

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELING



УДК 519.6:537.2
DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-3-59-71

Оригинальная статья
Original Article

Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкими сферическими экранами

Г. Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22, Гродно, 230023, Беларусь
E-mail: gsys@grsu.by

Аннотация

Цели. Целями работы являются построение аналитического решения задачи экранирования низкочастотного магнитного поля двумя тонкими непересекающимися сферическими экранами, расположенными на поверхности сферы, и вычисление коэффициента экранирования исходного магнитного поля сферическими экранами.

Методы. Для решения поставленной граничной задачи используются метод теорем сложения и метод тройных сумматорных уравнений. Потенциал исходного магнитного поля представляется в виде сферических гармонических функций. Вторичные потенциалы магнитного поля представляются в виде суперпозиции сферических гармонических функций в локальной системе координат в трехмерном пространстве. **Результаты.** Решение поставленной граничной задачи сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно специальным образом введенных функций. Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи на значение коэффициента экранирования. Результаты вычислений представлены в виде графиков.

Заключение. Предложенные методика и разработанное программное обеспечение могут найти практическое применение при конструировании экранов в различных областях техники.

Ключевые слова: граничная задача, магнитное поле, потенциал, теоремы сложения, гармонические функции, тройные сумматорные уравнения

Благодарность. Работа выполнялась в рамках подпрограммы «Математические модели и методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция 2025».

Для цитирования. Шушкевич, Г. Ч. Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкими сферическими экранами / Г. Ч. Шушкевич // Информатика. – 2025. – Т. 22, № 3. – С. 59–71. – DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-3-59-71.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 12.05.2025
Подписана в печать | Accepted 17.06.2025
Опубликована | Published 30.09.2025

Analytical solution of the shielding low-frequency magnetic field by thin spherical screens problem

Gennady Ch. Shushkevich

*Yanka Kupala State University of Grodno,
st. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus
E-mail: gsys@grsu.by*

Abstract

Objectives. Construction of an analytical solution to the problem of shielding a low-frequency magnetic field by two thin non-intersecting spherical screens located on the surface of a sphere. Calculation of the shielding coefficient of the initial magnetic field by spherical screens.

Methods. The method of addition theorems and the method of triple summation equations are used to solve the boundary value problem. The potential of the initial magnetic field is represented as spherical harmonic functions. The secondary potentials of the magnetic field are represented as a superposition of spherical harmonic functions in a local coordinate system in three-dimensional space.

Results. The solution of the boundary value problem is reduced to the solution of a system of Fredholm integral equations of the second kind with respect to specially introduced functions. The influence of the geometric parameters of the problem on the value of the screening coefficient is numerically investigated. The results of the calculations are presented in the form of graphs.

Conclusion. The proposed methodology and the developed software can find practical application in the development and design of screens in various fields of technology.

Keywords: boundary value problem, magnetic field, potential, addition theorems, harmonic functions, triple series equations

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the "Mathematical Models and Methods" of the State Program for Scientific Research "Convergence 2025".

For citation. Shushkevich G. Ch. *Analytical solution of the shielding low-frequency magnetic field by thin spherical screens problem*. Informatika [Informatics], 2025, vol. 22, no. 3, pp. 59–71 (In Russ.). DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-3-59-71.

Conflict of interest. The author declares of no conflict of interest.

Введение. Компьютеры, мобильная телефонная связь, телевидение, интернет, бытовые электроприборы, электротранспорт и т. д. вызывают электромагнитное загрязнение окружающей среды. Надежным способом защиты от влияния электромагнитных полей различных устройств и других средств электромагнитного излучения как на биологические объекты, так и на чувствительные элементы электроники служит экранирование этих полей [1, 2]. Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод интегральных уравнений [3–5]. Однако актуальность разработки новых аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Эти методы по-прежнему остаются основными средствами решения фундаментальных проблем, создают основу для тестирования решения краевых задач, полученных численными методами. Метод разделения переменных и аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики [6]. Обобщением метода разделения переменных для решения граничных задач со смешанными граничными условиями является метод парных (тройных) уравнений, позволяющий свести решение поставленной граничной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое обычно не имеет аналитического решения в замкнутой форме, либо бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Этот метод применялся для решения электростатических задач для одиночных тонких незамкнутых оболочек [7–11].

При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применялся метод теорем сложения [12–15]. Совместное использование теорем сложения и парных (тройных) уравнений позволило найти аналитическое решение задач экранирования для двух и более экранов, представляющих собой как полные, так и неполные координатные поверхности [16–23].

В настоящей статье разработана методика аналитико-численного решения задачи экранирования низкочастотного магнитного поля двумя тонкими сферическими экранами, расположенными на сфере.

Постановка и представление решения задачи. Пусть в однородном и изотропном пространстве R^3 с магнитной проницаемостью среды μ находятся два идеально тонких сферических экрана S_0, S_1 , которые расположены на поверхности сферы Γ радиуса a с центром в точке O (рис. 1).

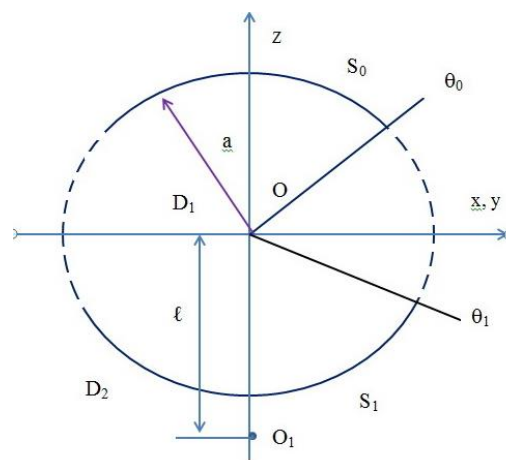


Рис. 1. Осевое сечение экранов
Fig. 1. Axial cross-section of shields

Для постановки граничной задачи в точке O введем декартовы координаты $Oxyz$. Декартовы координаты $Oxyz$ связаны со сферическими координатами $Or\theta\varphi$ соотношениями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

где $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Тогда поверхности тонких сферических экранов S_0, S_1 описываются следующим образом:

$$S_0 = \{ r = a, 0 \leq \theta < \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}, \quad S_1 = \{ r = a, \theta_0 < \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}, \quad \theta_0 < \theta_1.$$

Разобьем все пространство R^3 поверхностью Γ на две области: $D_1 (r < a)$ и $D_2 (r > a)$.

Пусть в точке O_1 находится низкочастотный магнитный диполь, момент которого направлен вдоль оси Oz . Положим, что исходное низкочастотное электромагнитное поле изменяется во времени синусоидально, т. е. $\vec{\Phi}(M, t) = \{ \vec{E}(M), \vec{H}(M) \} \sin(\omega t)$, где $\vec{E}(M)$, $\vec{H}(M)$ – напряженность электрического и магнитного полей соответственно, M – произвольная точка пространства, ω – угловая частота. В квазистационарном приближении система векторных уравнений Максвелла сводится к нахождению вторичного скалярного магнитного потенциала U_j ,

удовлетворяющего уравнению Лапласа $\Delta U_j = 0$, $j=1,2$, в области D_j [24]. Магнитный потенциал исходного поля U_i представим через сферические гармонические функции [12, 19, 22, 24]:

$$U_i(r_1, \theta_1) = P \left(\frac{\ell}{r_1} \right)^2 P_1(\cos \theta_1), \quad P = \frac{M_z}{4\pi\mu\ell^2}, \quad r_1 < \ell, \quad (1)$$

где M_z – магнитный момент, ℓ – расстояние между точками O и O_1 , $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [25].

Постановка задачи. Требуется найти вторичные потенциалы магнитного поля U_j , $j = 1, 2$, которые удовлетворяют:

– уравнению Лапласа

$$\Delta U_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

– граничным условиям на поверхностях сферических экранов S_0, S_1

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (U_i(M) + U_2(M)) \Big|_{M \in S_0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (U_i(M) + U_2(M)) \Big|_{M \in S_1} = 0, \quad (3)$$

где \vec{n} – нормаль к соответствующей поверхности;

– условию на бесконечности

$$U_2(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где M – произвольная точка области D_2 .

Кроме того, потребуем выполнения условия непрерывности потенциала на части поверхности сферы Γ , которая не является экраном, и условия непрерывности поля на поверхности сферы Γ :

$$(U_i(M) + U_2(M)) \Big|_{M \in \Gamma \setminus (S_0 \cup S_1)} = U_1(M) \Big|_{M \in \Gamma \setminus (S_0 \cup S_1)}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (U_i(M) + U_2(M)) \Big|_{M \in \Gamma} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}} U_1(M) \Big|_{M \in \Gamma}. \quad (6)$$

Поставленная задача имеет единственное решение [26]. Физическая размерность потенциалов в системе СИ – A .

Согласно методу разделения переменных решение поставленной граничной задачи представим в виде суперпозиции сферических гармонических функций так, чтобы выполнялось условие на бесконечности (4):

$$U_1(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad r < a, \quad (7)$$

$$U_2(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r > a. \quad (8)$$

Неизвестные коэффициенты x_n , y_n подлежат определению из граничных условий.

Выполнение граничных условий. Для выполнения граничных условий представим потенциал $U_i(r_1, \theta_1)$ через сферические гармонические функции в системе координат с началом в точке O . Для этого воспользуемся теоремой сложения (формулой), которая связывает сферические гармонические функции в системе координат с началом в точках O и O_1 [18, 27]:

$$r_1^{-n-1} P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi} = \sum_{k=|m|}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} (n+k)!}{(n-m)! (k+m)!} \ell^{-k-n-1} r^k P_k^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad r < \ell. \quad (9)$$

На основании формулы (9) потенциал исходного магнитного поля в сферической системе координат с началом в точке O имеет вид

$$U_i(r, \theta) = P \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\frac{r}{\ell} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad p_n = (-1)^n (n+1), \quad r < \ell. \quad (10)$$

С учетом представления потенциалов (7), (8), (10) условие непрерывности (6) в силу ортогональности полиномов Лежандра $P_n(\cos \theta)$ на отрезке $[0, \pi]$ эквивалентно соотношению

$$n x_n = -(n+1) y_n + n p_n \left(\frac{a}{\ell} \right)^n, \quad n=1, 2, \dots \quad (11)$$

Принимая во внимание представления потенциалов (7), (8), (10) и соотношение (11) и выполняя условия (2), (3), (5), получим тройные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y_n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \left(\frac{a}{\ell} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(y_n + p_n \left(\frac{a}{\ell} \right)^n - x_n \right) P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta < \theta_1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y_n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \left(\frac{a}{\ell} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad \theta_1 < \theta \leq \pi.$$

Введем в рассмотрение новые коэффициенты Y_n и малый параметр g_n по формулам

$$y_n = \frac{4n}{2n+1} Y_n, \quad g_n = \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Тогда вышеприведенные тройные сумматорные уравнения преобразуются к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n P_n(\cos \theta) = F(\theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta < \theta_1, \quad (14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n P_n(\cos \theta) = F(\theta), \quad \theta_1 < \theta \leq \pi, \quad (15)$$

где $F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \mathfrak{Y}_n P_n(\cos \theta)$, $\mathfrak{Y}_n = f_n + g_n Y_n = \frac{n}{2n+1} P_n\left(\frac{a}{\ell}\right)^n + g_n Y_n$.

Для решения тройных сумматорных уравнений (13)–(15) введем в рассмотрение две неизвестные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t) \in C_{[0, \theta_0]}^{(1)}$, $\varphi_2(t) \in C_{[\theta_1, \pi]}^{(1)}$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(\pi) = 0 \quad (16)$$

и связанные с коэффициентами Y_n соотношением

$$Y_n = \int_0^{\theta_0} \varphi_1(t) \sin(n+0,5)t dt + \int_{\theta_1}^{\pi} \varphi_2(t) \cos(n+0,5)t dt. \quad (17)$$

Подставляя представление (17) в уравнение (14) и используя разложения разрывных функций в ряды по полиномам Лежандра [7, 18, 25]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t P_n(\cos \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ \frac{1}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}}, & 0 < \theta < t \leq \pi, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t P_n(\cos \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}}, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ 0, & 0 < \theta < t \leq \pi, \end{cases} \quad (19)$$

убеждаемся, что это уравнение выполняется тождественно.

Подставим Y_n из соотношения (17) в уравнение (13) и проинтегрируем первый интеграл по частям:

$$\begin{aligned} & -2\varphi_1(\theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n+0,5)\theta_0 P_n(\cos \theta) + 2 \int_0^{\theta_0} \varphi_1'(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n+0,5)t P_n(\cos \theta) \right] dt + \\ & + \int_{\theta_1}^{\pi} \varphi_2(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cos(n+0,5)t P_n(\cos \theta) \right] dt = F(\theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно (19) первая сумма в уравнении (20) обращается в нуль, а вторая сумма преобразуется к виду

$$\int_0^{\theta_0} \varphi_1'(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n+0,5)t P_n(\cos \theta) \right] dt = \int_0^{\theta} \frac{\varphi_1'(t) dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}}.$$

Используя разложение (18), третье выражение в (20) представим в виде

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\pi} \varphi_2(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cos(n+0,5)t P_n(\cos \theta) \right] dt &= 2 \int_{\theta_1}^{\pi} \varphi_2(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} \right) dt = \\ &= -2 \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\varphi_2(t) \sin t dt}{\sqrt{(2(\cos \theta - \cos t))^3}}. \end{aligned}$$

На основании выполненных преобразований уравнение (20) примет вид

$$\int_0^{\theta} \frac{\varphi_1'(t) dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} = V(\theta), \quad (21)$$

где

$$V(\theta) = 0,5F(\theta) + \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\varphi_2(t) \sin t dt}{\sqrt{(2(\cos \theta - \cos t))^3}}. \quad (22)$$

Уравнение (21) является интегральным уравнением Абеля. На основании его решения [7] имеем

$$\varphi_1'(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{V(\theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}}.$$

Проинтегрируем полученное выражение и с учетом (16) получим уравнение

$$\varphi_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{V(\theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}}. \quad (23)$$

Преобразуем правую часть (23). Принимая во внимание представление (22), получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{V(\theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Im_n \int_0^t \frac{P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\pi} \varphi_2(\tau) \left[\sin \tau \int_0^t \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \tau)^{3/2} (\cos \theta - \cos t)^{1/2}} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая интегралы [7, 18, 25]

$$\int_0^x \frac{P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos x)}} = \frac{\sin(n+0,5)x}{n+0,5},$$

$$\sin \tau \int_0^t \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \tau)^{3/2} (\cos \theta - \cos t)^{1/2}} = -\operatorname{cosec}((t+\tau)/2) - \operatorname{cosec}((t-\tau)/2),$$

уравнение (23) преобразуем к интегральному уравнению вида

$$\varphi_1(t) + \int_{\theta_1}^{\pi} K_1(t, \tau) \varphi_2(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Z}_n \sin(n+0,5)t, \quad 0 \leq t < \theta_0, \quad (24)$$

где ядро интегрального уравнения

$$K_1(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{cosec}((t+\tau)/2) + \operatorname{cosec}((t-\tau)/2) \right].$$

Проводя аналогичные преобразования, получим, что уравнение (15) преобразуется к интегральному уравнению вида

$$\varphi_2(t) + \int_0^{\theta_0} K_2(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Z}_n \cos(n+0,5)t, \quad \theta_1 < t \leq \pi, \quad (25)$$

где

$$K_2(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{cosec}((t+\tau)/2) - \operatorname{cosec}((t-\tau)/2) \right].$$

На основании представления коэффициента \mathfrak{Z}_n из уравнений (24), (25) получим связанную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \int_0^{\theta_0} L_1(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau + \int_{\theta_1}^{\pi} (L_2(t, \tau) - K_1(t, \tau)) \varphi_2(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin(n+0,5)t, \quad 0 \leq t < \theta_0, \\ \varphi_2(t) &= \int_0^{\theta_0} (L_2(\tau, t) - K_2(t, \tau)) \varphi_1(\tau) d\tau + \int_{\theta_1}^{\pi} L_3(t, \tau) \varphi_2(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos(n+0,5)t, \quad \theta_1 < t \leq \pi, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} L_1(t, \tau) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin(n+0,5)t \sin(n+0,5)\tau, \quad L_2(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin(n+0,5)t \cos(n+0,5)\tau, \\ L_3(t, \tau) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos(n+0,5)t \cos(n+0,5)\tau, \quad f_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{a}{\ell} \right)^n. \end{aligned}$$

Вычисление коэффициента экранирования. Коэффициент экранирования (ослабления) магнитного поля в области D_1 вычислим по формуле

$$K(r, \theta) = \left| \vec{H}_1(r, \theta) \right| / \left| \vec{H}_i(r, \theta) \right|, \quad r < a,$$

где $\vec{H}_1(r, \theta)$ – напряженность вторичного магнитного поля в области D_1 :

$$\vec{H}_1(r, \theta) = -\operatorname{grad} u_1(r, \theta) = -\left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_1(r, \theta) \vec{e}_\theta \right),$$

$\vec{H}_i(r, \theta)$ – напряженность первичного магнитного поля в области D_1 :

$$\vec{H}_i(r, \theta) = -grad u_i(r, \theta) = -\left(\frac{\partial}{\partial r} u_i(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_i(r, \theta) \vec{e}_\theta\right).$$

Из формул (7), (10) и производной $\frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta)$, где $P_n^1(\cos \theta)$ – присоединенная функция Лежандра [25], следуют равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u_1(r, \theta) &= P \sum_{n=1}^{\infty} n x_n \frac{r^{n-1}}{a^n} P_n(\cos \theta), & \frac{\partial}{\partial \theta} u_1(r, \theta) &= P \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{r^n}{a^n} P_n^1(\cos \theta), \\ \frac{\partial}{\partial r} u_i(r, \theta) &= P \sum_{n=1}^{\infty} n p_n \frac{r^{n-1}}{\ell^n} P_n(\cos \theta), & \frac{\partial}{\partial \theta} u_i(r, \theta) &= P \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{r^n}{\ell^n} P_n^1(\cos \theta). \end{aligned}$$

Для численного решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (26) использована обобщенная квадратурная формула Симпсона, которая имеет четвертый порядок точности [28]. Все сходящиеся бесконечные суммы вычислены с точностью 0,001.

Приведем некоторые результаты расчетов. Пусть геометрические параметры задачи $\ell/a = 3$. На рис. 2, а показаны графики коэффициента экранирования $K(r, \theta)$ в области D_1 при $\theta_0 = 90^\circ$, $\theta_1 = 170^\circ$ и некоторых значениях r/a (значения приведены в левом углу рисунка), а на рис. 2, б – при $\theta_0 = 90^\circ$, $\theta_1 = 135^\circ$ (увеличен угол раствора сферического экрана S_1).

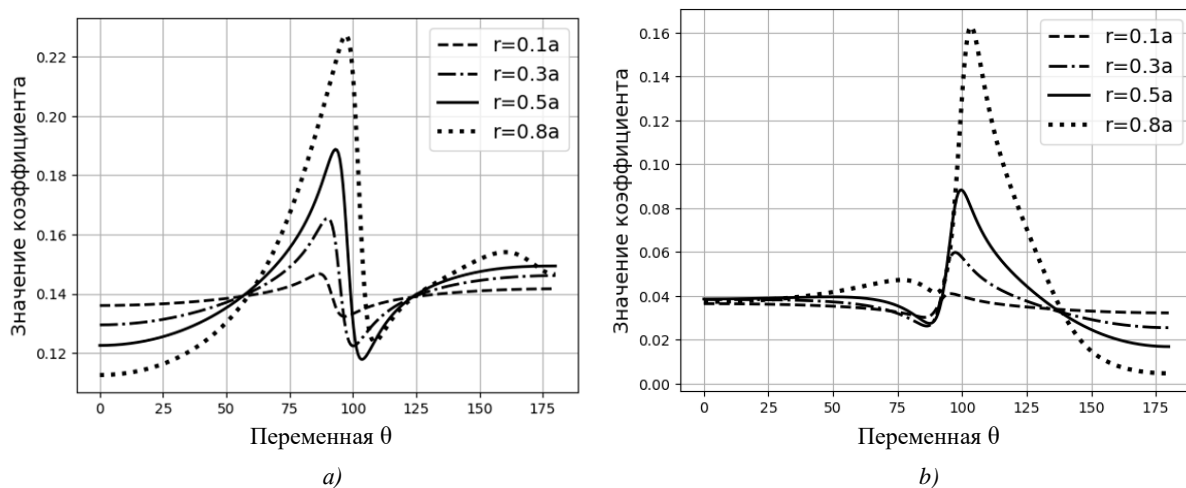


Рис. 2. Графики коэффициента экранирования $K(r, \theta)$, $r < a$: а) при $\theta_0 = 90^\circ$, $\theta_1 = 170^\circ$; б) при $\theta_0 = 90^\circ$, $\theta_1 = 135^\circ$

Fig. 2. Graphs of the shielding coefficient $K(r, \theta)$, $r < a$: а) at $\theta_0 = 90^\circ$, $\theta_1 = 170^\circ$; б) at $\theta_0 = 90^\circ$, $\theta_1 = 135^\circ$

При увеличении угла раствора сферического экрана S_1 значение $K(r, \theta)$, $r < a$, уменьшается (рис. 2, б).

На рис. 3, а изображены графики коэффициента экранирования $K(r, \theta)$ в области D_1 при $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta_1 = 150^\circ$ и некоторых значениях r/a (значения приведены в левом углу рисунка), а на рис. 2, б – при $\theta_0 = 130^\circ$, $\theta_1 = 150^\circ$ (увеличен угол раствора сферического экрана S_0).

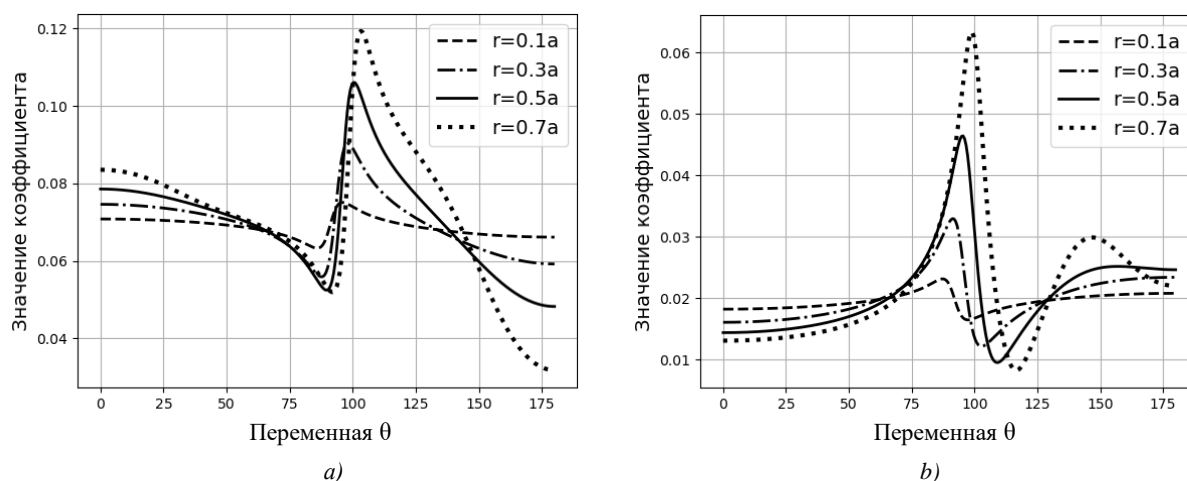


Рис. 3. Графики коэффициента экранирования $K(r, \theta)$, $r < a$: а) при $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta_1 = 150^\circ$; б) при $\theta_0 = 130^\circ$, $\theta_1 = 150^\circ$

Fig. 3. Graphs of the shielding coefficient $K(r, \theta)$, $r < a$: а) at $\theta_0 = 30^\circ$, $\theta_1 = 150^\circ$; б) at $\theta_0 = 130^\circ$, $\theta_1 = 150^\circ$

При увеличении угла раствора сферического экрана S_0 значение коэффициента экранирования $K(r, \theta)$, $r < a$, уменьшается. Магнитное поле практически не проникает в область D_1 при $\theta_0 = 130^\circ$, $\theta_1 = 150^\circ$.

Заключение. В статье разработана методика аналитико-численного решения задачи экранирования низкочастотного магнитного поля двумя тонкими непересекающимися сферическими экранами, расположенными на поверхности сферы. Источником поля является низкочастотный магнитный диполь. Решение поставленной граничной задачи сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно специальным образом введенных функций. Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи на значение коэффициента экранирования. Результаты вычислений представлены в виде графиков. Разработанные методика и программное обеспечение могут найти практическое применение при конструировании экранов в различных областях техники.

Список использованных источников

1. Шапиро, Д. Н. Электромагнитное экранирование / Д. Н. Шапиро. – Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2010. – 120 с.
2. Кечиев, Л. Н. Экранирование радиоэлектронной аппаратуры. Инженерное пособие / Л. Н. Кечиев. – М. : Грифон, 2019. – 720 с.
3. Дмитриев, В. И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
4. Ильин, В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В. П. Ильин. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2000. – 345 с.
5. Исаев, Ю. Н. Методы расчета электромагнитных полей. Практика использования MathCAD, COMSOL Multiphysics / Ю. Н. Исаев, О. В. Васильева. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 162 с.
6. Pierrus, J. Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments / J. Pierrus. – Oxford : Oxford University Press, 2018. – 638 p. – DOI: 10.1093/oso/9780198821915.001.0001.
7. Уфлянд, Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики / Я. С. Уфлянд. – М. : Наука, 1977. – 220 с.
8. Шестопапов, В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции / В. П. Шестопапов. – Киев : Наукова думка, 1983. – 252 с.
9. Boridy, E. Quasistatic magnetic field penetration through a circular aperture of a spherical shield enclosing a spherical conductor / E. Boridy // Journal of Applied Physics. – 1990. – Vol. 68, no. 2. – P. 422–430.

10. Duffy, D. G. Mixed boundary value problems / D. G. Duffy. – N. Y. : Chapman & Hall/CRC, 2008. – 488 p. – DOI: 10.1201/9781420010947.
11. Шушкевич, Г. Ч. Методика решения электростатической задачи для тонкой незамкнутой сферической оболочки / Г. Ч. Шушкевич // Электричество. – 2010. – № 6. – С. 63–68.
12. Иванов, Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е. А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
13. Ерофеевко, В. Т. Задача электростатики для двух тороидальных проводников / В. Т. Ерофеевко // Журнал технической физики. – 1986. – Т. 56, № 8. – С. 1641–1643.
14. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic problem for a torus placed in an infinite cylinder / G. Ch. Shushkevich // Technical Physics. – 2004. – Vol. 49, no. 5. – P. 540–544.
15. Шушкевич, Г. Ч. Проникновение низкочастотного магнитного поля через плоский слой со сфероидальным включением, тонкостенными слоями / Г. Ч. Шушкевич, А. И. Куц // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2012. – № 3. – С. 45–52.
16. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic field of a flattened ellipsoid and disc between two thin open spherical shells / G. Ch. Shushkevich, S. V. Shushkevich // Electrical Technology. – 1996. – no. 1. – P. 89–99.
17. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic problem for a torus and a disk / G. Ch. Shushkevich // Technical Physics. – 1997. – Vol. 42, no. 4. – P. 436–438.
18. Шушкевич, Г. Ч. Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.
19. Erofeenko, V. T. Screening of low-frequency magnetic fields by an open thin-wall spherical shell / V. T. Erofeenko, I. S. Kozlovskaya, G. Ch. Shushkevich // Technical Physics. – 2010. – Vol. 55, no. 9. – P. 1240–1247. – DOI: 10.1134/S1063784210090021.
20. Erofeenko, V. T. Shielding of a low-frequency electric field by a multilayer circular disk / V. T. Erofeenko, G. H. Shushkevich // Technical Physics. – 2013. – Vol. 58, no. 6. – P. 866–871. – DOI: 10.1134/S106378421306011X.
21. Шушкевич, Г. Ч. Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном в присутствии цилиндра / Г. Ч. Шушкевич // Информатика. – 2021. – Т. 18, № 3. – С. 45–55.
22. Шушкевич, Г. Ч. Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля двумя тонкостенными цилиндрическими экранами / Г. Ч. Шушкевич // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 1. – С. 16–24.
23. Шушкевич, Г. Ч. Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном с эллипсоидальным включением / Г. Ч. Шушкевич // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2024. – Т. 14, № 3. – С. 80–89.
24. Аполлонский, С. М. Моделирование и расчет электромагнитных полей в технических устройствах : в 3 т. / С. М. Аполлонский. – М. : Русайнс, 2024. – Т. 3: Расчеты электромагнитных полей в научных и инженерно-технических задачах. – 388 с.
25. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами : пер. с англ. / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
26. Корзюк, В. И. О разрешимости некоторых задач в теории экранирования полей системами экранов / В. И. Корзюк, Г. Ч. Шушкевич // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 1. – С. 71–81.
27. Ерофеевко, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеевко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.
28. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 848 с.

References

1. Shapiro D. N. Elektromagnitnoye ekranirovaniye. *Electromagnetic Shielding*. Dolgoprudny, Izdatel'skiy dom "Intellekt", 2010, 120 p. (In Russ.).
2. Kechiev L. N. Ekranirovaniye radioelektronnoy apparatury. Inzhenernoye posobiye. *Shielding of Electronic Equipment. Engineering Manual*. Moscow, Grifon, 2019, 720 p. (In Russ.).
3. Dmitriev V. I., Zakharov E. V. Metod integral'nykh uravneniy v vychislitel'noy elektrodinamike. *Method of Integral Equations in Computational Electrodynamics*. Moscow, MAKS Press, 2008, 316 p. (In Russ.).

4. Ilyin V. P. Metody konechnykh raznostei i konechnykh ob'emov dlia ellipticheskikh uravnenii. *Finite Difference and Finite Volume Methods for Elliptic Equations*. Novosibirsk, Izdatel'stvo Instituta matematiki, 2000, 345 p. (In Russ.).
5. Isaev Yu. N., Vasilyeva O. V. Metody rascheta elektromagnitnykh poley. Praktika ispol'zovaniya MathCAD, COMSOL Multiphysics. *Methods for the Calculation of Electromagnetic Fields. Practice Using MathCAD, COMSOL Multiphysics*. Saarbruchen, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, 162 p. (In Russ.).
6. Pierrus J. *Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments*. Oxford, Oxford University Press, 2018, 638 p. DOI: 10.1093/oso/9780198821915.001.0001.
7. Uflyand Ya. S. Metod parnykh uravneniy v zadachakh matematicheskoy fiziki. *Method of Paired Equations in Problems of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka, 1977, 220 p.
8. Shestopalov V. P. Summatornyie uravneniya v sovremennoy teorii difraktsii. *Summation Equations in Modern Diffraction Theory*. Kyiv, Naukova dumka, 1983, 252 p. (In Russ.).
9. Boridy E. Quasistatic magnetic field penetration through a circular aperture of a spherical shield enclosing a spherical conductor. *Journal of Applied Physics*, 1990, vol. 68, no. 2, pp. 422–430.
10. Duffy D. G. *Mixed Boundary Value Problems*. New York, Chapman & Hall/CRC, 2008, 488 p. DOI: 10.1201/9781420010947.
11. Shushkevich G. Ch. A technique for solving an electrostatic problem for a thin non-closed spherical shell. *Elektrichestvo [Electricity]*, 2010, no. 6, pp. 63–68 (In Russ.).
12. Ivanov E. A. Difraktsiya elektromagnitnykh voln na dvukh telakh. *Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies*. Minsk, Nauka i tehnika, 1968, 584 p. (In Russ.).
13. Erofeenko V. T. The problem of electrostatics for two toroidal conductors. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Journal of Technical Physics]*, 1986, vol. 56, no. 8, pp. 1641–1643 (In Russ.).
14. Shushkevich G. Ch. Electrostatic problem for a torus placed in an infinite cylinder. *Technical Physics*, 2004, vol. 49, no. 5, pp. 540–544.
15. Shushkevich G. Ch., Kuts A. I. Penetration of a low-frequency magnetic field through a flat layer with a spheroidal inclusion, thin-walled layers. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaynaga y'niversiteta. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne [Bulletin of Grodno State University. Ser. 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Engineering and Management]*, 2012, no. 3, pp. 45–52 (In Russ.).
16. Shushkevich, G. Ch., Shushkevich S. V. Electrostatic field of a flattened ellipsoid and disc between two thin open spherical shells. *Electrical Technology*, 1996, no. 1, pp. 89–99.
17. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic problem for a torus and a disk. *Technical Physics*, 1997, vol. 42, no. 4, pp. 436–438.
18. Shushkevich G. Ch. Modelirovanie polei v mnogosvyaznykh oblastyakh v zadachakh elektrostati. *Modeling Fields in Multiply Connected Domains in Electrostatic Problems*. Saarbruchen, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015, 228 p. (In Russ.).
19. Erofeenko V. T., Kozlovskaya I. S., Shushkevich G. Ch. Screening of low-frequency magnetic fields by an open thin-wall spherical shell. *Technical Physics*, 2010, vol. 55, no. 9, pp. 1240–1247. DOI: 10.1134/S1063784210090021.
20. Erofeenko V. T., Shushkevich G. H. Shielding of a low-frequency electric field by a multilayer circular disk. *Technical Physics*, 2013, vol. 58, no. 6, pp. 866–871. DOI: 10.1134/S106378421306011X.
21. Shushkevich G. Ch. Analytical solution to the problem of shielding a low-frequency magnetic field with a thin-walled cylindrical screen in the presence of a cylinder. *Informatika [Informatics]*, 2021, vol. 18, no. 3, pp. 45–55 (In Russ.).
22. Shushkevich G. Ch. Analytical solution to the problem of shielding a low-frequency magnetic field with two thin-walled cylindrical screens. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaynaga y'niversiteta. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne [Bulletin of Grodno State University. Ser. 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Engineering and Management]*, 2022, vol. 12, no. 1, pp. 16–24 (In Russ.).
23. Shushkevich G. Ch. Analytical solution to the problem of shielding a low-frequency magnetic field with a thin-walled cylindrical screen with an ellipsoidal inclusion. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaynaga y'niversiteta. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne [Bulletin of Grodno State University. Ser. 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Engineering and Management]*, 2024, vol. 14, no. 3, pp. 80–89 (In Russ.).
24. Apollonsky S. M. Modelirovaniye i raschet elektromagnitnykh poley v tekhnicheskikh ustroystvakh [Modeling and Calculation of Electromagnetic Fields in Technical Devices]. T. 3. Raschety elektromagnitnykh poley v nauchnykh i inzhenerno-tekhnicheskikh zadachakh [Vol. 3. Calculations of Electromagnetic Fields in Scientific and Engineering Problems]. Moscow, Rusajns, 2024, 388 p. (In Russ.).
25. Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.). *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965, 1046 p.

26. Korzyuk V. I., Shushkevich G. Ch. *On the solvability of some problems in the theory of screening of fields by systems of screens*. Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi [*Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*], 2006, vol. 14, no. 1, pp. 71–81 (In Russ.).

27. Erofeenko V. T. *Teoremy slozheniya. Addition Theorems*. Minsk, Nauka i tekhnika, 1989, 240 p. (In Russ.).

28. Verzhbitsky V. M. *Osnovy chislennykh metodov. Fundamentals of Numerical Methods*. Moscow, Vysshaya shkola, 2002, 848 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Шушкевич Геннадий Чеславович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры современных технологий программирования, Гродненский государственный университет им. Янки Купалы.
E-mail: gsys@grsu.by

Information about the author

Gennady Ch. Shushkevich, D. Sc. (Phys.-Math.), Prof. of Modern Programming Technologies Department, Yanka Kupala State University of Grodno.
E-mail: gsys@grsu.by