

УДК 004.942:539.371

К.С. Курочка

## КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБОВ ТОНКИХ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

*Представляется математическая модель тонкой круглой трехслойной пластины под действием вертикальной нагрузки на основе метода конечных элементов с использованием осесимметричного конечного элемента, достоинством которого является малая размерность получаемой матрицы жесткости при обеспечении достаточной для практического использования точности расчетов. В ходе исследования находятся аналитические выражения для вычисления локальных матриц жесткости, что позволяет значительно ускорить процесс формирования глобальных матриц жесткости и увеличить точность проводимых расчетов.*

*Разрабатывается соответствующее программное обеспечение и проводится его верификация. Расхождение результатов исследования предлагаемой математической модели и имеющихся результатов расчетов по аналитическим формулам для однородных круглых тонких трехслойных пластин не превышает 7 %.*

### Введение

В настоящее время все большее применение находят трехслойные элементы конструкций. Совместное использование материалов с существенно различающимися термомеханическими характеристиками позволяет получать в рамках конструкции новые полезные свойства, недостижимые при применении однородных элементов. Прочные и жесткие несущие слои обеспечивают необходимые значения деформаций, а внутренние слои, перераспределяя усилия между несущими слоями, могут также выполнять и ряд других функций, например тепло- и звукоизоляцию, демпфирование и снижение вибраций и т. п. [1, 2].

Одним из распространенных трехслойных элементов технических систем является тонкая пластина, нашедшая широкое применение в строительных конструкциях [2, 3]. В современном градостроительстве часто возводятся здания каркасного типа, основным элементом которых служат диски перекрытий, состоящие из многопустотных железобетонных плит, связевых ригелей и несущих колонн [3]. Все данные элементы в плане являются неоднородными, содержат пустоты или включения арматуры, что требует их рассмотрения как многослойных.

Повсеместное внедрение энергосберегающих технологий привело к широкому использованию шумо- и теплоизоляционных материалов, которые конструктивно размещаются на несущих элементах зданий и сооружений, таким образом превращая их в многослойные элементы.

Прочностные расчеты подобных конструкций нельзя проводить без учета их слоистой структуры, так как это может привести к значительным погрешностям. Одним из эффективных методов исследования подобных конструкций, позволяющих учесть все особенности их поведения, является компьютерное моделирование посредством построения и исследования соответствующих математических моделей [4–7].

Для построения математической модели прогибов тонкой круглой трехслойной пластины воспользуемся методом конечных элементов [4–6].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую круглую трехслойную пластину под действием вертикальной поперечной нагрузки. Воспользуемся цилиндрической системой координат. Начало координат поместим в центр пластины. Пластина состоит из внешних несущих слоев 1 и 2 соответственно толщиной  $h_1$  и  $h_2$  и жесткого заполнителя толщиной  $h_0$ , воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении (рис. 1). На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ( $\gamma_{rz} = 0$  при  $r = 1$ ), при этом пластина может

быть свободно оперта, шарнирно оперта или закреплена [4]. Перемещения в каждом слое будут определяться из уравнения Софи Жермен – Лагранжа в полярной системе координат [1]:

$$w^{IV} + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' = \frac{q(r)}{D},$$

где  $w$  – прогиб срединной поверхности;  $q(r)$  – поперечная нагрузка;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость слоя пластины;  $E$  – модуль упругости;  $h$  – толщина слоя пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

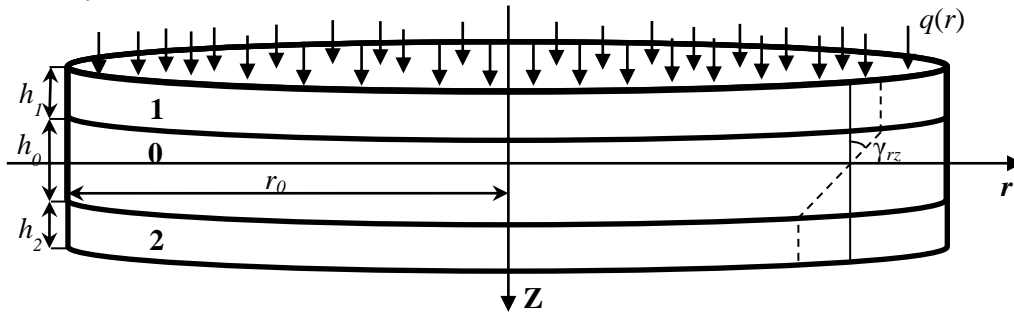


Рис. 1. Круглая трехслойная пластина под действием вертикальной поперечной нагрузки

Для слоев пластины положим справедливыми гипотезы Кирхгофа [1, 4, 8], из которых аналогично, как и в случае декартовых координат [9], можно получить

$$w = w(r); \quad u = u(r, z) = -z \frac{dw(r)}{dr}; \quad \vartheta = 0,$$

где  $u$  – радиальные перемещения;  $\vartheta$  – угловые перемещения.

Формулы Коши [1, 4, 9] для ненулевых компонент деформаций в этом случае примут вид

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -z \frac{d^2w}{dr^2}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = -z \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}; \quad \gamma_{rz} = -z \frac{dw}{dr}. \quad (1)$$

В качестве искомой величины рассмотрим прогиб тонкой круглой пластины  $w = w(r)$ , для моделирования которого воспользуемся осесимметричными конечными элементами с двумя узлами по две степени свободы в каждом  $\{g_0\}^T = \{w \ \theta\}$ , где  $\{g_0\}$  – вектор узловых степеней свободы конечного элемента;  $\theta = dw/dr$  – угол поворота в радиальном направлении (рис. 2).

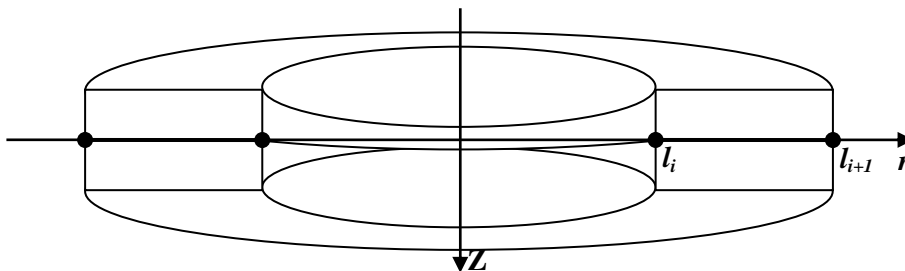


Рис. 2. Осесимметричный конечный элемент для моделирования прогибов тонких круглых пластин

Для построения математической модели применим вариационный принцип Лагранжа [1, 4, 8], который в случае круглой тонкой пластины можно переписать в виде

$$\begin{Bmatrix} - \\ g \end{Bmatrix}^T \{R\} = \int_{l_i}^{l_{i+1}} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} - \\ \varepsilon \end{Bmatrix}^T \{\sigma\} dz d\varphi dr, \quad (2)$$

где  $\{g\}^T = \{w_i \ \theta_i \ w_{i+1} \ \theta_{i+1}\}$  – вектор перемещений;  $\{R\}^T = \{R_{zi} \ R_{\theta i} \ R_{zi+1} \ R_{\theta i+1}\}$  – вектор внешних усилий;  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_r \ \varepsilon_\varphi \ \gamma_{rz}\}$  – вектор деформаций;  $\{\sigma\}^T = \{\sigma_r \ \sigma_\varphi \ \tau_{rz}\}$  – вектор напряжений;  $l_i$  – координата  $i$ -го узла; черта над переменной означает вариацию признака.

Будем аппроксимировать значения искомой функции  $w(r)$  и ее первой производной  $\theta$  следующими полиномами, обеспечивающими существование функционала вариационной задачи (2) [6]:

$$w(r) = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + a_4 r^3; \quad \theta(r) = a_2 + 2a_3 r + 3a_4 r^2. \quad (3)$$

Так как соотношения (3) справедливы для всех точек конечного элемента, для его узлов получим

$$\{g\} = [A]\{a\},$$

$$\text{где } \{a\}^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}; \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & l_i & l_i^2 & l_i^3 \\ 0 & 1 & 2l_i & 3l_i^2 \\ 1 & l_{i+1} & l_{i+1}^2 & l_{i+1}^3 \\ 0 & 1 & 2l_{i+1} & 3l_{i+1}^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\{a\} = [A]^{-1}\{g\}. \quad (4)$$

## 2. Осесимметричный конечный элемент для моделирования прогибов тонкой круглой пластины

Для тонкой круглой пластины будут отсутствовать сдвиговые деформации, т. е. векторы деформаций и напряжений будут содержать только по две компоненты. Тогда принцип возможных перемещений (2) можно будет переписать следующим образом:

$$\left\{ \bar{g} \right\}^T \{R\} = 2\pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{l_i}^{l_{i+1}} \left( \bar{\varepsilon}_r \sigma_r + \bar{\varepsilon}_\varphi \sigma_\varphi \right) r dr dz. \quad (5)$$

Закон Гука [1, 6] примет вид

$$\{\sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \{\varepsilon\}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{g} \right\}^T \{R\} &= 2\pi \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{l_i}^{l_{i+1}} \left( \bar{\varepsilon}_r (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi) + \bar{\varepsilon}_\varphi (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r) \right) r dr dz = \\ &= 2\pi \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{l_i}^{l_{i+1}} \left( \bar{\varepsilon}_r \varepsilon_r + \nu \bar{\varepsilon}_r \varepsilon_\varphi + \bar{\varepsilon}_\varphi \varepsilon_\varphi + \nu \bar{\varepsilon}_\varphi \varepsilon_r \right) r dr dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользовавшись формулами Коши (1) и соотношениями (3), получим

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \frac{1}{r} \theta_r \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} Cr \\ \frac{1}{r} C\varphi \end{bmatrix} \{a\}, \quad (8)$$

где  $\{Cr\} = \{0 \ 0 \ 2 \ 6r\}$ ;  $\{C\varphi\} = \{0 \ 1 \ 2r \ 3r^2\}$ .

Подставляя (4) в (8), можно получить выражение

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{bmatrix} Cr \\ \frac{1}{r} C\varphi \end{bmatrix} [A]^{-1} \{g\}$$

или

$$\varepsilon_r = -z \{Q_r\} \{g\}; \quad \varepsilon_\varphi = -z \frac{1}{r} \{Q_\varphi\} \{g\}, \quad (9)$$

где

$$[Q_r] = \begin{bmatrix} \frac{6(l_1 + l_2 - 2x)}{(l_1 - l_2)^3} & -\frac{2(l_1 + 2l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} & -\frac{6(l_1 + l_2 - 2x)}{(l_1 - l_2)^3} & -\frac{2(2l_1 + l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} \end{bmatrix};$$

$$[Q_\varphi] = \begin{bmatrix} -\frac{6(l_1 - x) \cdot (12 - x)}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{(l_2 - x) \cdot (2l_1 + l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} & \frac{6(l_1 - x) \cdot (l_2 - x)}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{(l_1 - x) \cdot (l_1 + 2l_2 - 3x)}{(l_1 - l_2)^2} \end{bmatrix}.$$

Подставляя (9) в (7) и выполняя необходимые преобразования, несложно вычислить

$$\{R\} = 2\pi \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left[ \int_{l_i}^{l_{i+1}} \left( r \{Q_r\}^T \{Q_r\} + \nu \{Q_r\}^T \{Q_\varphi\} + \nu \{Q_\varphi\}^T \{Q_r\} + \frac{1}{r} \{Q_\varphi\}^T \{Q_\varphi\} \right) dr \right] \{g\}. \quad (10)$$

Перепишем (10) в виде

$$\{R\} = [k] \{g\}, \quad (11)$$

где  $[k] = D_\varphi \left( [K_{rr}] + \nu [K_{r\varphi}] + \nu [K_{\varphi r}] + [K_{\varphi\varphi}] \right)$  – локальная матрица жесткости;  $D_\varphi = 2\pi \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ ;

$$[K_{rr}] = \int_{l_i}^{l_{i+1}} r \{Q_r\}^T \{Q_r\} dr; \quad [K_{r\varphi}] = \int_{l_i}^{l_{i+1}} \{Q_r\}^T \{Q_\varphi\} dr; \quad [K_{\varphi r}] = \int_{l_i}^{l_{i+1}} \{Q_\varphi\}^T \{Q_r\} dr; \quad [K_{\varphi\varphi}] = \int_{l_i}^{l_{i+1}} \frac{1}{r} \{Q_\varphi\}^T \{Q_\varphi\} dr.$$

Все интегралы в (11) могут быть вычислены точно:

$$K_{rr} = \begin{bmatrix} -\frac{6l_1 + 6l_2}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{4l_1 + 2l_2}{(l_1 - l_2)^2} & \frac{6l_1 + 6l_2}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{2l_1 + 4l_2}{(l_1 - l_2)^2} \\ \frac{4l_1 + 2l_2}{(l_1 - l_2)^2} & 1 - \frac{4l_1}{l_1 - l_2} & -\frac{4l_1 + 2l_2}{(l_1 - l_2)^2} & 1 - \frac{2l_1}{l_1 - l_2} \\ \frac{6l_1 + 6l_2}{(l_1 - l_2)^3} & -\frac{4l_1 + 2l_2}{(l_1 - l_2)^2} & \frac{6l_1 + 6l_2}{(l_1 - l_2)^3} & -\frac{2l_1 + 4l_2}{(l_1 - l_2)^2} \\ \frac{2l_1 + 4l_2}{(l_1 - l_2)^2} & 1 - \frac{2l_1}{l_1 - l_2} & -\frac{2l_1 + 4l_2}{(l_1 - l_2)^2} & \frac{4l_2}{l_1 - l_2} - 1 \end{bmatrix};$$

$$K_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} k_{r\varphi 11} & k_{r\varphi 12} & k_{r\varphi 13} & k_{r\varphi 14} \\ k_{r\varphi 21} & k_{r\varphi 22} & k_{r\varphi 23} & k_{r\varphi 24} \\ k_{r\varphi 31} & k_{r\varphi 32} & k_{r\varphi 33} & k_{r\varphi 34} \\ k_{r\varphi 41} & k_{r\varphi 42} & k_{r\varphi 43} & k_{r\varphi 44} \end{bmatrix},$$

где

$$k_{r\varphi11} = -k_{r\varphi31} = -k_{r\varphi13} = k_{r\varphi33} = -\frac{3 \cdot (8 \cdot l_1 \cdot l_2^3 - 8 \cdot l_1^3 \cdot l_2 + l_1^4 - l_2^4 + 12 \cdot l_1^2 \cdot l_2^2 \cdot \ln(l_1) - 12 \cdot l_1^2 \cdot l_2^2 \cdot \ln(l_2))}{(l_1 - l_2)^6},$$

$$k_{r\varphi21} = k_{r\varphi12} = -k_{r\varphi32} = -k_{r\varphi23} = -\frac{9 \cdot l_1^2 \cdot l_2 - l_1^3 + 27 \cdot l_1 \cdot l_2^2 + l_2^3}{2 \cdot (l_1 - l_2)^4} - \frac{6 \cdot l_1 \cdot l_2^2 \cdot (2 \cdot l_1 + l_2)}{(l_1 - l_2)^5} \cdot (\ln(l_2) - \ln(l_1));$$

$$k_{r\varphi41} = -k_{r\varphi43} = -k_{r\varphi34} = k_{r\varphi14} = -\left[ \frac{l_1^3 + 27 \cdot l_1^2 \cdot l_2 + 9 \cdot l_1 \cdot l_2^2 - l_2^3}{2 \cdot (l_1 - l_2)^4} + \frac{6 \cdot l_1^2 \cdot l_2 \cdot (l_1 + 2l_2)}{(l_1 - l_2)^5} \cdot (\ln(l_2) - \ln(l_1)) \right];$$

$$k_{r\varphi22} = k_{r\varphi44} = \frac{7 \cdot l_1^2 \cdot l_2 - l_1^3 + 19 \cdot l_1 \cdot l_2^2 + l_1 \cdot l_2^3}{4 \cdot (l_1 - l_2)^3} + \frac{l_2^2 \cdot (2 \cdot l_1 + l_2)^2}{(l_1 - l_2)^4} \cdot (\ln(l_2) - \ln(l_1));$$

$$k_{r\varphi42} = k_{r\varphi24} = \frac{l_1^3 + 17 \cdot l_1^2 \cdot l_2 + 17 \cdot l_1 \cdot l_2^2 + l_2^3}{4 \cdot (l_1 - l_2)^3} + \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot (l_1 + 2 \cdot l_2) \cdot (2 \cdot l_1 + l_2)}{(l_1 - l_2)^4} \cdot (\ln(l_2) - \ln(l_1));$$

$$K_{r\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_1 - l_2} & 0 & -\frac{1}{l_1 - l_2} \\ -\frac{1}{l_1 - l_2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l_1 - l_2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{l_1 - l_2} & 0 & \frac{1}{l_1 - l_2} \\ \frac{1}{l_1 - l_2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{l_1 - l_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; K_{\varphi r} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{l_1 - l_2} & 0 & \frac{1}{l_1 - l_2} \\ \frac{1}{l_1 - l_2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{l_1 - l_2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{l_1 - l_2} & 0 & -\frac{1}{l_1 - l_2} \\ -\frac{1}{l_1 - l_2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{l_1 - l_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Локальная матрица жесткости в (11) может быть вычислена по следующей формуле:

$$[k] = D_r \begin{bmatrix} -\frac{12}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{6}{(l_1 - l_2)^2} & \frac{12}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{6}{(l_1 - l_2)^2} \\ \frac{6}{(l_1 - l_2)^2} & -\frac{4}{l_1 - l_2} & -\frac{6}{(l_1 - l_2)^2} & -\frac{2}{l_1 - l_2} \\ \frac{12}{(l_1 - l_2)^3} & -\frac{6}{(l_1 - l_2)^2} & -\frac{12}{(l_1 - l_2)^3} & -\frac{6}{(l_1 - l_2)^2} \\ \frac{6}{(l_1 - l_2)^2} & -\frac{2}{l_1 - l_2} & -\frac{6}{(l_1 - l_2)^2} & -\frac{4}{l_1 - l_2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $D_r = \frac{5\pi r E h^3}{36(1-\nu^2)}$ .

После вычисления локальных матриц жесткости осуществлялось построение глобальной матрицы жесткости по формуле

$$[K_{2j,2j}] = [K_{2j,2j}] + [k_j], \quad j = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где  $[K_{2j,2j}]$  – подматрица глобальной матрицы жесткости;  $[k_j]$  – локальная матрица жесткости  $j$ -го конечного элемента, вычисляемая по формулам (11) или (12);  $N$  – количество конечных элементов.

После построения глобальной матрицы жесткости формируется вектор узловых усилий  $\{R\}$ , содержащий суммарные нагрузки, действующие на всю круглую пластину. В случае рав-

номерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  компоненты вектора узловых усилий  $\{R\}$  будут вычисляться по формуле [8]

$$R_{2i} = -q \cdot \pi \cdot [(i+1)^2 - (i)^2] \cdot \Delta r^2, \quad (14)$$

где  $q$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки;  $i$  – номер конечного элемента;  $\Delta r$  – радиус осесимметричного конечного элемента.

После формирования вектора внешних узловых нагрузок учитываются граничные условия и решается система линейных алгебраических уравнений вида (11) с глобальной матрицей, вычисленной по формуле (13).

### 3. Конечнэлементное моделирование трехслойной круглой пластины

При моделировании прогибов тонкой круглой трехслойной пластины для несущих слоев примем гипотезы Кирхгофа [1, 4, 9], как и для случая круглой тонкой пластины. В заполнителе в отличие от несущих слоев будут присутствовать сдвиговые деформации  $\gamma_{rz}$ .

Воспользуемся принципом возможных перемещений (2), который в случае трехслойной пластины перепишем в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{g} \right\}^T \{R\} = & \int_0^{2\pi} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}+h_1} \left\{ \bar{\varepsilon}^{-1} \right\}^T \left\{ \sigma^1 \right\} dz d\varphi r dr + \int_0^{2\pi} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \left\{ \bar{\varepsilon}^0 \right\}^T \left\{ \sigma^0 \right\} dz d\varphi r dr + \\ & + \int_0^{2\pi} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{-\frac{h_0}{2}-h_2} \left\{ \bar{\varepsilon}^{-2} \right\}^T \left\{ \sigma^2 \right\} dz d\varphi r dr, \end{aligned}$$

где цифра в индексе означает номер слоя пластины, 0 соответствует заполнителю.

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\left\{ \bar{g} \right\}^T \{R\} = 2\pi \left[ \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}+h_1} \left( \bar{\varepsilon}_r^{-1} \sigma_r^1 + \bar{\varepsilon}_\varphi^{-1} \sigma_\varphi^1 \right) dz r dr + \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \left( \bar{\varepsilon}_r^0 \sigma_r^0 + \bar{\varepsilon}_\varphi^0 \sigma_\varphi^0 + \bar{\gamma}_{rz}^0 \tau_{rz}^0 \right) dz r dr + \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{-\frac{h_0}{2}-h_2} \left( \bar{\varepsilon}_r^{-2} \sigma_r^2 + \bar{\varepsilon}_\varphi^{-2} \sigma_\varphi^2 \right) dz r dr \right]. \quad (15)$$

Аналогично выражениям (9) можно найти

$$\gamma_{rz} = -z \{Q_\varphi\} \{g\}. \quad (16)$$

Для несущих слоев закон Гука будет иметь вид (6), для заполнителя – вид

$$\left\{ \sigma^0 \right\} = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix} \left\{ \varepsilon^0 \right\}. \quad (17)$$

Подставляя (6) и (17) в (15), получим

$$\left\{ \bar{g} \right\}^T \{R\} = 2\pi \left[ \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}+h_1} \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left( \bar{\varepsilon}_r^{-1} \varepsilon_r^1 + \nu_1^{-1} \bar{\varepsilon}_\varphi^{-1} \varepsilon_\varphi^1 + \bar{\varepsilon}_\varphi^{-1} \varepsilon_r^1 + \nu_1^{-1} \bar{\varepsilon}_r^{-1} \varepsilon_\varphi^1 \right) dz r dr + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \left( \varepsilon_r \varepsilon_r^0 + \nu_0 \varepsilon_r^0 \varepsilon_\varphi^0 + \varepsilon_\varphi \varepsilon_\varphi^0 + \nu_0 \varepsilon_\varphi^0 \varepsilon_r^0 + \frac{1-\nu_0}{2} \gamma_{rz}^0 \tau_{rz}^0 \right) dz r dr + \\
 & \left. + \int_{l_j}^{l_{j+1}} \int_{-\frac{h_0}{2}-h_2}^{-\frac{h_0}{2}} \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \left( \varepsilon_r \varepsilon_r^{-2} + \nu_2 \varepsilon_r^{-2} \varepsilon_\varphi^{-2} + \varepsilon_\varphi \varepsilon_\varphi^{-2} + \nu_2 \varepsilon_\varphi^{-2} \varepsilon_r^{-2} \right) dz r dr \right].
 \end{aligned}$$

С помощью (9) и (16), интегрируя по  $z$ , последнее выражение преобразуется к виду (11), где

$$\begin{aligned}
 [k] = 2\pi \left[ \sum_{i=1}^2 \left( \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \frac{(h_0 + 2h_i)^3 - h_0^3}{24} \left( [K_{rr}] + \nu_i [K_{r\varphi}] + \nu_i [K_{\varphi r}] + [K_{\varphi\varphi}] \right) \right) \right. \\
 \left. \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \frac{h_0^3}{12} \left( [K_{rr}] + \nu_0 [K_{r\varphi}] + \nu_0 [K_{\varphi r}] + [K_{\varphi\varphi}] + \frac{1-\nu_0}{2} [K_{rz}] \right) \right]; \tag{18} \\
 [K_{rz}] = \int_{l_i}^{l_{i+1}} r \{Q_\varphi\}^T \{Q_\varphi\} dr
 \end{aligned}$$

или

$$[K_{rz}] = \begin{bmatrix} -\frac{3l_1 + 3l_2}{5l_1 - 5l_2} & \frac{l_2}{10} & \frac{3l_1 + 3l_2}{5l_1 - 5l_2} & \frac{l_1}{10} \\ \frac{l_2}{10} & -\frac{(l_1 - l_2)(3l_1 + l_2)}{30} & -\frac{l_2}{10} & \frac{l_1^2}{60} - \frac{l_2^2}{60} \\ \frac{3l_1 + 3l_2}{5l_1 - 5l_2} & -\frac{l_2}{10} & -\frac{3l_1 + 3l_2}{5l_1 - 5l_2} & -\frac{l_1}{10} \\ \frac{l_1}{10} & \frac{l_1^2}{60} - \frac{l_2^2}{60} & -\frac{l_1}{10} & -\frac{(l_1 - l_2)(l_1 + 3l_2)}{30} \end{bmatrix}.$$

Остальные матрицы вычисляются по формулам (11).

После вычисления локальных матриц жесткости (18) по формуле (13) формируется глобальная матрица жесткости. Вектор внешних узловых усилий вычисляется по формуле (14).

#### 4. Верификация предложенной математической модели

Для верификации предложенной математической модели рассмотрим ряд задач, для которых известны аналитические решения.

*Модельная задача 1.* Рассмотрим круглую тонкую пластину, находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки.

Как известно [1], прогиб в случае шарнирного опирания будет вычисляться по формуле

$$w(r) = -\frac{qR^4}{64D} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right),$$

а в случае защемления – по формуле

$$w(r) = -\frac{qR^4}{64D} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)^2.$$

Примем радиус пластины  $r = 1$  м, толщину  $h = 0,05$  м, модуль упругости  $E = 0,829 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q = 1$  МПа. Будем дискретизировать пластину на восемь конечных элементов. Резуль-

таты решения показаны на рис. 3. Локальную матрицу жесткости будем вычислять по формулам (11).

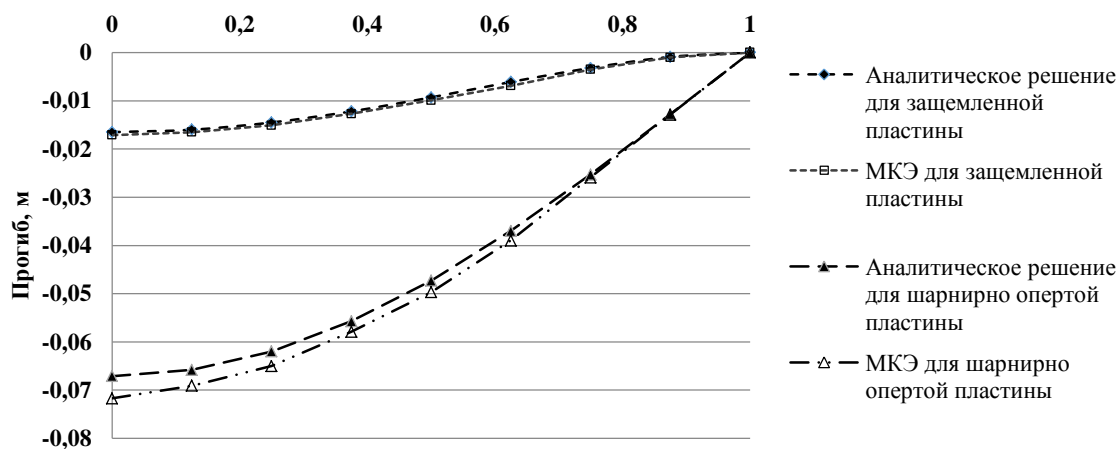


Рис. 3. Прогиб тонкой круглой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки

Максимальный прогиб, найденный с помощью предложенного алгоритма, составил для защемленной пластины 0,0171 м, с помощью точного решения – 0,0165 м. Для шарнирно опертой пластины были получены значения 0,0717 и 0,0671 м соответственно. Таким образом, максимальная погрешность не превышала 7 % при небольшом числе конечных элементов.

*Модельная задача 2.* Рассмотрим защемленную по контуру трехслойную круглую пластину радиусом  $r = 1$  м под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью 10 МПа [1]. В качестве несущих слоев стержня используется алюминиевый сплав Д16Т толщиной 0,04 м, модулем упругости  $E=0,1156 \cdot 10^6$  МПа и модулем объемной деформации  $K=0,8 \cdot 10^5$  МПа. Заполнителем является политетрафторэтилен толщиной 0,2 м, модулем упругости  $E=0,482 \cdot 10^4$  МПа и модулем объемной деформации  $K=0,47 \cdot 10^4$  МПа. Пластина дискретизировалась восемью осесимметричными конечными элементами.

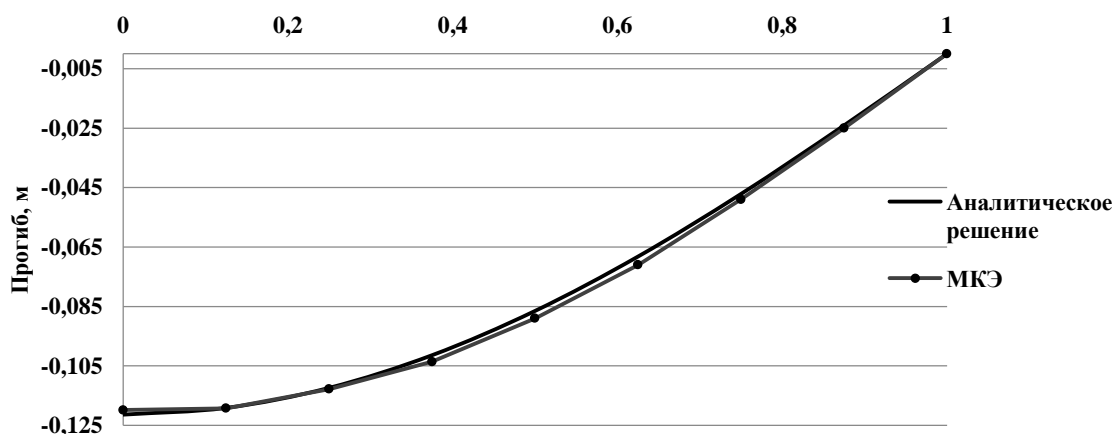


Рис. 4. Прогиб трехслойной круглой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки

Решение с помощью предложенного алгоритма сравнивалось с решением из [1] (рис. 4). Матрица жесткости вычислялась по формулам (18). Максимальная погрешность решений не превышала 3 %.

Кроме того, верификация дополнительно осуществлялась на задачах моделирования напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней. Погрешность найденных значений их прогиба не превышала 5 %.



### 5. Вычислительный эксперимент

С помощью созданной математической модели и разработанного на ее основании программного обеспечения проведем исследование влияния толщины заполнителя на максимальный прогиб. Для этого рассмотрим круглую трехслойную пластину, описанную в модельной задаче 2. Будем варьировать толщину заполнителя от 0 до 0,5 м. Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 5.

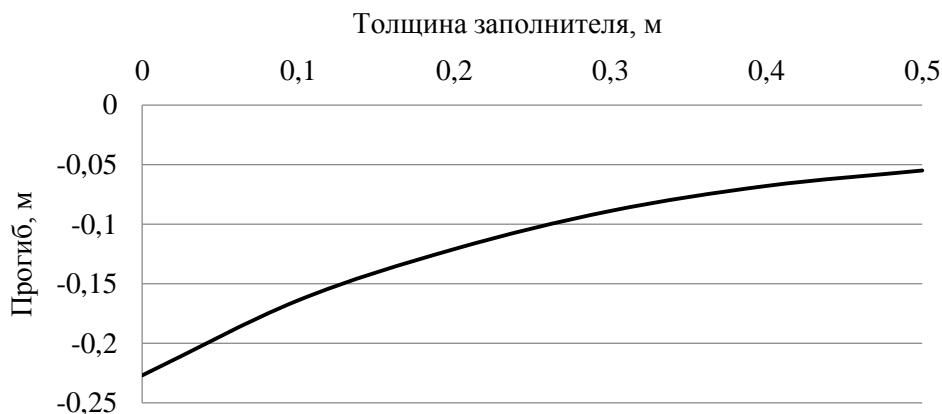


Рис. 5. Зависимость максимального прогиба тонкой трехслойной круглой пластины от толщины заполнителя

Из рис. 5 видно, что максимальный прогиб нелинейно зависит от толщины заполнителя, размеры которого влияют как на массу конструкции в целом, так и на ее термофизические характеристики, позволяя минимизировать эффект термосиловых напряжений и обеспечивая необходимые прочностные характеристики.

### Заключение

Согласно результатам проведенного моделирования предлагаемая математическая модель и численный алгоритм ее реализации могут быть использованы для исследования напряженно-деформированного состояния тонких трехслойных круглых пластин.

Получены соотношения для аналитического вычисления локальных матриц жесткости, что минимизирует погрешность при нахождении глобальной матрицы жесткости и позволяет ускорить процесс ее формирования.

Достоинством предлагаемой математической модели и методики ее применения является использование осесимметричных конечных элементов, позволяющих для дискретизации исследуемой пластины применять меньшее число узлов, чем при использовании элементов других типов. Кроме того, глобальная матрица жесткости имеет ленточную структуру с четырьмя ненулевыми диагоналями, что в целом позволяет экономить ресурсы оперативной памяти и уменьшить время нахождения решения по сравнению с такими широко известными конечно-элементными программными комплексами, как КОМПАС-3D, ANSYS, SolidWorks [7, 10, 11].

### Список литературы

1. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2006. – 379 с.
2. Леоненко, Д.В. Собственные и вынужденные колебания трехслойных элементов конструкций, связанных с упругой средой / Д.В. Леоненко // Автореф. дис. ... докт. техн. наук : 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Минск : БНТУ, 2011. – 45 с.
3. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности : учеб. для вузов / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.

4. Андреев, А.Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания / А.Н. Андреев, Ю.В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 2001. – 288 с.
5. Быховцев, В.Е. Компьютерное моделирование прогиба диска перекрытия в структуре каркасного здания / В.Е. Быховцев, А.В. Быховцев, К.С. Курочка // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2001. – № 2. – С. 43–48.
6. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах / М.А. Журавков. – Минск : БГУ, 2002. – 456 с.
7. Большаков, В.П. Основы 3D-моделирования. Изучаем работу в AutoCAD, КОМПАС-3D, SolidWorks, Inventor : учеб. курс / В.П. Большаков, А.Л. Бочков. – СПб. : Питер, 2013. – 304 с.
8. Быховцев, В.Е. Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В.Е. Быховцев, А.В. Быховцев, В.В. Бондарева. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 215 с.
9. Журавков, М. А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах / М. А. Журавков. – Минск : БГУ, 2002. – 456 с.
10. Zienkiewicz, O.C. The finite element method for solid and structural mechanics. Sixth edition / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford : Elsevier, 2005. – 631 p.
11. Курочка, К.С. Моделирование вязкоупругого деформирования неоднородных в плане тонких плит сложной конфигурации / К.С. Курочка // Инженерно-физический журнал. – 2008. – Т. 81, № 4. – С. 778–788.

Поступила 5.08.2013

*Гомельский государственный технический  
университет им. П.О. Сухого,  
Гомель, пр. Октября, 48  
e-mail: kurochka@gstu.by*

**K.S. Kurachka**

### **FINITE ELEMENT MODELING OF THIN CIRCULAR SANDWICH PLATES DEFLECTION**

A mathematical model of a thin circular sandwich plate being under the vertical load is proposed. The model employs the finite element method and takes advantage of an axisymmetric finite element that leads to the small dimension of the resulting stiffness matrix and sufficient accuracy for practical calculations. The analytical expressions for computing local stiffness matrices are found, which can significantly speed up the process of forming the global stiffness matrix and increase the accuracy of calculations. A software is under development and verification. The discrepancy between the results of the mathematical model and those of analytical formulas for homogeneous thin circular sandwich plates does not exceed 7%.