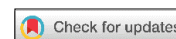


МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING



УДК 519.8; 621.3:007; 621.3:001.891.57
DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-4-7-23

Оригинальная статья
Original Article

О совместной оптимизации размещения зарядных станций, маршрутизации электробусов и расписаний зарядки

Н. Н. Гуцинский, М. Я. Ковалев, Б. М. Розин[✉]

*Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь
[✉]E-mail: rozin@newman.bas-net.by*

Аннотация

Цели. При замене парка дизельных автобусов парком электробусов актуальной является задача планирования состава парка, зарядной инфраструктуры, ориентированной на быструю подзарядку на терминалах маршрутов, и расписаний зарядки электробусов. Цель исследования заключается в создании моделей и методов выработки экономически эффективных решений по выбору парка электробусов, зарядной инфраструктуры такого типа с учетом ряда специфических условий. Функционирование парка и зарядной инфраструктуры моделируется для терминалов маршрутов в представительном интервале дня, характеризующемся наибольшей интенсивностью пассажиропотока и максимальным расходом электроэнергии.

Методы. Используются методы теории множеств, теории графов, математического программирования.
Результаты. Разработана математическая модель задачи оптимизации однородного парка электробусов, назначения электробусам сервисных рейсов, размещения и количеств зарядных станций быстрой зарядки на терминалах маршрутов и расписания зарядки на них электробусов. В качестве целевой функции выбрана суммарная дневная стоимость электробусов, зарядных станций и потребленной электроэнергии. Предложена двухуровневая декомпозиционная схема решения задачи, на верхнем уровне которой осуществляется выбор назначения электробусов на сервисные рейсы из заданного набора, а на нижнем определяется инфраструктура однородных зарядных станций терминалов и расписания зарядки на них электробусов при фиксированном назначении электробусам сервисных рейсов. Для решения подзадачи верхнего уровня предложен эвристический рандомизированный алгоритм, для подзадачи нижнего уровня разработана модель смешанного целочисленного линейного программирования.

Заключение. Решение подзадачи верхнего уровня заключается в выборе назначения электробусов на сервисные рейсы из заданного набора. Для решения сформулированной подзадачи нижнего уровня могут использоваться стандартные решатели типа IBM ILOG CPLEX, Gurobi Optimizer.

Ключевые слова: электробус, аккумуляторная батарея, станция зарядки, оптимизация, смешанное целочисленное линейное программирование

Благодарности. Исследование выполнялось в рамках проекта «Модели и методы для систем поддержки принятия решений при проектировании, планировании и управлении высокотехнологичными, роботизированными производствами и электротранспортом» программы ГПНИ «Цифровые и космические технологии, безопасность человека, общества и государства».

Для цитирования. Гуцинский, Н. Н. О совместной оптимизации размещения зарядных станций, маршрутизации электробусов и расписаний зарядки / Н. Н. Гуцинский, М. Я. Ковалев, Б. М. Розин // Информатика. – 2025. – Т. 22, № 4. – С. 7–23. – DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-4-7-23.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 22.08.2025

Подписана в печать | Accepted 12.09.2025

Опубликована | Published 30.12.2025

On the joint optimization of charging stations location, electric bus routing and charging scheduling

Nikolai N. Guschinsky, Mikhail Y. Kovalyov, Boris M. Rozin✉

*The United Institute of Informatics Problems
of the National Academy of Sciences of Belarus,
st. Surganova, 6, Minsk, 220012, Belarus*

✉E-mail: rozin@newman.bas-net.by

Abstract

Objectives. When replacing a fleet of diesel buses with a fleet of electric buses, the problem of planning the fleet composition, charging infrastructure oriented towards fast recharging at route terminals, and electric bus charging schedules is relevant. The purpose of the study is to develop models and methods for elaboration of cost-effective solutions for selecting a fleet of electric buses, charging infrastructure of this type, taking into account a number of specific conditions. The functioning of the fleet and charging infrastructure is modeled for route terminals during the most representative period of the day, characterized by the highest passenger flow intensity and maximum energy consumption.

Methods. Methods of set theory, graph theory and mathematical programming are used.

Results. A mathematical model has been developed for the optimization problem of a homogeneous electric bus fleet, assignment of service trips to electric buses, location and quantity of fast charging stations at route terminals, and a schedule for charging electric buses on them. The total daily cost of electric buses, charging stations, and consumed electricity has been selected as the objective function. A two-level decomposition scheme for solving the problem has been proposed, at the upper level of which the assignment of electric buses to service trips from a given set is selected, and at the lower level, the infrastructure of homogeneous charging stations of terminals and the charging schedules of electric buses on them are determined with a fixed assignment of service trips to electric buses. A heuristic randomized algorithm has been proposed to solve the upper-level subproblem, and a mixed integer linear programming model has been developed for the lower-level subproblem.

Conclusion. The solution to the upper-level subproblem consists of selecting the assignment of electric buses to service trips from a given set. Standard solvers such as IBM ILOG CPLEX, Gurobi Optimizer can be used to solve the formulated lower-level subproblem.

Keywords: electric bus, battery, charging station, optimization, mixed integer linear programming

Acknowledgements. The study was carried out within the Project "Models and methods for decision support systems in the design, planning and management of high-tech, robotic production and electric transport" in frames of the State research program "Digital and space technologies, human, society and state safety".

For citation. Guschinsky N. N., Kovalyov M. Y., Rozin B. M. *On the joint optimization of charging stations location, electric bus routing and charging scheduling*. Informatika [Informatics], 2025, vol. 22, no. 4, pp. 7–23 (In Russ.). DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-4-7-23.

Conflict of interest. The authors declare of no conflict of interest.

Введение. В последние годы значительное внимание в литературе уделяется различным аспектам планирования парка и зарядной инфраструктуры для городского электротранспорта, в частности электробусов [1–5]. Применяемые технологии зарядки электробусов варьируются в широком диапазоне (URL: <https://zeeus.eu/uploads/publications/documents/zeeus-report2017-2018-final.pdf>): электробусы могут заряжаться только в депо, либо в депо и на конечных остановках маршрутов, либо в депо, на конечных и промежуточных автобусных остановках. На практике чаще всего применяются технологии быстрой зарядки аккумуляторных батарей (далее *батарея*) электробусов на остановках маршрутов и медленной зарядки в депо, как правило, в ночном периоде. Для зарядки на маршруте обычно требуются зарядные устройства большой мощности (до 400–500 кВт), в то время как для зарядки в депо могут использоваться зарядные устройства малой мощности (80–100 кВт) [2, 3]. Наиболее распространена в последнее время технология быстрой зарядки электробусов на остановках маршрутов [4, 5].

При выборе парка электробусов и их зарядной инфраструктуры требуется учитывать множество факторов, в том числе расписание выполняемых сервисных рейсов перевозки пассажиров по маршрутам, расход электроэнергии в зависимости от характеристик используемых электробусов, маршрутов, пассажиропотока и особенностей эксплуатации, размещение и пропускную способность зарядных станций, стоимостные характеристики электробусов, зарядных станций, тарифов и т. д. Также по мере роста парков электробусов, обслуживающих городские маршруты, возрастает нагрузка на соответствующие энергосистемы, что требует принятия нетривиальных решений по сглаживанию пиковых нагрузок.

Электробусы обычно отправляются в путь из депо и возвращаются в то же или другое депо в конце дня. Для восстановления затраченной при выполнении рейсов электроэнергии используются технологии медленной зарядки в ночное время в депо и быстрой подзарядки в течение дня между рейсами. После ночной зарядки в депо электробусы на следующий день отправляются с полностью заряженной батареей. При быстрой зарядке в течение дня уровень заряда батареи электробуса может быть восстановлен частично в любом месте размещения зарядных станций до уровня, достаточного для выполнения следующего рейса.

В работе исследуется комплексная задача оптимального выбора назначения электробусов парка на сервисные рейсы из заданного набора; мест размещения из множества возможных вариантов и количеств идентичных зарядных станций, устанавливаемых в выбранных местах; расписаний зарядки электробусов на зарядных станциях в условиях их ограниченной пропускной способности.

Предлагаемый подход к решению комплексной задачи заключается в двухуровневой декомпозиции исходной задачи на подзадачу нижнего уровня выбора оптимальных зарядной инфраструктуры и расписаний зарядки электробусов при фиксированном наборе выполняемых каждым электробусом парка сервисных рейсов и подзадачу верхнего уровня – выбора назначения электробусам парка сервисных рейсов.

1. Обзор литературы. Многие исследования в области планирования электротранспортных систем в последнее время посвящены комплексным задачам совместной оптимизации парка электробусов, инфраструктуры зарядных станций, назначения электробусов на сервисные рейсы согласно заданному расписанию и расписаний зарядки электробусов.

В частности, в работе [6] для системы маршрутов с многими терминалами исследуется задача совместной оптимизации мест зарядки для однородного парка электробусов, диспетчеризации заданного набора рейсов электробусов и расписаний их быстрой подзарядки на зарядных станциях терминалов. Учитываются динамические тарифы на электроэнергию, возможности переключения электробусов между маршрутами и возможность управления скоростью зарядки. Переключение в течение дня электробуса с одного обслуживаемого маршрута на другой позволяет в ряде случаев сократить количество используемых электробусов за счет применения дополнительных порожних (без пассажиров) рейсов между терминалами. Последовательность переключений электробуса в течение дня определяет последовательность выполняемых им сервисных и порожних рейсов, каждый из которых определяется начальным и конечным терминалами. Любой электробус может заряжаться на последовательности временных интервалов в промежутке между сервисными рейсами с различными кусочно-постоянными скоростями

зарядки. Зарядка в депо не рассматривается. В качестве цели выбрана минимизация капитальных затрат на электробусы и зарядные станции, а также эксплуатационных расходов на порожние рейсы, потраченную электроэнергию и затраты на контрактную мощность сети для зарядных станций. В работе не учитывается ограниченность поставляемой энергосетью мощности для каждого места размещения зарядной инфраструктуры, как и предельное количество зарядных станций. Соответственно, исключены из рассмотрения вопросы конкуренции электробусов за ресурсы времени на зарядных станциях, что неоправданно упрощает задачу. Предложена формулировка смешанного целочисленного линейного программирования (СЦЛП) для этой задачи. Для подзадачи поиска мест размещения зарядных станций и назначения электробусов на поездки разработана процедура локального поиска.

В статье [7] рассматривается задача выбора расписания и назначения электробусов на сервисные рейсы для системы маршрутов с многими терминалами, а также выбора мест установки зарядных станций с целью минимизации количества используемых однородных электробусов при выполнении ограничений, касающихся маршрутизации и зарядки. Заданное множество сервисных рейсов, как и в работе [6], разделено по маршрутным линиям, определяемым начальным и конечным терминалами. Каждая маршрутная линия между терминалами характеризуется интервалом между рейсами и числом рейсов. Каждый сервисный рейс характеризуется длительностью, расстоянием и затратами энергии. Интервал между соседними рейсами является параметром, который может принимать фиксированное значение либо выбираться из заданного диапазона значений. Предложена формулировка задачи в форме СЦЛП. В этой формулировке имеется ограничение на количество используемых зарядных станций, но при этом не учитывается возможность конфликтов электробусов различных линий за временные ресурсы зарядных станций, что может приводить к некорректным решениям.

В статье [8] исследуется задача диспетчеризации электробусов и дизельных автобусов, а также планирования зарядки электробусов на одном терминале, оборудованном заданными зарядными устройствами. Для ее решения использовалась двухуровневая декомпозиционная схема, где в координирующей подзадаче верхнего уровня на базе метода типа Бендерса отыскивалось расписание рейсов электробусов с учетом ограничений на мощность зарядных станций, а во вспомогательной подзадаче нижнего уровня определялось расписание операций зарядки для заданных расписаний рейсов электробусов. Вопрос выбора количества зарядных станций либо их пропускной способности не рассматривался.

В ряде исследований подобных задач, например в [6], отмечается высокая вычислительная трудоемкость решения такой комплексной задачи. Поэтому многие авторы, чтобы иметь возможность получать приемлемое по качеству решение в условиях ограниченных ресурсов времени и вычислительных мощностей, рассматривают решение отдельных компонентов задачи либо их комбинаций.

Анализ известных результатов для комплексных моделей оптимального планирования электротранспорта, включающих выбор парка, мест размещения зарядной инфраструктуры и расписаний зарядки, выявил недостаток внимания к необходимости сокращения количества используемых зарядных станций в условиях ограниченной пропускной способности зарядной инфраструктуры и конкуренции электробусов за ресурс времени зарядки.

2. Постановка задачи. Для выполнения заданного набора $I = \{1, 2, \dots, n\}$ сервисных рейсов используются идентичные электробусы из множества $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, оснащенные идентичными батареями энергетической емкости E (кВт·ч), с одинаковым запасом хода, которые могут выполнять любые рейсы из I . Для каждого сервисного рейса $i \in I$ заданы его стартовый a_i и конечный b_i терминалы, моменты времени α_i начала и β_i окончания рейса и величина g_i расходуемого относительного заряда батареи электробуса (далее *заряд*), измеряемого в долях ее энергетической емкости. Моменты начала и окончания каждого сервисного рейса детерминированы. В дальнейшем (если не определено иное) моменты времени и длительности измеряются в часах.

Допускаются переключения обслуживания электробуса с одного маршрута на другой, т. е. электробус может обслуживать запланированные рейсы по нескольким маршрутам. Пара сервисных рейсов (i, j) , $i, j \in I$ при $a_j = b_i$ (стартовый терминал рейса j является конечным термина-

лом рейса i), совместимы, если $\beta_i \leq \alpha_j$. Паре сервисных рейсов (i, j) , $i, j \in I$, может соответствовать порожний рейс из терминала b_i в терминал a_j при $a_j \neq b_i$, если $\beta_i + \gamma_{i,j} \leq \alpha_j$, где $\gamma_{i,j} > 0$ и $g_{i,j} > 0$ – величины затрачиваемых электробусом в порожнем рейсе времени и заряда соответственно. При этом условия сервисные рейсы i, j также считаются совместимыми. На любом из терминалов b_i либо a_j (при $a_j \neq b_i$) или на обоих этих терминалах электробус, выполняющий рейсы i, j , может восстанавливать потраченный заряд батареи, если на соответствующем терминале установлены зарядные станции и интервал пребывания электробуса на терминале позволяет выполнить операцию зарядки. Уровень заряда в процессе функционирования электробуса должен оставаться в рамках допустимого диапазона $[u_{\min}, u_{\max}]$, где $0 < u_{\min}, u_{\max} \leq 1$, u_{\max} – уровень заряда полностью заряженной батареи. Любой терминал $\theta \in \Theta = \{a_i, b_i \mid i \in I\}$ может быть укомплектован идентичными зарядными станциями из набора $C_\theta = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C_\theta|}\}$ с предельным их количеством $|C_\theta|$ в зависимости от θ . Любой электробус может заряжаться при каждом посещении любого терминала не более одного раза не более чем на одной зарядной станции. В каждый момент времени на одной зарядной станции может заряжаться не более одного электробуса. Каждой операции зарядки электробуса предшествует операция настройки длительности Δ . Длительность любой операции зарядки должна быть не меньше минимальной величины tc_{\min} .

Будем говорить, что терминалу b_i (либо a_j при $a_j = b_i$) соответствует единственная действительная опция зарядки электробуса, последовательно выполняющего рейсы i, j , если выполняется условие $\beta_i + \Delta + tc_{\min} \leq \alpha_j$, иначе такая опция отсутствует (будем называть ее *пустой*). Для случая, когда $a_j \neq b_i$, электробусу, выполняющему совместимые рейсы $i, j \in I$, в интервале между этими рейсами соответствует единственная действительная опция зарядки (либо на терминале b_i , либо на терминале a_j) при выполнении условий $\beta_i + \gamma_{i,j} + \Delta + tc_{\min} \leq \alpha_j < \beta_i + \gamma_{i,j} + 2(\Delta + tc_{\min})$. Если же выполняется условие $\beta_i + \gamma_{i,j} + 2(\Delta + tc_{\min}) \leq \alpha_j$, то и терминалу b_i , и терминалу a_j соответствует по одной действительной опции зарядки. Другими словами, в интервале между рейсами i, j возможно выполнение двух операций зарядки (одна на зарядной станции терминала b_i , другая на зарядной станции терминала a_j). Таким образом, для единственного терминала, посещаемого электробусом между двумя сервисными рейсами, может существовать единственная действительная опция зарядки. При посещении электробусом двух терминалов между сервисными рейсами этим терминалам могут соответствовать две пустые опции; может соответствовать одна действительная опция зарядки (на одном из терминалов), а вторая – пустая либо могут соответствовать по одной действительной опции зарядки на каждом из терминалов.

Определим взаимно-однозначное отображение z подмножества $V(z) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\eta(z)}\} \subseteq V$, где $\eta(z) \leq n$, на множество I , сопоставляющее электробусам $v \in V(z)$ упорядоченные по возрастанию времени выполнения подмножества $I_v(z) = \{j_{v,1}, j_{v,2}, \dots, j_{v,\bar{l}_v}\}$ совместимых сервисных рейсов $j_{v,l} \in I$, ($\beta_{j_{v,l}} + \gamma_{j_{v,l}, j_{v,l+1}} \leq \alpha_{j_{v,l+1}}$), $l=1, 2, \dots, \bar{l}_v - 1$, такие, что $I_v(z) \cap I_{v'}(z) = \emptyset$ для $v \neq v'$, $v, v' \in V(z)$ и $\bigcup_{v \in V(z)} I_v(z) = I$.

Пусть Z – множество таких взаимно-однозначных отображений.

При фиксированном отображении z каждое подмножество $I_v(z)$ однозначно определяет последовательность опций зарядки электробуса $v \in V(z)$. Эта последовательность опций зарядки электробуса v включает также опцию зарядки на начальном терминале $a_{j_{v,1}}$ первого сервисного рейса $j_{v,1}$ для восстановления заряда, потраченного в порожнем рейсе из депо.

Обозначим $Q_\theta(z)$ множество всех опций зарядки (включая пустые) всех электробусов $v \in V$ в течение дня на терминале θ при фиксированном z , $\theta \in \Theta$. Восстановление уровня заряда на любой зарядной станции $c \in C_\theta$, $\theta \in \Theta$, в допустимом диапазоне $[u_{\min}, u_{\max}]$ осуществляется на постоянной мощности $P = E \cdot f$ (кВт) со скоростью f единиц заряда в час (е.з./ч). Таким образом, максимальная длительность зарядки батареи для любого электробуса составляет

$$\tau_{\max} = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{f}.$$

Первоначально каждый электробус размещается в одном депо из заданного множества $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, в котором он восстанавливает заряд батареи в ночной период до максимального уровня u_{\max} . Процесс зарядки электробусов парка в депо не рассматривается. В течение суток электробусы посещают депо однократно. Электробус не обязан возвращаться в свое отправное депо в конце дня. Однако, поскольку дневные расписания обслуживания сервисных рейсов являются периодическими, требуется, чтобы начальное и конечное распределения количеств электробусов по депо совпадали. Первый рейс электробуса из депо $d \in D$ в начальный терминал сервисного рейса $i \in I$, как и последний рейс из конечного терминала последнего сервисного рейса $j \in I$ в депо $d' \in D$, являются порожними и характеризуются длительностями $\gamma_{d,i}$, $\gamma_{j,d'}$ и величинами $g_{d,i}$, $g_{j,d'}$ расхода заряда соответственно.

Предполагается, что все сервисные рейсы и все возможные опции зарядки электробуса в течение дня выполняются в рамках заданного диапазона $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$. Считаем выполненным достаточное для этого условие $0 \leq \underline{\Gamma} \leq \alpha_j - \tau_{\max} < \alpha_j < \beta_j < \beta_j + \tau_{\max} \leq \bar{\Gamma} \leq 24, j \in I$.

Суточная стоимость электробуса c^{bus} и зарядной станции c^{ch} заданы. Дневной тариф c^{el} на электроэнергию в течение дня не изменяется.

Дневной (повторяющийся) период $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$ работы транспорта разбивается на несколько интервалов, каждый из которых характеризуется постоянной частотой выхода электробусов на маршрут, отличной от других интервалов. *Представительный интервал* дня, относящийся к одному из интервалов часов пик, характеризуется максимальным пассажиропотоком и интенсивностью его обслуживания с наибольшей частотой рейсов для любой маршрутной линии. *Представительный день* года (для Европы, как правило, рабочий день февраля) характеризуется наибольшим расходом электробусами электроэнергии вследствие неблагоприятных погодных условий и дорожной обстановки. Пропускная способность зарядной инфраструктуры, обеспечивающая функционирование парка электробусов в представительном интервале такого дня, позволяет гарантировать его функционирование в любом другом интервале с меньшими частотами рейсов любого дня года. Для сокращения сложности задачи рассматривается только часть дневного расписания событий зарядки электробусов парка в выделенном представительном интервале из периода $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$. Полученное в результате решения задачи расписание зарядки электробусов парка для представительного интервала позволяет оценить расходы на потребленную парком электроэнергию других интервалов (пиковых и непиковых) периода $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$ за счет использования поправочных коэффициентов, учитывающих различные частоты выхода электробусов на маршруты.

Исследуемая задача заключается в назначении выбранным электробусам упорядоченных подмножеств сервисных рейсов, выборе мест размещения и количеств зарядных станций, а также расписаний зарядки на них электробусов, минимизирующих суточные капитальные и операционные затраты на выбранные электробусы, зарядные станции и потребленную парком электроэнергию в периоде $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$. Назначение электробусам подмножеств сервисных рейсов должно обеспечивать однократное выполнение всех запланированных в периоде $[\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$ сервисных рейсов. Размещение зарядных станций на терминалах должно обеспечивать возможность зарядки электробусов для выполнения назначенных им рейсов, а расписания их зарядки должны учитывать приведенные выше условия и ограничения по времени и уровню заряда при приходе и выходе из терминалов, совместимость выполнения операций зарядки электробусов на каждой зарядной станции каждого терминала.

3. Декомпозиционная схема решения задачи. Предлагается следующая двухуровневая декомпозиционная схема решения задачи. Подзадача нижнего уровня заключается в оптимизации размещения и количеств зарядных станций терминалов, определении стартовых и финишных депо для всех используемых электробусов и расписаний их зарядки на зарядных станциях терминалов при фиксированном наборе упорядоченных подмножеств сервисных рейсов. В каче-

стве целевой функции подзадачи нижнего уровня используются общие дневные затраты на зарядные станции и потребленную на зарядных станциях терминалов электроэнергию.

На верхнем уровне решается подзадача выбора для электробусов парка набора последовательностей совместимых сервисных рейсов. При выборе набора последовательностей таких рейсов обеспечиваются достаточные интервалы пребывания электробусов на терминалах для восстановления уровня их заряда в промежутках между рейсами. Возможная конкуренция за ресурсы зарядных станций терминалов не учитывается. Целевая функция для подзадачи верхнего уровня выражается суммой оптимального значения целевой функции подзадачи нижнего уровня и суточной стоимости всех использованных электробусов парка.

Для решения подзадач нижнего уровня предлагается новая модель СЦЛП, описание которой приводится в подразд. 3.1. Для решения подзадачи верхнего уровня используется и эвристический алгоритм, описываемый в подразд. 3.2.

3.1. Подзадача нижнего уровня. Модель смешанного целочисленного линейного программирования выбора расположения и количества зарядных станций, расписания зарядки электробусов и распределения электробусов по депо при фиксированном наборе последовательностей сервисных рейсов. Фиксированному z соответствует набор из $\eta(z)$ упорядоченных подмножеств (последовательностей) $I_v(z) = \{j_{v,1}, j_{v,2}, \dots, j_{v,l}, \dots, j_{v,\bar{l}_v}\}$, $l = 1, 2, \dots, \bar{l}_v$, сервисных рейсов, выполняемых электробусами $v \in V(z) = \{v_1, v_2, \dots, \eta(z)\}$. Последовательность $I_v(z)$ однозначно определяет для каждой пары $j_{v,l}, j_{v,l+1}$ смежных сервисных рейсов наличие порожнего рейса (при $a_{j_{v,l+1}} \neq b_{j_{v,l}}$) либо его отсутствие (при $a_{j_{v,l+1}} = b_{j_{v,l}}$), $l \in \{1, 2, \dots, \bar{l}_v - 1\}$. В дальнейшем z считается фиксированным и опущено для краткости изложения.

Сформируем общую последовательность $\pi_v = (\pi_{v,1}, \pi_{v,2}, \dots, \pi_{v,k}, \dots, \pi_{v,\bar{k}_v})$ сервисных и порожних рейсов, выполняемых электробусами $v \in V$, $k = 1, 2, \dots, \bar{k}_v$. Напомним, что первый рейс $\pi_{v,1}$ последовательности π_v является порожним из некоторого стартового депо $d_v^s \in D$, а последний рейс π_{v,\bar{k}_v} – также порожним в некоторое финишное депо $d_v^f \in D$.

Каждый рейс $\pi_{v,k}$ последовательности π_v для электробусов $v \in V$, $k = 1, \dots, \bar{k}_v - 1$ предшествует терминалу $\theta_{v,k}$ с опцией (возможно, пустой) зарядки $(v, k) \in K_v = \{(v, k) | k = 1, \dots, \bar{k}_v - 1\}$. Обозначим $tt(k) \in I \cup DH$ тип рейса $\pi_{v,k}$ в последовательности π_v . Если $tt(k) \in I$, то рейс $\pi_{v,k}$ является сервисным $j_{v,l(k)}$ с номером $l(k)$ в последовательности I_v , предшествующим терминалу $\theta_{v,k} = b_{j_{v,l(k)}}$. Если $tt(k) \in DH$, то $\pi_{v,k}$ является порожним, связывающим конечный терминал $b_{j_{v,l(k-1)}}$ предшествующего сервисного рейса $\pi_{v,k-1} = j_{v,l(k-1)}$ с номером $l(k-1)$ в последовательности I_v со стартовым терминалом $a_{j_{v,l(k-1)+1}}$ очередного сервисного рейса $\pi_{v,k+1} = j_{v,l(k-1)+1}$. Порожнему рейсу $\pi_{v,k}$ соответствуют его длительность $\gamma_{j_{v,l(k-1)}, j_{v,l(k-1)+1}}$ и величина $g_{j_{v,l(k-1)}, j_{v,l(k-1)+1}}$ заряда для его выполнения.

В промежутках между соседними сервисными рейсами $j_{v,l}, j_{v,l+1}$, $l = 1, 2, \dots, \bar{l}_v - 1$, выполняемыми электробусом $v \in V$, а также перед первым и после последнего сервисных рейсов может выполняться зарядка его батареи на зарядных станциях терминалов в диапазоне опции зарядки. Диапазоны $[\hat{A}_{v,k}, \hat{B}_{v,k}]$ опций зарядки (v, k) в терминале $\theta_{v,k}$, $k = 1, \dots, \bar{k}_v - 1$, $\theta_{v,k} \in \Theta$, определяются в зависимости от типов рейсов $k, k+1$ последовательности π_v :

- 1) если $tt(k), tt(k+1) \in I$ (порожний рейс отсутствует), то $[\hat{A}_{v,k}, \hat{B}_{v,k}] = [\beta_{j_{v,l(k)}}, \alpha_{j_{v,l(k)+1}}]$;
- 2) если $tt(k) \in I, tt(k+1) \in DH$, то $[\hat{A}_{v,k}, \hat{B}_{v,k}] = [\beta_{j_{v,l(k)}}, \alpha_{j_{v,l(k)+1}} - \gamma_{j_{l(k)}, j_{l(k)+1}}]$, $[\hat{A}_{v,k+1}, \hat{B}_{v,k+1}] = [\beta_{j_{v,l(k)}} + \gamma_{j_{l(k)}, j_{l(k)+1}}, \alpha_{j_{v,l(k)+1}}]$;
- 3) $[\hat{A}_{v,1}, \hat{B}_{v,1}] = [\alpha_{j_{v,1}} - \tau_{\max}, \alpha_{j_{v,1}}]$, $[\hat{A}_{v,\bar{k}_v-1}, \hat{B}_{v,\bar{k}_v-1}] = [\beta_{j_{v,\bar{k}_v-1}}, \beta_{j_{v,\bar{k}_v-1}} + \tau_{\max}]$.

Управляемые переменные:

$S_{c,v,k} \geq 0$ – момент начала события зарядки на зарядной станции $c \in C_{\theta_{v,k}}$ для $(v, k) \in K_v, v \in V$;

$F_{c,v,k} \geq 0$ – момент завершения события зарядки на зарядной станции $c \in C_{\theta_{v,k}}, v \in V$ для $(v, k) \in K_v, v \in V$;

$t_{c,v,k} \geq 0$ – длительность события зарядки на зарядной станции $c \in C_{\theta_{v,k}}$ для $(v, w) \in K_v, v \in V$;

$y_{c,v,k} \in \{0,1\}$ – булева переменная, принимающая значение 1 тогда и только тогда, когда $t_{c,v,k} > 0, c \in C_{\theta_{v,w}}$ для $(v, k) \in K_v, v \in V$;

$\underline{u}_{v,k}$ – уровень заряда электробуса v перед k -й опцией (v,k) зарядки для $\pi_v, k=1, \dots, \bar{k}_v$ ($\underline{u}_{v,\bar{k}_v}$ – при приходе в депо d_v^f), $v \in V$;

$\bar{u}_{v,k}$ – уровень заряда электробуса v после k -й опции (v,w) зарядки для $\pi_v, k=1, \dots, \bar{k}_v-1$;

$x_{v,d,j_{v,1}} \in \{0,1\}$ – булева переменная, принимающая значение 1, если электробус $v \in V$ выполняет первый порожний рейс своего дневного задания из стартового депо $d \in D$ в начальный терминал $a_{j_{v,1}}$ первого сервисного рейса $j_{v,1}$;

$x_{v,j_{v,\bar{j}_v},d} \in \{0,1\}$ – булева переменная, принимающая значение 1, если электробус $v \in V$ выполняет последний порожний рейс своего дневного задания из конечного терминала $b_{j_{v,\bar{j}_v}}$ последнего сервисного рейса j_{v,\bar{j}_v} в депо $d \in D$;

$\sigma_{\theta,c} \in \{0,1\}$ – булева переменная, принимающая значение 1, если $\sum_{(v,k) \in Q_{\theta}} y_{c,v,k} > 0$ для $c \in C_{\theta}$, иначе 0;

μ_{θ} – целое число зарядных станций терминала $\theta, \theta \in \Theta$.

Обозначим через $\mu(z), t(z), y(z), S(z), F(z), u(z), x(z)$ векторы значений переменных μ, t, y, S, F, u, x при фиксированном наборе z подмножеств сервисных рейсов, $z \in Z$.

Подзадача нижнего уровня заключается в отыскании векторов $\mu(z)$ количеств зарядных станций в терминалах $\theta \in \Theta$, длительностей $t(z)$ зарядки всех электробусов v для всех опций (v, k) зарядки, $k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v-1\}, v \in V$ в соответствующих терминалах $\theta_{v,k}$, моментов $S(z)$ старта и моментов $F(z)$ завершения этих событий зарядки, уровней $u(z)$ заряда электробуса $v \in V$ перед и после каждой опции зарядки, а также стартового d_v^s и финишного d_v^f депо для каждого $v \in V$, минимизирующих целевую функцию $\Phi(\mu(z), t(z), y(z), S(z), F(z), u(z), x(z))$ при выполнении системы ограничений. Описание целевой функции и ограничений приведено ниже.

Целевая функция подзадачи нижнего уровня. Целевая функция (1) представляет общие суточные затраты на зарядные станции и потраченную электроэнергию при фиксированном z . Суточные инвестиционные и операционные затраты на зарядные станции определяются суммой произведений суточных затрат c^{ch} на одну станцию на количество $\mu_{\theta}(z)$ зарядных станций каждого из терминалов $\theta \in \Theta$. Суточные затраты на электроэнергию электробусов парка выражаются произведением дневного тарифа c^{el} на величину $\sum_{\theta \in \Theta} \sum_{(v,k) \in Q_{\theta_{v,k}}(z)} \sum_{c \in C_{\theta_{v,k}}} P \cdot t_{c,v,k}(z)$ электроэнергии, потребленной электробусами $v \in V(z)$ для опций событий зарядки из множеств $Q_{\theta}(z)$ на зарядных станциях $c \in C_{\theta}$ терминалов $\theta \in \Theta$:

$$\min \Phi(\mu(z), t(z), y(z), S(z), F(z), u(z), x(z)) = \sum_{\theta \in \Theta} c^{ch} \mu_{\theta}(z) + c^{el} \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{(v,k) \in Q_{\theta_{v,k}}(z)} \sum_{c \in C_{\theta_{v,k}}} P \cdot t_{c,v,k}(z). \quad (1)$$

Ограничения (параметр z для краткости опущен). Условия для инфраструктуры зарядных станций терминала определяются формулами

$$\mu_0 = \sum_{c \in C_\theta} \sigma_{\theta,c}, \theta \in \Theta, \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta,c} \leq \sum_{(v,k) \in Q_\theta} y_{c,v,k}, c \in C_\theta, \theta \in \Theta, \quad (3)$$

$$0 \leq |Q_\theta| \cdot \sigma_{\theta,c} - \sum_{(v,k) \in Q_\theta} y_{c,v,k}, c \in C_\theta, \theta \in \Theta, \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta,c+1} \leq \sigma_{\theta,c}, c, c+1 \in C_\theta, \theta \in \Theta, \quad (5)$$

$$\mu_0 \leq |C_\theta|, \theta \in \Theta. \quad (6)$$

Условия (2)–(6) обеспечивают равенство значения параметра μ_0 числу используемых зарядных станций терминала θ , не превосходящему предельно допустимого $|C_\theta|$, и исключают наличие неиспользуемых зарядных станций. Ограничения (3), (4) обеспечивают значения булевой переменной $\sigma_{\theta,c}$ равными 1, только если зарядная станция с номером c используется для выполнения опций зарядки электробуса. Из ограничения (5) следует, что исключается учет неиспользуемых зарядных станций. Согласно ограничению (6) число используемых зарядных станций не может превышать предельно допустимого числа $|C_\theta|$.

Условия баланса уровней заряда определяются следующим образом:

$$\underline{u}_{v,k+1} = \bar{u}_{v,k} - g_{j_v, l(k+1)}, tt(k+1) \in I, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v - 2\}, v \in V, \quad (7)$$

$$\underline{u}_{v,k+1} = \bar{u}_{v,k} - g_{j_v, l(k), j_v, l(k)+1}, tt(k+1) \in DH, k \in \{2, \dots, \bar{k}_v - 3\}, v \in V, \quad (8)$$

$$\underline{u}_{v,1} = \bar{u}_{v,0} - \sum_{d \in D} x_{v,d,j_v,1} g_{d,j_v,1}, tt(1) \in DH, v \in V, \quad (9)$$

$$\underline{u}_{v,\bar{k}_v} = \bar{u}_{v,\bar{k}_v-1} - \sum_{d \in D} x_{v,j_v,\bar{k}_v,d} g_{j_v,\bar{k}_v,d}, tt(\bar{k}_v) \in DH, v \in V, \quad (10)$$

$$\bar{u}_{v,0} = u_{max}, v \in V, \quad (11)$$

$$\bar{u}_{v,k} = \underline{u}_{v,k} + \sum_{c \in C_{\theta_v,k}} f \cdot t_{c,v,k}, tt(k) \in I \cup DH, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, v \in V. \quad (12)$$

Условия (7)–(12) обеспечивают баланс значений уровня заряда электробуса при приходе в терминал (либо финишное депо) и соответствующих значений при выходе из предыдущего терминала (либо из начального депо) с учетом потерь заряда в сервисных либо порожних рейсах и восстановления заряда при зарядках на следующих за рейсами терминалах. При этом уравнения (7) определяют уровень заряда при приходе в конечный терминал любого сервисного рейса как разность между уровнем заряда при выходе из начального терминала и затратами заряда на выполнение рейса, а уравнения (8) – при приходе в начальный терминал очередного сервисного рейса после текущего порожнего рейса за исключением начального ($k = 1$) и последнего ($k = \bar{k}_v$) порожних рейсов. Условия (9) устанавливают уровень заряда при приходе в начальный терминал первого сервисного рейса после выполнения первого порожнего рейса из стартового депо, а условие (10) – уровень заряда при приходе в финишное депо из конечного терминала последнего сервисного рейса. Условия (11) обеспечивают максимальный уровень заряда электробуса при выходе из стартового депо в начале выполнения его дневного задания. Условия (12) устанавливают уровень заряда при выходе из любого терминала равным уровню заряда при приходе в этот терминал, увеличенному на величину заряда, полученного при зарядке на этом терминале.

Ограничения допустимого диапазона уровней заряда:

$$\bar{u}_{v,k} \leq u_{max}, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, v \in V, \quad (13)$$

$$u_{min} \leq \underline{u}_{v,k}, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v\}, v \in V. \quad (14)$$

Ограничения (13) препятствуют превышению максимально допустимого значения уровня заряда электробуса после любой опции зарядки. Ограничения (14) препятствуют снижению уровня относительного заряда ниже минимально допустимой величины после выполнения любого рейса дневного задания.

Условия для моментов начала, завершения и длительностей опции зарядки определяются формулами

$$t_{cmin} y_{c,v,k} \leq t_{c,v,k} \leq y_{c,v,k} \cdot \tau_{max}, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, c \in C_{\theta_{v,k}}, v \in V, \quad (15)$$

$$\hat{A}_{v,k} y_{c,v,k} \leq S_{c,v,k}, tt(k) \in I \cup DH, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, c \in C_{\theta_{v,k}}, v \in V, \quad (16)$$

$$\sum_{c' \in C_{\theta_{v,k}}} F_{c',v,k} + \gamma_{j_1(k), j_1(k)+1} \leq \sum_{c'' \in C_{\theta_{v,k+1}}} S_{c'',v,k+1} + 24(1 - \sum_{c'' \in C_{\theta_{v,k+1}}} y_{c'',v,k+1}), tt(k+1) \in DH, k \in \{2, \dots, \bar{k}_v - 3\}, v \in V, \quad (17)$$

$$F_{c,v,k} = S_{c,v,k} + t_{c,v,k} + \Delta y_{c,v,k}, tt(k) \in I \cup DH, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, c \in C_{\theta_{v,k}}, v \in V, \quad (18)$$

$$F_{c,v,k} \leq \hat{B}_{v,k} y_{c,v,k}, tt(k) \in I \cup DH, k \in \{1, 2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, c \in C_{\theta_{v,k}}, v \in V, \quad (19)$$

$$(F_{c,v,k} \leq S_{c,v',k'}) \vee (F_{c,v',k'} \leq S_{c,v,k}), [\hat{A}_{v,k}, \hat{B}_{v,k}] \cap [\hat{A}_{v',k'}, \hat{B}_{v',k'}] \neq \emptyset, c \in C_{\theta}, (v, k), (v', k') \in Q_{\theta}, \quad (v, k) \neq (v', k'), \theta \in \Theta, \quad (20)$$

$$\sum_{c \in C_{\theta}} y_{c,v,k} \leq 1, (v, k) \in Q_{\theta}, \theta \in \Theta. \quad (21)$$

Ограничения (15) обеспечивают значение длительности зарядки электробуса для любой опции зарядки равным либо 0, если оно меньше минимально допустимого, либо величине из интервала между минимально допустимой и максимальной длительностями зарядки. Ограничения (16) обеспечивают начало зарядки электробуса на любом терминале после любого рейса не ранее момента прибытия в терминал. Ограничения (17) обеспечивают начало зарядки после порожнего рейса, следующего за сервисным рейсом, не ранее момента завершения зарядки на конечном терминале предыдущего сервисного рейса, увеличенного на величину длительности порожнего рейса. Таким образом, ограничения (16), (17) гарантируют допустимость начала зарядки после порожнего рейса и препятствуют пересечению событий зарядки одного электробуса на двух зарядных станциях различных терминалов. Условия (18) устанавливают равенство момента завершения события зарядки после любого рейса моменту начала зарядки, увеличенному на суммарную длительность зарядки и операции настройки. Ограничения (19) обеспечивают завершение зарядки не позднее верхней границы допустимого интервала опции зарядки. При отсутствии зарядки после сервисного рейса значения моментов начала и окончания зарядки равны 0. При отсутствии зарядки после порожнего рейса значения моментов начала и окончания зарядки совпадают и превышают момент завершения зарядки предыдущей опции. Ограничения (20) обеспечивают отсутствие пересечения по времени различных опций зарядки различных электробусов на одной зарядной станции терминала для пересекающихся допустимых временных интервалов для этих опций. Ограничения (21) устанавливают, что любая опция зарядки может выполняться не более чем на одной станции зарядки.

Балансовые условия для количеств электробусов в различных депо:

$$\sum_{d \in D} x_{v,j_v,i_v,d} = 1, v \in V, \quad (22)$$

$$\sum_{d \in D} x_{v,d,j_{v,1}} = 1, v \in V, \quad (23)$$

$$\sum_{v \in V} x_{v,d,j_{v,1}} - \sum_{v \in V} x_{v,j_{v,j_v},d} = 0, d \in D. \quad (24)$$

Уравнения (22)–(24) устанавливают распределение электробусов по депо в начале дня перед выполнением ими дневных заданий и после возвращения в депо в конце дня. Уравнения (22) обеспечивают возвращение каждого электробуса в одно депо, уравнения (23) – старт каждого электробуса из одного депо в начале дня, уравнения (24) – баланс количества вышедших утром и количества вернувшихся после выполнения задания для каждого депо. При этом стартовое и финишное депо одного и того же электробуса могут не совпадать.

Ограничения (25)–(36) задают область значений переменных задачи:

$$0 \leq t_{c,v,k}, c \in C_\theta, (v, k) \in Q_\theta, \theta \in \Theta, v \in V, \quad (25)$$

$$S_{c,v,k} \in [0, \hat{B}_{v,k} - \Delta - tc_{\min}], c \in C_{\theta_{v,k}}, tt(k) \in I, k \in \{2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, v \in V, \quad (26)$$

$$S_{c,v,k+1} \in [0, \hat{B}_{v,k+1} - \gamma_{j_{l(k)}, j_{l(k)+1}} - \Delta - tc_{\min}], c \in C_{\theta_{v,k+1}}, tt(k+1) \in DH, k \in \{3, \dots, \bar{k}_v - 3\}, v \in V, \quad (27)$$

$$F_{c,v,k} \in [0, \hat{B}_{v,k}], c \in C_{\theta_{v,k}}, tt(k) \in I, k \in \{2, \dots, \bar{k}_v - 1\}, v \in V, \quad (28)$$

$$F_{c,v,k+1} \in [0, \hat{B}_{v,k+1}], c \in C_{\theta_{v,k+1}}, tt(k+1) \in DH, k \in \{3, \dots, \bar{k}_v - 3\}, v \in V, \quad (29)$$

$$F_{c,v,1} \in [0, \alpha_{j_{v,1}}], c \in C_{\theta_{v,1}}, tt(1) \in DH, v \in V, \quad (30)$$

$$F_{c,v,\bar{k}_v-1} \in [0, \beta_{j_{v,\bar{l}_v}} + \tau_{\max}], c \in C_{\theta_{v,\bar{l}_v}}, tt(\bar{k}_v-1) \in I, v \in V, \quad (31)$$

$$y_{c,v,k} \in \{0, 1\}, c \in C_\theta, (v, k) \in Q_\theta, \theta \in \Theta, v \in V, \quad (32)$$

$$x_{v,d,i} \in \{0, 1\}, i \in I_v, d \in D, v \in V, \quad (33)$$

$$x_{v,j,d} \in \{0, 1\}, j \in I_v, d \in D, v \in V, \quad (34)$$

$$\sigma_{\theta,c} \in \{0, 1\}, c \in C_\theta, \theta \in \Theta, \quad (35)$$

$$\mu_\theta - \text{целое число}, \theta \in \Theta. \quad (36)$$

Обозначим $\Phi^*(z)$ минимальное значение целевой функции подзадачи нижнего уровня при фиксированном наборе $z \in Z$. Положим $\Phi^*(z) = \infty$, если подзадача нижнего уровня для z неразрешима.

3.2. Подзадача верхнего уровня. Эвристический алгоритм выбора набора подмножеств сервисных рейсов. Общие суточные инвестиционные и операционные затраты на электробусы, зарядную инфраструктуру и электроэнергию при фиксированном z имеют вид $\Omega(z) = c^{bus} \eta(z) + \Phi^*(z)$, где $\Phi^*(z)$ – минимальное значение целевой функции подзадачи нижнего уровня при фиксированном z . Задача верхнего уровня заключается в выборе набора $z^* \in Z$, минимизирующего суточные затраты $\Omega(z)$.

Предлагаются следующие варианты процедуры выбора подмножества сервисных рейсов для электробуса. Посредством каждой из описанных ниже процедур для каждого электробуса $v \in V$ в порядке возрастания индекса v формируется максимальное по включению упорядоченное подмножество $I_v = \{j_{v,1}, j_{v,2}, \dots, j_{v,\bar{l}_v}\}$ совместимых сервисных рейсов $j_{v,l} \in I, \beta_{j_{v,l}} + \gamma_{j_{v,l}, j_{v,l+1}} \leq \alpha_{j_{v,l+1}}, l = 1, 2, \dots, \bar{l}_v - 1$, назначаемых этому электробусу.

Каждый из вариантов 1–4 описываемой ниже процедуры отличается способом выбора для рассматриваемого электробуса очередного сервисного рейса. Процедура 1 ориентирована на минимизацию суммарной длительности интервалов между сервисными рейсами электробуса

с целью увеличения количества выполняемых им сервисных рейсов. Процедура 2 минимизирует взвешенную комбинацию дневных затрат на электробус и потраченную им в порожних рейсах электроэнергию. Процедуры 3 и 4 являются рандомизированными аналогами в заданной окрестности минимального значения для процедур 1 и 2 соответственно.

Используемые обозначения:

I^c – текущее подмножество нераспределенных сервисных рейсов;

i^c – текущий сервисный рейс, распределяемый электробусу;

I_v^c – текущее подмножество I_v ;

R_θ^- – доступный ресурс заряда в терминале $\theta \in \{b_i, a_j \mid i, j \in I^c\}$ перед возможной зарядкой в θ ;

R_θ^+ – доступный ресурс заряда в терминале $\theta \in \{b_i, a_j \mid i, j \in I^c\}$ после возможной зарядки в θ ;

$D_{i^c}^-$ – подмножество депо из D . Для каждого $d \in D_{i^c}^-$ заряд g_{d,i^c} , потраченный в порожнем рейсе из депо d в начальный терминал a_{i^c} , не может быть восстановлен на этом терминале вследствие условия $g_{d,i^c} < f \cdot tc_{min}$;

E_θ – доступная величина заряда при возможной зарядке в θ , $E_\theta \geq 0$;

g_i – заряд, требуемый для выполнения сервисного рейса i ;

γ_{ij} – длительность порожнего рейса из терминала b_i после рейса i в терминал a_j рейса j ;

g_{ij} – заряд, требуемый для выполнения порожнего рейса из терминала b_i после рейса i в терминал a_j рейса j ;

$H(x) = 0$ при $x < 0$ и 1 при $x \geq 0$ – ступенчатая функция Хэвисайда;

$\text{sgn}(x) = -1$ при $x < 0$, 0 при $x = 0$ и 1 при $x \geq 0$.

Процедура 1. Выбор очередного сервисного рейса осуществляется по принципу минимизации допустимого момента $\alpha^* = \min\{\alpha_j \mid j \in I^c\}$ времени начала этого рейса. При наличии нескольких сервисных рейсов с минимальным значением момента начала выбор среди них осуществляется равновероятно.

Процедура 2. Выбор очередного сервисного рейса осуществляется по принципу минимизации величины $\delta_{ij}^* = \min\{\alpha_j + \lambda\gamma_{ij} \mid j \in I^c\}$ (суммы момента времени α_j начала следующего сервисного рейса j и длительности γ_{ij} порожнего рейса с весовым коэффициентом λ , соединяющего его с предыдущим сервисным рейсом i).

Процедура 3. Выбор очередного сервисного рейса осуществляется равновероятно из окрестности $[\alpha^*, \alpha^* + \varepsilon]$ в множестве I^c минимального значения α^* момента начала сервисных рейсов, где $\varepsilon > 0$ – заданный параметр.

Процедура 4. Выбор очередного сервисного рейса осуществляется равновероятно из окрестности $[\delta_{ij}^*, \delta_{ij}^* + \varepsilon]$ величины δ_{ij}^* в множестве I^c , где $\varepsilon > 0$ – заданный параметр.

Задано текущее множество нераспределенных сервисных рейсов $I^c \neq \emptyset$ ($I^c = I$ для $v = v_1$).

Эвристический алгоритм определения подмножества I_v сервисных рейсов для $v \in V$:

Шаг 0. Полагаем $I_v^c = \emptyset$.

Шаг 1. Выбор первого сервисного рейса для электробуса v .

Если $I^c = \emptyset$, то конец (I_v^c – решение). Иначе, если $I^c \neq \emptyset$, выбираем первый сервисный рейс $i^* = j_{v,1}$ согласно одной из процедур 1–4. Переход к шагу 2.

Шаг 2. Проверка допустимости первого сервисного рейса.

Если $R_{a_{i^c}}^+ = u_{\max} - u_{\min} - \max_{d \in D_{i^c}^-} g_{d,i^*} - g_{i^*} \geq 0$, то полагаем $i^c = i^*$, $I_v^c = \{i^c\}$, $R_{a_{i^c}}^+ = u_{\max} - u_{\min} - \max_{d \in D_{i^c}^-} g_{d,i^c}$.

Определяем $R_{b_{i^c}}^- = R_{a_{i^c}}^+ - g_{i^c} \geq 0$. Полагаем $I^c = I^c \setminus \{i^c\}$. Переход к шагу 3.

Иначе, если $R_{a_{i^c}}^+ = u_{\max} - u_{\min} - \max_{d \in D_{i^c}^-} g_{d,i^*} - g_{i^*} < 0$, то i^* – недопустимый рейс. Полагаем $I^c = I^c \setminus \{i^*\}$.

Переход к шагу 1.

Шаг 3. Выбор очередного сервисного рейса $j_{v,l} \in I^c$, $l = 2, \dots, \bar{l}_v$ для текущего v .

Если $I^c = \emptyset$, то конец (I_v^c – решение). Иначе для i^c ищем очередной сервисный рейс $j^* \in I^c$ согласно одной из процедур 1–4 при выполнении условия допустимости

$$R_{b_{i^c}}^- + H(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c, j^*} - \Delta - tc_{min}) \cdot f \cdot (\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c, j^*} - \Delta) \geq g_{i^c, j^*} + g_j. \quad (37)$$

Шаг 3.1. Если j^* найден, то полагаем $E_{b_{i^c}} = \min \{u_{max} - u_{min} - R_{b_{i^c}}^-; H(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c, j^*} - \Delta - tc_{min}) \cdot f \cdot (\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c, j^*} - \Delta)\}$, $R_{b_{i^c}}^+ = R_{b_{i^c}}^- + E_{b_{i^c}}$.

Определяем $R_{a_{j^*}}^- = R_{b_{i^c}}^+ - g_{i^c, j^*}$, $E_{a_{j^*}} = \min \{u_{max} - u_{min} - R_{a_{j^*}}^-; H(\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c, j^*} - \frac{E_{b_{i^c}}}{f} - \Delta \cdot \text{sgn}(E_{b_{i^c}}) - \Delta - tc_{min}) \cdot f \cdot (\alpha_{j^*} - \beta_{i^c} - \gamma_{i^c, j^*} - \frac{E_{b_{i^c}}}{f} - \Delta \cdot \text{sgn}(E_{b_{i^c}}) - \Delta)\}$, $R_{a_{j^*}}^+ = R_{a_{j^*}}^- + E_{a_{j^*}}$, $R_{b_{j^*}}^- = R_{a_{j^*}}^+ - g_{j^*}$.

Полагаем $I^c = I^c \setminus \{j^*\}$, $I_v^c = I_v^c \cup \{j^*\}$, $i^c = j^*$. Переход к шагу 3.

Шаг 3.2. Иначе (если j^* не найден) полагаем $I^c = I^c \setminus \{j^*\}$. Переход к шагу 3.

Замечание. Если в результате выполнения алгоритма $I_v^c = \emptyset$, то электробус v не используется. В этом случае $I_0^c = \emptyset$ для всех $v \leq o \leq \eta(z)$.

Если при завершении работы алгоритма $I^c \neq \emptyset$, то допустимое решение задачи не найдено.

4. Результаты численных экспериментов для реального примера г. Минска.

4.1. Реальный пример г. Минска. Рассматривается набор из 12 маршрутных линий г. Минска перевозки пассажиров в прямом и обратном направлениях, начинающихся и заканчивающихся в одном из девяти терминалов: ДС Дружная (*Др*), ДС Кунцевщина (*Кунц*), ДС Серова (*Сер*), ДС Курасовщина (*Кур*), ж.-д. станция Минск-Южный (*М-Ю*), ДС Малиновка-4 (*Мал-4*), ДС Масюковщина (*Масюк*), ж.-д. станция Брилевичи (*Брил*), Колядичи (*Коляд*). Используются также два депо: Транспортный парк 2 (*ТП2*) и Автобусный парк 5 (*АП5*) для размещения электробусов и их подзарядки в ночное время (Справочник маршрутов Минска, URL: <https://wikiroutes.info/minsk/catalog>).

Парк электробусов состоит из идентичных электробусов Е420 производства ОАО «Белкоммунмаш», Минск (БКМ Холдинг, URL: <https://holdingbkm.com>), оборудованных аккумуляторной батареей емкостью $E = 48$ кВт·ч. Допустимый диапазон значений уровня заряда составляет $[0,3, 1]$. Терминалы оборудуются идентичными зарядными станциями быстрой зарядки СЗА-1 номинальной мощностью $P = 288$ кВт. Кривая функции уровня заряда от времени зарядки аппроксимируется в допустимом диапазоне линейной функцией изменения заряда с постоянной скоростью $f = 6$ е.з./ч (0,1 е.з./мин), из чего следует, что для зарядки от уровня заряда 0,3 до 1 требуется $\tau^{\max} = 0,1167$ ч (7 мин). Время Δ выполнения настройки электробуса на зарядку, как и минимальная длительность tc_{min} зарядки, составляет 0,0167 ч (1 мин). Удельный расход электроэнергии электробусов парка в сервисных рейсах составляет 1,6 кВт·ч/км (или в единицах относительного заряда 0,0333 е.з./км), в порожних рейсах 1,2 кВт·ч/км (или 0,025 е.з./км) соответственно. Средняя скорость движения электробуса в сервисном рейсе меняется в диапазоне 16–25 км/ч в зависимости от характеристик маршрута, средняя скорость движения электробуса в порожнем рейсе составляет 32 км/ч. Годовая стоимость СЗА-1 составляет 37 060 евро (далее все стоимости и значения целевой функции измеряются в евро). Общие капитальные и операционные годовые затраты на электробусы Е420 [5] составляют 53 000. Дневной тариф на электроэнергию составляет 0,195 (евро/кВт·ч).

Дневной период работы транспорта г. Минска разбивается на две категории: часы пик (с 7:00 до 10:00 и с 16:00 до 19:00) и непииковые часы (с 5:00 до 7:00, с 10:00 до 16:00 и с 19:00 до 24:00), характеризующиеся различными частотами выхода электробуса на маршрут (частота для часов пик превышает более чем в два раза частоту для непииковых часов). Поправочный коэффициент для оценки потребленной электроэнергии электробусами парка в течение дня по

отношению к интервалу с 7:00 до 10:00 с учетом различия частот прихода электробусов в терминалы принят равным 4,17.

В табл. 1 приведены характеристики набора из 112 сервисных рейсов в представительном интервале «часы пик» с 7:00 до 10:00 (государственное предприятие «Минсктранс», URL: <https://www.minsktrans.by>; Справочник маршрутов Минска). В табл. 2–4 приведены характеристики порожних рейсов между терминалами маршрутов, между депо и стартовыми терминалами сервисных рейсов, а также между конечными терминалами сервисных рейсов и депо, включая расстояние (км), длительность (мин) и количество единиц относительного заряда (е.з.), необходимых для выполнения рейсов.

Таблица 1
Характеристики сервисных рейсов, обслуживаемых электробусами

Table 1
Characteristics of service trips, served by electric buses

Терминал 1– терминал 2 <i>Term.1–term.2</i>	Расстояние, км <i>Distance, km</i>	Длительность, мин <i>Duration, min</i>	Расход заряда, е.з. <i>Charge consumption, с.и.</i>	Период, ч:мин <i>Period, h:min</i>	Интервал, мин <i>Interval, min</i>
Др–М.-Ю.	4,7	18	0,16	7:00–10:00	30
М.-Ю. –Др	5,1	22	0,17	7:30–10:30	30
Др–Мал-4	13	38	0,43	7:00–10:00	20
Мал-4 –Др	13	42	0,43	7:20–10:20	20
Др–Брил	8,5	30	0,27	7:00–9:55	25
Брил–Др	8,2	29	0,28	7:00–9:55	25
Кунц –Кур	15,18	32	0,51	7:00–10:00	15
Кур–Кунц	15,52	33	0,52	7:00–10:00	15
Кур–Коляд	8,7	21	0,29	7:00–10:00	20
Коляд–Кур	9,67	24	0,32	7:00–10:00	20
Сер–Масюк	20,53	69	0,68	7:00–9:55	25
Масюк–Сер	20,81	70	0,69	7:00–9:55	25

Таблица 2
Характеристики порожних рейсов между терминалами

Table 2
Characteristics of deadhead trips between terminals

Терм. <i>Term.</i>	Др	Кунц	Сер	Кур	М.-Ю.	Мал-4	Масюк	Брил	Коляд
Др	–	10,4/19/0,26	5,5/10/0,14	7,7/14/0,19	4,7/9/0,12	9,3/17/0,23	11,6/21/0,29	8,5/16/0,21	11,4/21/0,29
Кунц	9,8/18/0,25	–	14,4/27/0,36	16,4/31/0,41	14/26/0,35	8,4/16/0,21	5,1/10/0,13	11,7/22/0,29	20,6/39/0,52
Сер	5,4/10/0,14	14,2/27/0,36	–	5,5/10/0,14	4/8/0,1	13/24/0,32	12,7/24/0,32	9,7/18/0,24	11,1/21/0,28
Кур	7,8/14/0,2	16,1/30/0,4	3,2/7/0,08	–	6,7/12/0,17	8,6/16/0,22	12,7/24/0,32	5,2/10/0,13	8,7/16/0,22
М.-Ю.	5,1/9/0,13	14,5/27/0,36	5,7/10/0,14	8,3/16/0,21	–	13,1/25/0,33	12,9/24/0,32	12,4/23/0,31	8/15/0,2
Мал-4	10,6/20/0,26	14,4/27/0,36	13,6/25/0,34	8,8/16/0,22	12,5/23/0,31	–	11,8/22/0,3	5,8/11/0,15	15,7/29/0,39
Масюк	8,1/15/0,2	4/8/0,1	12,3/23/0,3	12,4/23/0,31	11,2/21/0,28	11,4/21/0,29	–	13,2/25/0,33	19,3/36/0,48
Брил	8,2/15/0,2	11,8/22/0,3	7/13/0,18	4/8/0,1	10,7/20/0,27	4,9/9/0,12	11,5/21/0,29	–	10,9/20/0,27
Коляд	11,5/22/0,29	14,2/27/0,36	5,3/10/0,13	2,5/4,7/0,06	9,1/17/0,23	7,7/14/0,19	18,8/35/0,47	11,7/22/0,29	–

Таблица 3
Характеристики порожних рейсов между депо и терминалами

Table 3
Characteristics of deadhead trips between depots and terminals

	Др	Кунц	Сер	Кур	М.-Ю.	Мал-4	Масюк	Брил	Коляд
ТП2	4,7/9/0,12	13,6/25/0,34	4,7/9/0,12	7,6/14/0,19	2,86/5/0,07	14,5/27/0,36	11,1/21/0,28	11,6/22/0,29	9,9/19/0,25
АП5	5,8/11/0,14	7,3/14/0,18	8,4/16/0,21	8,6/16/0,21	7,4/14/0,18	5,3/10/0,13	5,6/10/0,14	6,6/12/0,17	14,9/28/0,37

Таблица 4
Характеристики порожних рейсов из терминалов в депо

Table 4
Characteristics of deadhead trips from terminals to depots

	Др	Куцц	Сер	Кур	М.-Ю.	Мал-4	Масюк	Брил	Коляд
ТПЗ	4,8/9/0,12	14,4/27/0,36	4,5/9/0,12	7/13/0,18	3,2/8/0,08	12,8/24/0,32	11,4/21/0,28	11,2/21/0,28	9,4/17/0,24
АПЗ	5,4/10/0,13	8,9/17/0,22	8,4/16/0,21	8,6/16/0,21	8,8/17/0,22	5,6/13/0,14	6,1/11/0,15	6,3/12/0,16	15,4/29/0,39

4.2. Результаты численных экспериментов. Для оценки работоспособности предложенной двухуровневой декомпозиционной схемы решения задачи выполнены две серии численных экспериментов для описанного выше примера г. Минска. В первой серии для решения подзадачи верхнего уровня использовались эвристические рандомизированные процедуры 1–4 (для процедуры 2 весовой коэффициент $\lambda=0,25$) назначения электробусам сервисных рейсов при предельном числе итераций 10 000, максимальном числе итераций без улучшения целевой функции 1000 и максимальном времени решения задачи 600 с. Для решения подзадач нижнего уровня использовалась некоммерческая версия универсального решателя задач СЦПП Gurobi 9.5.1. Эксперименты выполнялись на стандартном ПК с процессором Intel Core i7 (1.8 ГГц) и 16 Гб оперативной памяти. В табл. 5 приведены результаты этих экспериментов.

В табл. 5 и 6 использованы следующие сокращения: *ObjOpt* – оптимальное значение целевой функции, *#Bus* – количество использованных электробусов, *#Char* – общее количество использованных зарядных станций на терминалах, *Char_Time* – общая длительность зарядки электробусов в представительном интервале, *Bus_Cost* – общая суточная стоимость электробусов, *Char_Cost* – общая суточная стоимость зарядных станций, *En_Cost* – общая суточная стоимость потраченной электроэнергии, *CPU* – время решения задачи (с), *#Iter* – общее число выполненных итераций, *It_opt* – номер итерации, на которой было получено решение.

Таблица 5
Результаты решения задачи с использованием эвристических процедур 1–4 назначения электробусов на сервисные рейсы

Table 5
Results of solving the problem using heuristic procedures 1–4 for assigning electric buses to service trips

Характеристика Characteristic	Процедура 1 Procedure 1	Процедура 2 Procedure 2	Процедура 3 Procedure 3	Процедура 4 Procedure 4
<i>ObjOpt</i>	6863,4	6742,41	7087,36	7055,37
<i>#Bus</i>	31	31	34	33
<i>#Char</i>	8	8	6	7
<i>Char_Time</i>	6,6195	6,1028	6,58 258	6,63 258
<i>Bus_Cost</i>	4501,2	4501,2	4936,8	4791,6
<i>Char_Cost</i>	812	812	609	710,5
<i>En_Cost</i>	1550,2	1429,21	1541,56	1553,27
<i>CPU</i>	600,147	354,66	388,958	600,343
<i>#Iter</i>	2263	1580	1001	1391
<i>It_opt</i>	1557	580	1	1224

Во второй серии экспериментов при применении эвристических рандомизированных процедур 1–4 для решения подзадачи верхнего уровня исследовалась зависимость минимального количества использованных электробусов парка при ограничении на доступное суммарное количество зарядных станций на терминалах маршрутов. В каждом эксперименте предельное общее число итераций и число итераций без улучшения целевой функции составляло 3000, максимальное время решения экземпляра задачи – 600 с. Результаты этой серии экспериментов приведены в табл. 6, где символ – означает, что решение задачи не найдено.

Таблица 6
Зависимость минимального количества электробусов от количества доступных зарядных станций

Table 6
Dependence of the minimum number of electric buses on the number of available charging stations

#Char	Процедура 1 Procedure 1			Процедура 2 Procedure 2			Процедура 3 Procedure 3			Процедура 4 Procedure 4		
	#Bus	CPU	It _{opt}	#Bus	CPU	It _{opt}	#Bus	CPU	It _{opt}	#Bus	CPU	It _{opt}
8	32	129,9	1709	32	139,2	63	34	158,5	1	34	133,2	1387
7	33	116,0	461	32	124,3	142	34	148,7	1	34	200,7	737
6	33	104,9	1752	33	109,5	1791	–	118,9	0	36	128,6	891
5	–	100,3	–	–	110,6	–	–	–	–	–	101,4	–

Результаты экспериментов показали, что эвристическая процедура 2 превосходит процедуры 1, 3, 4 как по значению целевой функции, так и по времени получения решения. Минимальное число электробусов, необходимых для выполнения заданного множества сервисных рейсов, возрастает при сокращении суммарного количества доступных зарядных станций на терминалах.

Заключение. Разработаны математическая модель и декомпозиционная двухуровневая схема решения задачи оптимизации состава однородного парка электробусов, назначения электробусов на сервисные рейсы из заданного множества, мест размещения и количеств размещаемых на терминалах маршрутов идентичных зарядных станций, а также расписания зарядки на них в течение представительного интервала дня. Проведенные вычислительные эксперименты на примере транспортной сети г. Минска показали хорошую работоспособность предложенной модели для задачи средней размерности и выявили предпочтительную по эффективности эвристическую рандомизированную процедуру выбора назначения электробусов на сервисные рейсы. В дальнейшем целесообразно провести более масштабный эксперимент по исследованию эффективности предложенного подхода к решению исследуемой задачи большей размерности и сравнению его с другими подходами к ее решению. Интерес представляет расширение предложенного подхода на нелинейные зависимости уровня заряда от времени зарядки, более точно отражающие реальный процесс, а также рассмотрение парка разнотипных электробусов и зарядной инфраструктуры на базе разнотипных зарядных станций различной мощности.

Вклад авторов. М. Я. Ковалев предложил постановку задачи выбора парка электробусов, назначения наборов сервисных рейсов электробусам парка, их зарядной инфраструктуры и расписаний зарядки. Им выполнена верификация предложенных математической модели, декомпозиционной схемы и методов решения подзадач, а также редактирование статьи. Н. Н. Гуцинский предложил схему декомпозиции рассматриваемой задачи и эвристический рандомизированный алгоритм решения подзадачи назначения наборов сервисных рейсов электробусам парка. Им уточнена модель смешанного целочисленного линейного программирования для подзадачи оптимизации зарядной инфраструктуры и расписаний зарядки электробусов, разработана программа решения задачи с использованием универсального решателя задач целочисленного линейного программирования и выполнены численные эксперименты. Б. М. Розин предложил модель смешанного целочисленного линейного программирования для подзадачи оптимизации зарядной инфраструктуры и расписаний зарядки электробусов при фиксированных наборах сервисных рейсов для электробусов парка. Им разработана эвристическая процедура назначения электробусам рейсов с минимальным временем старта, подготовлены исходные данные для примера электротранспортной сети г. Минска и составлен первоначальный текст статьи.

References

1. Dirks N., Schiffer M., Walther G. On the integration of battery electric buses into urban bus networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2022, vol. 139, p. 103628. DOI: 10.1016/j.trc.2022.103628.
2. Gao Z., Lin Z., LaClair T. J., Liu C., Li J.-M., ..., Ward J. Battery capacity and recharging needs for electric buses in city transit service. *Energy*, 2017, vol. 122, pp. 588–600.

3. Olsson O., Grauers A., Pettersson S. Method to analyze cost effectiveness of different electric bus systems. *EVS29 International Battery, Hybrid and Fuel Cell Electric Vehicle Symposium, Montreal, Quebec, Canada, June 2016*, pp. 1–12.

4. Guschinsky N., Kovalyov M. Y., Rozin B., Brauner N. Fleet and charging infrastructure decisions for fast-charging city electric bus service. *Computers and Operations Research*, 2021, vol. 135, p. 105449. DOI: 10.1016/j.cor.2021.105449.

5. Battaia O., Dolgui A., Guschinsky N., Kovalev M. Y. Designing fast-charge urban electric bus services: An Integer Linear Programming model. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2023, vol. 171, p. 103065. DOI: 10.1016/j.tre.2023.103065.

6. Nath R. B., Rambha T., Schiffer M. On the impact of co-optimizing station locations, trip assignment, and charging schedules for electric buses. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2024, vol. 167, p. 104839.

7. Quttineh N.-H., Häll C. H., Ekström E. J., Ceder A. Integrated solution for electric bus timetabling and vehicle scheduling combined with choices of charging locations. *Journal of Public Transportation*, 2023, vol. 25, p. 100055.

8. Alvo M., Angulo G., Klapp M. A. An exact solution approach for an electric bus dispatch problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2021, vol. 156, p. 102528.

Информация об авторах

Гущинский Николай Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.

E-mail: gyshin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-1166-2387>

Ковалев Михаил Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.

E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-0832-0829>

Розин Борис Матвеевич, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.

E-mail: rozin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-3814-6569>

Information about the authors

Nikolai N. Guschinsky, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.

E-mail: gyshin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-1166-2387>

Mikhail Y. Kovalyov, D. Sc. (Phys.-Math.), Prof., Principal Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.

E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-0832-0829>

Boris M. Rozin, Ph. D. (Eng.), Assoc. Prof., Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.

E-mail: rozin@newman.bas-net.by
<http://orcid.org/0000-0003-3814-6569>