$$Z_p = 1 - \exp(-X_p), T_{p,k} = \min\{T_{v,k} : v \in p\}. \quad (4)$$

Путь  $p$  считается QoS-осуществимым для трафика типа  $k$ , если выполняются ограничения

$$Y_p \geq Y_{min}, \quad (5)$$

$$D_p \leq D_{max}, \quad (6)$$

$$J_p \leq J_{max}, \quad (7)$$

$$X_p \leq X_{max}, \quad (8)$$

$$T_p \geq T_{min}. \quad (9)$$

Для выбора оптимального маршрута среди QoS-осуществимых может использоваться интегральный критерий (минимизируемая свертка нормированных показателей):

$$R_p = w_y \cdot \left(\frac{Y_{min}}{Y_p}\right) + w_D \cdot \left(\frac{D_p}{D_{max}}\right) + w_j \cdot \left(\frac{J_p}{J_{max}}\right) + w_X \cdot \left(\frac{X_p}{X_{max}}\right) + w_T \cdot \left(\frac{T_{min}}{T_p}\right). \quad (10)$$

Здесь  $w_y, w_D, w_j, w_X, w_T$  – весовые коэффициенты ( $w_y + w_D + w_j + w_X + w_T = 1$ ), задаваемые в соответствии с требованиями обслуживаемого приложения (класса трафика). Величины, которые необходимо максимизировать ( $Y_p$  и  $T_p$ ), включены в критерий в виде обратных отношений, что позволяет сохранять задачу минимизации.

Чтобы учесть важный для сенсорных сетей параметр – время жизни маршрута, в предлагаемом алгоритме для каждой вершины  $v$  в процессе поиска поддерживается расширенная метка  $L(v)$ , включающая  $L(v) = (R_v, Y_v, D_v, J_v, X_v, T_v, pred(v))$ . Значения  $Y_v, D_v, J_v, X_v, T_v$  описывают параметры QoS для текущего лучшего по значению  $R$  пути из источника  $s$  в вершину  $v$ , а  $pred(v)$  – номер предшествующей вершины на этом пути.

Правила обновления метки при релаксации (включении в маршрут) ребра  $(v, u)$  имеют вид

$$Y'_u = \min(Y_v, Y_{vu}); D'_u = D_v + D_{vu}; J'_u = J_v + J_{vu};$$

$$X'_u = X_v + X_{vu}; T'_u = \min(T_v, T_{u,k}). \quad (11)$$

Если хотя бы одно из ограничений QoS нарушается, то переход (релаксация) не выполняется (эквивалентно присвоению стоимости бесконечности). В противном случае вычисляется  $R_u'$  по формуле критерия и метка  $L(u)$  заменяется, если  $R_u'$  меньше текущего значения  $R_u$ . Поскольку  $D$ ,  $J$  и  $X$  накапливаются суммированием, а  $Y$  и  $T$  обновляются операцией минимума, значение  $R$  не может уменьшаться при добавлении ребер. Это обеспечивает применимость стратегии выбора следующей вершины с минимальным значением  $R$  в соответствии с алгоритмом Дейкстры. Таким образом, предлагаемый алгоритм может быть описан следующим образом:

*Вход:* граф  $G(V, E)$ , источник  $s$ , приемник  $t$ , профиль трафика  $k$  (ограничения и весовые коэффициенты), значения энергии  $E_v$ .

*Шаг 1.* Для всех  $v \in V$ :  $R(v) = \infty$ ;  $\text{pred}(v) = \emptyset$ .

*Шаг 2.* Инициализация:  $Y(s) = \infty$ ;  $D(s) = 0$ ;  $J(s) = 0$ ;  $X(s) = 0$ ;  $T(s) = \frac{E_s}{P_k}$ ;  $R(s) = w_T \frac{T_{min}}{T_s}$ .

*Шаг 3.*  $Q \leftarrow V$  (множество непосещенных вершин).

*Шаг 4.* Пока  $Q \neq \emptyset$ :

*Шаг 4.1.*  $v \leftarrow \text{argmin}_{\{u \in Q\}} R(u)$ , удалить  $v$  из  $Q$ .

*Шаг 4.2.* Если  $v = t$ , выход.

*Шаг 4.3.* Для каждого соседа  $u$  вершины  $v$ :

*Шаг 4.3.1.* Вычислить  $Y', D', J', X', T'$  по правилам релаксации.

*Шаг 4.3.2.* Если  $(Y', D', J', X', T')$  удовлетворяют ограничениям, положить

$$R' = w_Y \cdot \left( \frac{Y_{min}}{Y'} \right) + w_D \cdot \left( \frac{D'}{D_{max}} \right) + w_J \cdot \left( \frac{J'}{J_{max}} \right) + w_X \cdot \left( \frac{X'}{X_{max}} \right) + w_T \cdot \left( \frac{T_{min}}{T'} \right).$$

Если  $R' < R(u)$ , обновить метку  $u$ ,  $\text{pred}(u) = v$ .

*Выход:* путь  $p$  по  $\text{pred}(\cdot)$  и его показатели QoS.

Для анализа работы алгоритма рассмотрим mesh-сеть из восьми узлов с двунаправленными радиоканалами. Параметры каналов ( $Y, D, J, Z$ ) заданы как усредненные величины (табл. 1), характерные для беспроводной среды (помехи, многолучевость, повторные передачи). На рис. 1 обозначена топология примерной mesh-сети, с которой будет работать алгоритм.

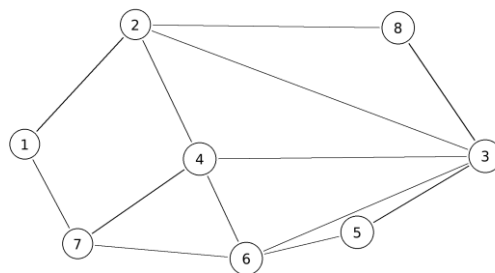


Рис. 1. Топология примерной mesh-сети

Fig. 1. Sample mesh network topology

Таблица 1  
Параметры радиоканалов (QoS) для примерной mesh-сети

Table 1  
Radio channel parameters (QoS) for a sample mesh network

Ребро <i>Edge</i>	Y, полоса, Мбит/с <i>Bandwidth, Mbps</i>	D, задержка, мс <i>Delay, ms</i>	J, джиттер, мс <i>Jitter, ms</i>	Z, потери <i>Loss</i>
1–2	10	12	3	0,02
1–7	8	8	2	0,005
2–3	5	20	8	0,04
2–4	7	10	4	0,03
2–8	12	15	5	0,02
3–4	8	12	4	0,01
3–5	6	10	3	0,01
3–6	4	18	6	0,02
3–8	10	14	4	0,03
4–6	7	11	3	0,02
4–7	9	9	3	0,01
5–6	7	9	2	0,01
6–7	6	10	3	0,01

Для трех профилей трафика заданы ограничения QoS и веса интегрального критерия (табл. 2). Маршрутизация выполняется из узла 1 (источник) в узел 3 (получатель). Информация о трафике представлена в табл. 3.

Таблица 2  
Запасы энергии узлов и оценка времени жизни  $T$  для профилей трафика

Table 2  
Energy reserves of nodes and lifetime estimate  $T$  for traffic profiles

Узел <i>Edge</i>	E, энергия, Вт·ч <i>Energy, W·hrs</i>	T для файлов, ч <i>T for files, hrs</i>	T для голоса, ч <i>T for voice, hrs</i>	T для телеметрии, ч <i>T for telemetry, hrs</i>
1	20	25	28,57	40
2	15	18,75	21,43	30
3	20	25	28,57	40
4	9	11,25	12,86	18
5	10	12,5	14,29	20
6	8	10	11,43	16
7	14	17,5	20	28
8	16	20	22,86	32

Таблица 3  
 Ограничения и веса критерия для примеров трафика

Table 3  
 Limitations and criteria weights for traffic examples

Профиль Profile	$Y_{min}$ , Mbps	$D_{max}$ , ms	$J_{max}$ , ms	$Z_{max}$	$T_{min}$ , hrs	$w_Y$	$w_D$	$w_J$	$w_X$	$w_T$
Передача файлов (протокол FTP) File Transfer Protocol	6	80	30	0,15	8	0,50	0,15	0,10	0,10	0,15
Голос Voice (VoIP)	1	50	10	0,05	6	0,05	0,35	0,25	0,25	0,10
Телеметрия и мониторинг Telemetry and Monitoring (IoT)	0,5	120	40	0,1	18	0,10	0,15	0,05	0,20	0,50

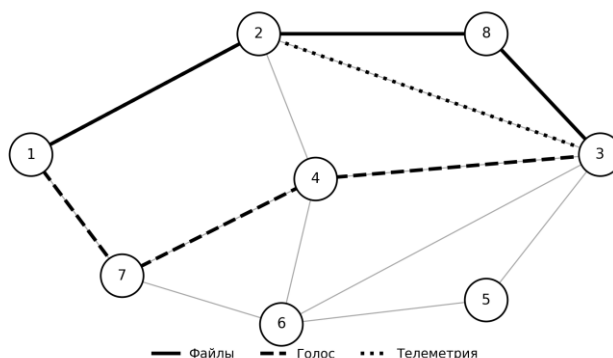


Рис. 2. Оптимальные маршруты для различных типов трафика  
 Fig. 2. Optimal routes for different types of traffic

Таблица 4  
 Результат маршрутизации: выбранные маршруты и показатели QoS

Table 4  
 Routing result: selected routes and QoS indicators

Тип трафика Type of traffic	Оптимальный маршрут Optimal route	$Y_p$ , Mbps	$D_p$ , ms	$J_p$ , ms	$Z_p$	$T_p$ , hrs	$R$
Передача файлов (протокол FTP) File Transfer Protocol	1-2-8-3	10	41	12	0,0684	18,75	0,5245
Голос Voice (VoIP)	1-7-4-3	8	29	9	0,0248	12,86	0,6033
Телеметрия и мониторинг Telemetry and Monitoring (IoT)	1-2-3	5	32	11	0,0592	30	0,4796

Результаты работы алгоритма представлены на рис. 2 и в табл. 4. Анализ работы предлагаемого алгоритма показывает, что модификация алгоритма Дейкстры с расширенной меткой позволяет решать задачу многокритериальной QoS-маршрутизации в mesh-сетях с учетом неаддитивных показателей (минимальная полоса пропускания и время жизни маршрута). При этом введение критерия времени жизни  $T$  обеспечивает энергоосведомленный выбор маршрута и позволяет избегать путей, проходящих через узлы с ограниченными запасами энергии. Из приведенного примера видно, что различные профили трафика приводят к выбору разных маршрутов за счет изменения ограничений и весов критериев.

## 2. Устранение ложного отбрасывания QoS-осуществимых путей

При реализации алгоритмов маршрутизации на основе предлагаемой модификации алгоритма Дейкстры для многокритериальной QoS-маршрутизации с расширенной меткой вершины может возникнуть следующая проблема: поскольку алгоритм Дейкстры является алгоритмом поиска без возврата, для каждой вершины фиксируется только один «лучший» по выбранному скалярному критерию путь. В результате возможно ложное решение об отсутствии QoS-осуществимого маршрута между узлами  $s$  и  $t$ , если выбранная оптимальная траектория к промежуточному узлу  $r$  не допускает дальнейшего продолжения до  $t$ , хотя альтернативная (хуже по скалярному критерию) траектория может приводить к QoS-осуществимому маршруту.

Для снижения вероятности ложного отбрасывания предлагается использовать два взаимодополняющих приема:

1) переход от аддитивной свертки к минимаксному критерию, который делает решение более устойчивым к «выбросу» одного из нормированных показателей;

2) итерационную настройку весовых коэффициентов: на каждом запуске алгоритма ограничения QoS на этапе релаксаций не проверяются; после получения оптимального по критерию маршрута выполняется проверка QoS-ограничений. При нарушении ограничений веса соответствующих показателей увеличиваются до выполнения ограничений либо до достижения предельных значений.

Минимаксный критерий для пути  $p$  (при пяти показателях QoS:  $Y$ ,  $D$ ,  $J$ ,  $X$  и  $T$ ) задается как минимум по максимуму взвешенных нормированных величин:

$$R_p = \max \left\{ w_Y \cdot \left( \frac{Y_{min}}{Y_p} \right), w_D \cdot \left( \frac{D_p}{D_{max}} \right), w_J \cdot \left( \frac{J_p}{J_{max}} \right), w_X \cdot \left( \frac{X_p}{X_{max}} \right), w_T \cdot \left( \frac{T_{min}}{T_p} \right) \right\}. \quad (12)$$

Условия QoS-осуществимости при этом остаются прежними:  $Y_p \geq Y_{min}$ ,  $D_p \leq D_{max}$ ,  $J_p \leq J_{max}$ ,  $Z_p \leq Z_{max}$  (эквивалентно  $X_p \leq X_{max}$ , где  $X_{max} = -\ln(1 - Z_{max})$ ),  $T_p \geq T_{min}$ .

Итерационный алгоритм выполняет последовательные запуски модифицированного алгоритма Дейкстры с минимаксным критерием. Обозначим через  $r_i(p)$  нормированное значение  $i$ -го показателя для найденного маршрута  $p$ . Для ограничений типа «не более» имеем  $r_D = D_p/D_{max}$ ,  $r_J = J_p/J_{max}$ ,  $r_X = X_p/X_{max}$ . Для ограничений типа «не менее» используем  $r_Y = Y_{min}/Y_p$  и  $r_T = T_{min}/T_p$ . Маршрут является QoS-осуществимым тогда и только тогда, когда  $r_i(p) \leq 1$  для всех  $i$ .

Если после очередного запуска получен маршрут, нарушающий ограничения, формируется множество нарушенных показателей  $S = \{ i : r_i(p) > 1 \}$ . Для них увеличиваются

веса  $w_i$ . Предельные значения выбираются как  $1/|S|$  (т. е., если нарушен один показатель, его вес может быть увеличен до 1; если нарушены два, – до 0,5 и т. д.). Оставшаяся доля веса распределяется между ненарушенными показателями пропорционально их текущим значениям весов с сохранением условия  $w_Y + w_D + w_J + w_X + w_T = 1$ .

Алгоритм можно описать следующей последовательностью шагов:

*Вход.* Задать профиль трафика (ограничения QoS) и значения весов  $w_Y, w_D, w_J, w_X, w_T$ .

*Шаг 1.* Выполнить поиск маршрута  $p^*$ , минимизирующего минимаксный критерий  $R_p$ , с использованием модифицированного алгоритма Дейкстры. На этапе релаксаций проверка ограничений QoS не выполняется.

*Шаг 2.* Для найденного маршрута вычислить показатели QoS ( $Y_p, D_p, J_p, Z_p, T_p$ ) и нормированные значения  $r_i(p^*)$ .

*Шаг 3.* Если  $r_i(p^*) \leq 1$  для всех  $i$ , то маршрут  $p^*$  принимается как QoS-осуществимый и оптимальный по критерию  $R_p$ .

*Шаг 4.* Если существует хотя бы один показатель  $i$ , для которого  $r_i(p^*) > 1$ , увеличить веса нарушенных показателей и повторить шаги 1–3. Если веса нарушенных показателей достигли предельных значений и улучшение отсутствует, итерации прекращаются.

*Выход.* Путь  $p$  и его показатели QoS.

В качестве примера рассмотрим mesh-сеть из 10 узлов с двусторонними радиоканалами. Маршрутизация выполняется из узла 1 (источник) в узел 10 (получатель). Топология сети показана на рис. 3, возможные параметры каналов приведены в табл. 5.

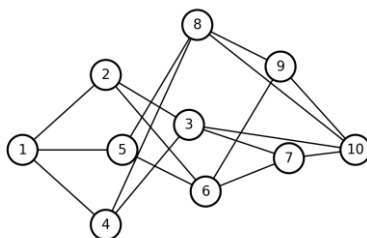


Рис. 3. Топология примерной mesh-сети

Fig. 3. Sample mesh network topology

Таблица 5  
 Параметры радиоканалов (QoS) для примерной mesh-сети

Table 5  
 Radio channel parameters (QoS) for a sample mesh network

Ребро Edge	$Y$ , Mbps	$D$ , ms	$J$ , ms	$Z$
1–2	12	10	3	0,02
1–4	8	8	2	0,005
1–5	7	12	3	0,01
2–3	10	12	4	0,02

Окончание табл. 5

End of table 5

Ребро <i>Edge</i>	$Y$ , Mbps	$D$ , ms	$J$ , ms	$Z$
2–6	9	15	4	0,02
3–4	9	9	3	0,01
3–7	7	9	3	0,02
3–10	9	15	5	0,03
4–8	8	14	5	0,01
5–6	7	10	3	0,01
5–8	5	20	8	0,03
6–7	6	9	2	0,01
6–9	8	12	4	0,02
7–10	6	11	3	0,01
8–9	9	7	2	0,015
8–10	8	18	6	0,01
9–10	8	10	3	0,02

Запасы энергии узлов рассматриваемой сети приведены в табл. 6. Для трех профилей трафика задаются усредненные мощности  $P_k$ , характеризующие энергопотребление узла при участии в передаче:  $P_{\text{файлы}}=0,8$  Вт,  $P_{\text{голос}}=0,7$  Вт,  $P_{\text{телеметрия}}=0,5$  Вт. Время жизни узла рассчитывается как  $T_{v,k}=E_v/P_k$ .

Таблица 6

Запасы энергии узлов и оценка времени жизни  $T$  для профилей трафика

Table 6

Energy reserves of nodes and lifetime estimate  $T$  for traffic profiles

Узел <i>Edge</i>	$E$ , энергия, Вт·ч <i>Energy,</i> <i>W·hrs</i>	$T$ , файлы, ч <i>Files (FTP),</i> <i>hrs</i>	$T$ , голос, ч <i>Voice (VoIP),</i> <i>hrs</i>	$T$ , телеметрия, ч <i>Telemetry (IoT),</i> <i>hrs</i>
1	20	25	28,57	40
2	18	22,5	25,71	36
3	5	6,25	7,14	10
4	16	20	22,86	32
5	14	17,5	20	28
6	12	15	17,14	24
7	13	16,25	18,57	26
8	22	27,5	31,43	44
9	17	21,25	24,29	34
10	24	30	34,29	48

Ограничения QoS и начальные веса критериев для профилей трафика приведены в табл. 7. В дальнейшем для каждого профиля запускается итерационный алгоритм настройки весов, описанный выше.

Таблица 7  
Ограничения QoS и начальные веса критериев для профилей трафика

Table 7  
QoS constraints and initial criteria weights for traffic profiles

Профиль Profile	$Y_{min}$	$D_{max}$	$J_{max}$	$Z_{max}$	$T_{min}$	$w_Y$	$w_D$	$w_J$	$w_X$	$w_T$
Передача файлов File Transfer (FTP)	6	80	30	0,15	8	0,5	0,15	0,1	0,1	0,15
Голос Voice (VoIP)	1	50	10	0,05	6	0,05	0,35	0,25	0,25	0,1
Телеметрия Telemetry (IoT)	0,5	120	40	0,1	18	0,1	0,15	0,05	0,2	0,5

Итоговые маршруты, полученные для различных типов трафика, приведены в табл. 8. Для профиля «Передача файлов (FTP)» требуется итерационная корректировка весов из-за нарушения ограничения по времени жизни маршрута при прохождении через узел 3 с малым запасом энергии.

Таблица 8  
Результат маршрутизации: выбранные маршруты и показатели QoS

Table 8  
Routing result: selected routes and QoS indicators

Профиль Profile	Оптимальный маршрут Optimal Route	$Y_p$ , Mbps	$D_p$ , ms	$J_p$ , ms	$Z_p$	$T_p$ , hrs	$R_p$	Итерации Iterations
Передача файлов File transfer (FTP)	1–4–8–10	8	40	13	0,025	20	0,3	2
Голос Voice (VoIP)	1–4–3–10	8	32	10	0,045	7,14	0,25	0
Телеметрия Telemetry (IoT)	1–4–8–10	8	40	13	0,025	32	0,28	0

Ход итерационного процесса для профиля «Передача файлов (FTP)» приведен в табл. 9. На нулевой итерации выбирается маршрут 1–2–3–10, обладающий высокой полосой пропускания и малой задержкой, однако ограничение  $T_p \geq T_{min}$  не выполняется из-за низкой энергии узла 3. После увеличения веса  $w_T$  алгоритм выбирает обходной маршрут 1–4–8–10, удовлетворяющий всем ограничениям QoS.

Таблица 9  
Итерационная корректировка весов для профиля «Передача файлов (FTP)»

Table 9  
Iterative adjustment of weights for the “File Transfer (FTP)” profile

Итерация <i>Iteration</i>	Весы/Weights $w_Y, w_D, w_J, w_X,$ $w_T$	Маршрут <i>Route</i>	$Y_p,$ Mbps	$D_p,$ ms	$J_p,$ ms	$Z_p$	$T_p,$ hrs	$R_p$	Нарушения <i>Infractions</i>
0	0,500, 0,150, 0,100, 0,100, 0,150	1–2–3–10	9	37	2	0,068	6,25	0,33	Т
1	0,451, 0,135, 0,090, 0,090, 0,234	1–2–3–10	9	37	2	0,068	6,25	0,3	Т
2	0,401, 0,120, 0,080, 0,080, 0,318	1–4–8–10	8	40	3	0,025	20	0,3	–

Таким образом, показано, что итерационная настройка весовых коэффициентов в сочетании с минимаксным критерием позволяет исключить ложные решения об отсутствии QoS-осуществимого маршрута и получить приемлемое решение для разных профилей трафика.

### 3. Двухуровневая маршрутизация в кластеризованной сети

Для масштабируемых беспроводных сенсорных mesh-сетей (WSN-mesh), применяемых в задачах умного города и инфраструктурного мониторинга, характерны большие размеры сети, неоднородность трафика и ограниченность энергетических ресурсов узлов. Одним из практических подходов к повышению масштабируемости и управляемости является кластеризация: узлы объединяются в кластеры, внутри которых выполняется локальная маршрутизация и (при необходимости) агрегация данных, а обмен между кластерами организуется через граничные узлы (шлюзы). Ниже предложен алгоритм двухуровневой маршрутизации, увязывающий кластеризацию с разработанным в разд. 2 алгоритмом многокритериальной QoS-маршрутизации, включающим параметр времени жизни маршрута  $T$ .

Рассмотрим сеть, в которой множество узлов  $V$  разделено на непересекающиеся кластеры  $V=V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_C$ . В каждом кластере выделяется голова кластера (Cluster Head, CH), обеспечивающая локальную координацию (например, сбор метрик, распределение расписаний и т. п.), а также один или несколько граничных узлов (Gateway, GW), имеющих радиоканалы с узлами соседних кластеров. Маршрутизация внутри кластера осуществляется по внутрикластерным радиоканалам, а межкластерная – по радиоканалам, соединяющим шлюзы разных кластеров. Качество маршрута на обоих уровнях оценивается по тем же параметрам QoS ( $Y, D, J, Z$ ) и времени жизни маршрута  $T$ , что и в предыдущих подразделах.

Двухуровневый подход состоит в разделении вычислений на два уровня: локальные вычисления внутри каждого кластера и глобальную маршрутизацию между кластерами на основе редуцированного (укрупненного) графа. В каждом кластере определяется множество опорных узлов  $S_c$ , включающее СН и все GW данного кластера, а также узлы источника  $s$  и назначения  $t$ , если они принадлежат кластеру. Для каждой пары опорных узлов  $(u, v) \in S_c \times S_c (u \neq v)$  рассчитывается оптимальный внутрикластерный маршрут  $p_c^*(u, v)$  с использованием разработанного алгоритма из разд. 2 с учетом ограничений QoS и параметра времени жизни маршрута  $T$ . Параметры виртуального «канала»  $u \rightarrow v$  внутри кластера принимаются равными параметрам маршрута  $p_c^*(u, v)$ , вычисляемым по правилам (11) (минимум по  $Y$  и  $T$ , суммирование по  $D, J$  и  $X$ ). На основе внутрикластерных виртуальных каналов и межкластерных радиоканалов строится редуцированный граф  $G^*=(V^*, E^*)$ , где  $V^*$  – объединение всех опорных узлов,  $E^*$  включает межкластерные ребра между шлюзами разных кластеров и виртуальные внутрикластерные ребра. Оптимальный маршрут из  $s$  в  $t$  затем ищется уже на графе  $G^*$  тем же алгоритмом, после чего выполняется разворачивание решения: каждое виртуальное ребро заменяется соответствующим внутрикластерным маршрутом  $p_c^*(u, v)$ .

Алгоритм двухуровневой маршрутизации для профиля трафика  $k$  может быть задан следующими шагами:

*Вход.* Определить кластеризацию сети: для каждого узла  $v$  задать номер кластера  $cluster(v)$ , выделить головы кластеров  $CH_c$  и граничные узлы  $GW_c$ .

*Шаг 1.* Сформировать множества опорных узлов  $S_c$  для каждого кластера:  $S_c = \{CH_c\} \cup GW_c \cup \{s, t\} \cap V_c$ .

*Шаг 2.* Уровень 1 (внутрикластерная маршрутизация): для каждого кластера  $c$  и каждой пары  $(u, v)$  из  $S_c$  вычислить оптимальный маршрут  $p_c^*(u, v)$  алгоритмом из разд. 2 с учетом ограничений QoS и времени жизни маршрута  $T$ ; сформировать виртуальные ребра  $u \rightarrow v$  с параметрами  $(Y, D, J, Z, T)$  и сохранить  $p_c^*(u, v)$  для последующего разворачивания.

*Шаг 3.* Построить редуцированный граф  $G^*$ :  $V^* = \cup_c S_c$ ;  $E^* = E_{inter} \cup E_{virtual}$ , где  $E_{inter}$  – межкластерные радиоканалы между GW разных кластеров,  $E_{virtual}$  – набор виртуальных внутрикластерных ребер между опорными узлами.

*Шаг 4.* Уровень 2 (межкластерная маршрутизация): выполнить поиск оптимального маршрута  $p^*(s, t)$  на графе  $G^*$  алгоритмом из разд. 2 (в том числе с использованием минимаксного критерия).

*Выход.* Развернуть найденный маршрут: заменить каждое виртуальное ребро  $u \rightarrow v$  фактическим внутрикластерным маршрутом  $p_c^*(u, v)$ , получая полный маршрут в исходном графе.

Преимуществами двухуровневого подхода являются снижение вычислительной сложности и локализация перерасчета маршрутов при изменении состояния сети: при изменении качества радиоканалов или энергосостояния узлов перерассчитываются только виртуальные ребра затронутых кластеров и (или) межкластерные связи, после чего выполняется перерасчет маршрута на редуцированном графе  $G^*$ .

В качестве примера рассмотрим кластеризованную беспроводную mesh-сеть из 20 узлов (1–20), разделенную на четыре кластера (K1–K4) по пять узлов в каждом. Источник трафика расположен в узле 2 (кластер K1), получатель – узле 19 (кластер K4).

Топология сети показана на рис. 4, состав кластеров и роли узлов приведены в табл. 9, параметры радиоканалов – в табл. 10, 11, энергетические характеристики – в табл. 12. Ограничения QoS и веса интегрального критерия заданы в табл. 13.

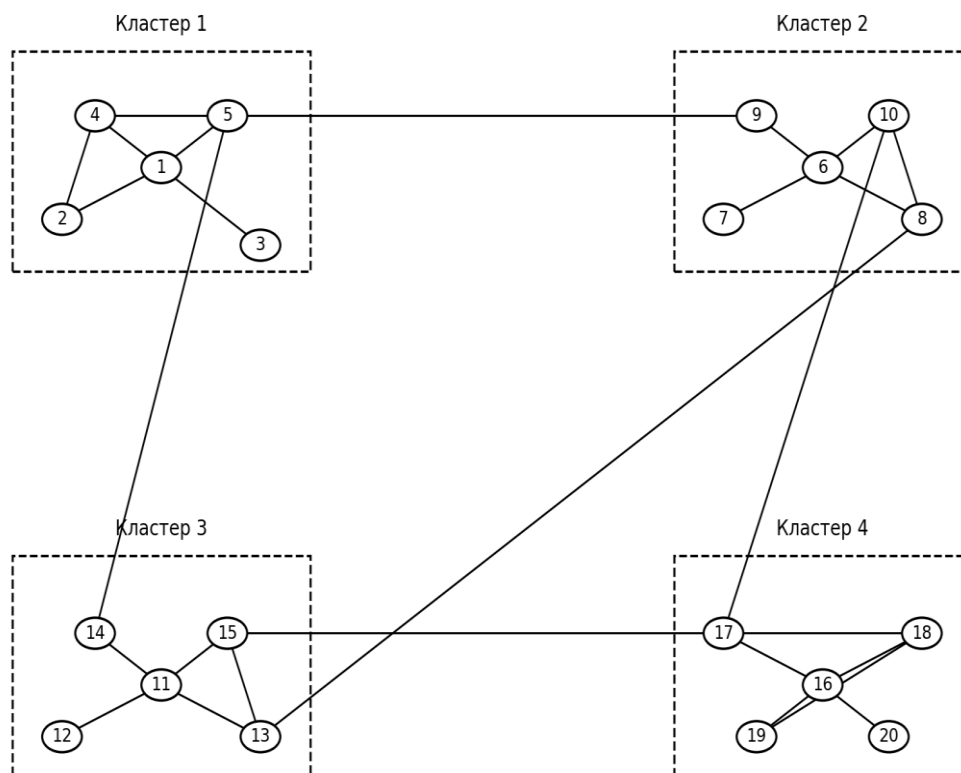


Рис. 4. Кластеризованная mesh-сеть (20 узлов, четыре кластера)

Fig. 4. Clustered mesh network (20 nodes, 4 clusters)

Таблица 9

Состав кластеров и роли узлов

Table 9

Composition of clusters and roles of nodes

Кластер Cluster	Узлы Nodes	Голова кластера Cluster Head	Граничные узлы (шлюзы) Border nodes (gateways)	Комментарий Comment
К1	1, 2, 3, 4, 5	1	4, 5	Шлюзы: 4↔9 (К2), 5↔14 (К3)
К2	6, 7, 8, 9, 10	6	8, 9, 10	Шлюзы: 9↔4 (К1), 8↔13 (К3), 10↔17 (К4)
К3	11, 12, 13, 14, 15	11	13, 14, 15	Шлюзы: 14↔5 (К1), 13↔8 (К2), 15↔18 (К4)
К4	16, 17, 18, 19, 20	16	17, 18	Шлюзы: 17↔10 (К2), 18↔15 (К3)

Таблица 10  
 Параметры QoS внутри кластеров

*Table 10*  
*QoS parameters within clusters*

Кластер <i>Cluster</i>	Ребро <i>Edge</i>	<i>Y</i> , Mbps	<i>D</i> , ms	<i>J</i> , ms	<i>Z</i>
К1	1–2	12	6	1	0,005
К1	1–3	10	7	1	0,010
К1	1–4	9	6	1	0,005
К1	1–5	15	10	2	0,010
К1	2–4	8	5	1	0,005
К2	6–10	9	8	1	0,010
К2	6–7	8	9	2	0,020
К2	6–8	11	7	1	0,010
К2	6–9	10	6	1	0,005
К2	8–10	12	6	1	0,005
К3	11–12	8	8	1	0,010
К3	11–13	12	6	1	0,005
К3	11–14	15	7	1	0,010
К3	11–15	14	7	1	0,005
К3	13–15	16	5	1	0,005
К4	16–17	10	6	1	0,005
К4	16–18	12	6	1	0,005
К4	16–19	11	7	1	0,005
К4	16–20	14	8	2	0,010
К4	18–19	13	5	1	0,005

Таблица 11  
 Параметры QoS между кластерами

*Table 11*  
*QoS parameters between clusters*

Связь <i>Connection</i>	Ребро <i>Edge</i>	<i>Y</i> , Mbps	<i>D</i> , ms	<i>J</i> , ms	<i>Z</i>
К1↔К2	4–9	9	8	1	0,005
К1↔К3	5–14	18	18	2	0,010
К2↔К3	8–13	10	14	2	0,020
К2↔К4	10–17	8	10	1	0,010
К3↔К4	15–18	12	9	1	0,005

Таблица 12  
Запасы энергии узлов и оценка времени жизни  
для профилей трафика

Table 12  
Node energy reserves and lifetime estimation for traffic  
profiles

Узел Node	$E$ , W·hr	$T(FTP)$ , hr	$T(VoIP)$ , hr	$T(IoT)$ , hr
1	20	25,0	28,57	40,0
2	18	22,5	25,71	36,0
3	16	20,0	22,86	32,0
4	15	18,75	21,43	30,0
5	14	17,5	20,0	28,0
6	22	27,5	31,43	44,0
7	8	10,0	11,43	16,0
8	18	22,5	25,71	36,0
9	20	25,0	28,57	40,0
10	6	7,5	8,57	12,0
11	24	30,0	34,29	48,0
12	20	25,0	28,57	40,0
13	18	22,5	25,71	36,0
14	16	20,0	22,86	32,0
15	15	18,75	21,43	30,0
16	20	25,0	28,57	40,0
17	18	22,5	25,71	36,0
18	18	22,5	25,71	36,0
19	20	25,0	28,57	40,0
20	22	27,5	31,43	44,0

Таблица 13  
Ограничения QoS и веса интегрального критерия

Table 13  
QoS limitations and integral criterion weights

Профиль Profile	$Y_{min}$	$D_{max}$	$J_{max}$	$Z_{max}$	$T_{min}$	$w_Y$	$w_D$	$w_J$	$w_X$	$w_T$
Передача файлов File Transfer (FTP)	6	80	30	0,15	8	0,5	0,15	0,1	0,1	0,15
Голос Voice (VoIP)	1	50	10	0,05	6	0,05	0,35	0,25	0,25	0,1
Телеметрия Telemetry (IoT)	0,5	120	40	0,10	18	0,1	0,15	0,05	0,2	0,5

В результате реализации данного алгоритма для рассматриваемой сети получены опорные внутрикластерные маршруты (табл. 14) и полные маршруты – результаты двух-уровневой маршрутизации (табл. 15).

Таблица 14

Опорные внутрикластерные маршруты (виртуальные каналы) между ключевыми узлами

Table 14

Backbone intra-cluster routes (virtual channels) between key nodes

Виртуальный канал (маршрут внутри кластера) <i>Virtual channel (route inside the cluster)</i>	Профиль <i>Profile</i>	$Y$ , Mbps	$D$ , ms	$J$ , ms	$Z$	$T$ , hr
2-4 (K1)	FTP	8	5	1	0,005	18,75
2-4 (K1)	VoIP	8	5	1	0,005	21,43
2-4 (K1)	IoT	8	5	1	0,005	30,0
2-1-5 (K1)	FTP	12	16	3	0,015	17,5
2-1-5 (K1)	VoIP	12	16	3	0,015	20,0
2-1-5 (K1)	IoT	12	16	3	0,015	28,0
9-6-10 (K2)	FTP	9	14	2	0,015	7,5
9-6-10 (K2)	VoIP	9	14	2	0,015	8,57
9-6-10 (K2)	IoT	9	14	2	0,015	12,0
14-11-15 (K3)	FTP	14	14	2	0,015	18,75
14-11-15 (K3)	VoIP	14	14	2	0,015	21,43
14-11-15 (K3)	IoT	14	14	2	0,015	30,0
17-16-19 (K4)	FTP	10	13	2	0,01	22,5
17-16-19 (K4)	VoIP	10	13	2	0,01	25,71
17-16-19 (K4)	IoT	10	13	2	0,01	36,0
18-19 (K4)	FTP	13	5	1	0,005	22,5
18-19 (K4)	VoIP	13	5	1	0,005	25,71
18-19 (K4)	IoT	13	5	1	0,005	36,0

Таблица 15

Результаты двухуровневой маршрутизации: выбранные маршруты и показатели QoS

Table 15

Two-tier routing results: selected routes and QoS metrics

Профиль <i>Profile</i>	Кластерный маршрут <i>Cluster Route</i>	Маршрут (узлы) <i>Route (for nodes)</i>	$Y_p$ , Mbps	$D_p$ , ms	$J_p$ , ms	$Z_p$	$T_p$ , hr	$R$
Голос <i>Voice (VoIP)</i>	K1→K2→K4	2-4-9-6-10-17-16-19	8	50	7	0,044	8,57	0,8214
Передача файлов <i>File Transfer (FTP)</i>	K1→K3→K4	2-1-5-14-11-15-18-19	12	62	9	0,049	17,5	0,4957
Телеметрия <i>Telemetry (IoT)</i>	K1→K3→K4	2-1-5-14-11-15-18-19	12	62	9	0,049	28,0	0,5096

Анализ примера показывает, что двухуровневый алгоритм обеспечивает согласование кластеризации с многокритериальной маршрутизацией. Для профиля «Голос (VoIP)» выбирается кластерный маршрут  $K1 \rightarrow K2 \rightarrow K4$  за счет меньшей суммарной задержки и вариации задержки, а маршрут через  $K3$  не удовлетворяет ограничению  $D_{max}$ . Для профилей «Передача файлов (FTP)» и «Телеметрия (IoT)» маршрут через кластер  $K2$  становится неосуществимым по ограничению времени жизни (узел 10 имеет малый запас энергии:  $T(FTP) = 7,50 \text{ ч} < T_{min} = 8 \text{ ч}$  и  $T(IoT) = 12 \text{ ч} < T_{min} = 18 \text{ ч}$ ), поэтому выбирается обходной кластерный маршрут  $K1 \rightarrow K3 \rightarrow K4$ . Таким образом, кластеризация уменьшает размерность задачи на глобальном уровне, а введение параметра  $T$  обеспечивает энергоосведомленный выбор маршрута как внутри кластеров, так и при межкластерной маршрутизации.

### Заключение

Предложенная модификация алгоритма Дейкстры с расширенной меткой позволяет решать задачу многокритериальной QoS-маршрутизации в mesh-сетях с учетом неаддитивных показателей (минимальная полоса пропускания и время жизни маршрута). При этом предложенный алгоритм дает возможность учитывать энергетические критерии, например время жизни маршрута  $T$ , обеспечивая энергоосведомленный выбор маршрута и позволяя избегать путей, проходящих через узлы с ограниченными запасами энергии, что критично для сенсорных сетей умного города и инфраструктурного мониторинга. Разработан итерационный алгоритм настройки весовых коэффициентов, который в сочетании с минимаксным критерием позволяет исключать ложные решения об отсутствии QoS-осуществимого маршрута и получать приемлемые решения для разных профилей трафика. Разработаны двухуровневый подход и алгоритм маршрутизации в кластеризованной сети, обеспечивающие снижение вычислительной сложности и локализацию перерасчета маршрутов при изменении состояния сети: качества радиоканалов или энергосостояния узлов.

**Вклад авторов.** А. К. Шульган осуществил сбор и анализ результатов работы, написал текст статьи, внес значительный вклад в концепцию. Ю. И. Воротницкий осуществил сбор, анализ и оформление результатов работ и внес идею написания статьи.

### Список использованных источников

1. Al-Karaki, J. N. Routing techniques in wireless sensor networks: a survey / J. N. Al-Karaki, A. E. Kamal // IEEE Wireless Communications. – 2004. – Vol. 11, no. 6. – P. 6–28.
2. Akkaya, K. A survey on routing protocols for wireless sensor networks / K. Akkaya, M. Younis // Ad Hoc Networks. – 2005. – Vol. 3, no. 3. – P. 325–349.
3. Pantazis, N. A. Energy-efficient routing protocols in wireless sensor networks: a survey / N. A. Pantazis, S. A. Nikolidakis, D. D. Vergados // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2013. – Vol. 15, no. 2. – P. 551–591.
4. LEA-RPL: lightweight energy-aware RPL protocol for internet of things based on particle swarm optimization / S. Mokrani, M. Belkadi, T. Sadoun [et al.] // Telecommunication Systems. – 2025. – Vol. 88, iss. 1, art. 14. – P. 433–454.
5. Alotaibi, M. A. A novel reliable and trust objective function for RPL-based IoT routing protocol / M. A. Alotaibi, S. S. Alwakeel, A. N. Alyahya // Computers, Materials and Continua. – 2025. – Vol. 82, iss. 2. – P. 3467–3497.
6. Листопад, Н. И. Маршрутизация в мультисервисных сетях телекоммуникаций на основе модифицированного алгоритма Дейкстры / Н. И. Листопад, Ю. И. Воротницкий, А. А. Хайдер // Вестник БГУ. Серия 1. – 2015. – № 1. – С. 70–76.
7. Многокритериальная маршрутизация информационных потоков / Н. И. Листопад, Ю. И. Воротницкий, В. В. Бортовский, А. А. Хайдер // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2(31). – С. 84–90.

8. A scalable approach to QoS-aware self-adaptation in service-oriented architectures / V. Cardellini, E. Casalicchio, V. Grassi [et al.] // Proc. of 6<sup>th</sup> Intern. ICST Conf. on Heterogeneous Networking for Quality, Reliability, Security and Robustness, Q Shine 2009 and 3<sup>rd</sup> Intern. Workshop on Advanced Architectures and Algorithms for Internet Delivery and Applications, AAA-IDEA 2009, Las Palmas, Gran Canaria, 23–25 Nov. 2009. – Berlin, Heidelberg, N. Y., 2009. – P. 431–447.
9. Mahmoud, W. A. A proposal algorithm to solve delay constraint least cost optimization problem / W. A. Mahmoud, D. J. Kadhim // Journal of Engineering. University of Baghdad. – 2013. – Vol. 19, no. 1. – P. 155–160.
10. Dijkstra, E. W. A note on two problems in connexion with graphs / E. W. Dijkstra // Numerische Mathematik. – 1959. – Vol. 1. – P. 269–271.

## References

1. Al-Karak J. N., Kamal A. E. Routing techniques in wireless sensor networks: a survey. *IEEE Wireless Communications*, 2004, vol. 11, no. 6, pp. 6–28.
2. Akkaya K., Younis M. A survey on routing protocols for wireless sensor networks. *Ad Hoc Networks*, 2005, vol. 3, no. 3, pp. 325–349.
3. Pantazis N. A., Nikolidakis S. A., Vergados D. D. Energy-efficient routing protocols in wireless sensor networks: a survey. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 551–591.
4. Mokrani S., Belkadi M., Sadoun T., Lloret J., Aoudjit R. LEA-RPL: lightweight energy-aware RPL protocol for internet of things based on particle swarm optimization. *Telecommunication Systems*, 2025, vol. 88, iss. 1, art. 14, pp. 433–454.
5. Alotaibi M. A., Alwakeel S. S., Alyahya A. N. A novel reliable and trust objective function for RPL-based IoT routing protocol. *Computers, Materials and Continua*, 2025, vol. 82, iss. 2, pp. 3467–3497.
6. Listopad N. I., Vorotnitsky Y. I., Hayder A. A. *Routing in multiservice telecommunication networks based on a modified Dijkstra algorithm*. Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 1 [Journal of the Belarusian State University. Series I], 2015, no. 1, pp. 70–76 (In Russ.).
7. Listopad N. I., Vorotnitsky Y. I., Bortnovsky V. V., Hayder A. A. *Multi-criterial routing of information flows*. Problemy fiziki, matematiki i tehniki [Problems of Physics, Mathematics and Technics], 2017, no. 2(31), pp. 84–90 (In Russ.).
8. Cardellini V., Casalicchio E., Grassi V., Presti F. L., Mirandola R. A scalable approach to QoS-aware self-adaptation in service-oriented architectures. *Proceedings of 6<sup>th</sup> International ICST Conference on Heterogeneous Networking for Quality, Reliability, Security and Robustness, Q Shine 2009 and 3<sup>rd</sup> International Workshop on Advanced Architectures and Algorithms for Internet Delivery and Applications, AAA-IDEA 2009, Las Palmas, Gran Canaria, 23–25 November 2009*. Berlin, Heidelberg, New York, 2009, pp. 431–447.
9. Mahmoud W. A., Kadhim D. J. A proposal algorithm to solve delay constraint least cost optimization problem. *Journal of Engineering. University of Baghdad*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 155–160.
10. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1959, vol. 1, pp. 269–271.

## Информация об авторах

Шульган Антон Константинович, аспирант, Белорусский государственный университет.  
E-mail: anton.shulgan@mail.ru

Воротницкий Юрий Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, Белорусский государственный университет.  
E-mail: vorotn@bsu.by

## Information about the authors

Anton K. Shulgan, Postgraduate Student, Belarusian State University.  
E-mail: anton.shulgan@mail.ru

Yury I. Vorotnitsky, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Head of Department, Belarusian State University.  
E-mail: vorotn@bsu.by