

УДК 519.714.5

DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-1-40-65

Оригинальная статья

Original Article

Дизъюнктивные и конъюнктивные разложения не полностью определенных булевых функций в бинарной диаграмме решений

П. Н. Бибилло

Объединенный институт проблем информатики

Национальной академии наук Беларуси,

ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь

E-mail: bibilo@newman.bas-net.by

Аннотация

Цели. Рассматриваются задачи минимизации числа функций – кофакторов (подфункций) разложения Шеннона, находящихся на одном уровне бинарной диаграммы решений (Binary Decision Diagram, BDD), которая представляет систему не полностью определенных (частичных) булевых функций. Для сокращения числа функций предлагается находить подмножество таких функций, которые могут быть выражены в виде алгебраических разложений – дизъюнкций либо конъюнкций других доопределенных частичных функций. При этом ориентированный граф вхождений функций в разложения не должен содержать контуров.

Методы. Нахождение дизъюнктивных и конъюнктивных разложений требует поиска соответствующих доопределений частичных функций. Задача определения наибольшего числа раздельных алгебраических разложений сводится к нахождению взвешенного строчного покрытия булевой матрицы вхождений функций системы в отдельные разложения. Задача нахождения согласованных доопределений частичных функций для различного вида совместных разложений сводится к составлению и решению логических уравнений.

Результаты. Показано, что составляемые логические уравнения легко преобразуются к конъюнктивной нормальной форме (КНФ), а нахождение корней таких уравнений сведено к задаче выполнимости булевой формулы, представленной в виде КНФ, для решения которой известны эффективные методы и программы. **Заключение.** Предложенные алгоритмы могут быть обобщены для других видов алгебраических разложений, когда кроме логических операций дизъюнкции и конъюнкции могут использоваться отрицания данных операций. Применение предложенных алгоритмов и уже известных алгоритмов минимизации многоуровневых BDD-представлений систем частичных функций позволяет получать лучшие результаты технологически независимой логической оптимизации – начального этапа синтеза логических схем.

Ключевые слова: система частичных булевых функций, доопределение частичной булевой функции, бинарная диаграмма решений, алгебраические разложения булевых функций, разложение Шеннона, проблема выполнимости

Для цитирования. Бибилло, П. Н. Дизъюнктивные и конъюнктивные разложения не полностью определенных булевых функций в бинарной диаграмме решений / П. Н. Бибилло // Информатика. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 40–65. – DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-1-40-65.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 06.02.2025

Подписана в печать | Accepted 21.02.2025

Опубликована | Published 31.03.2025

Disjunctive and conjunctive decompositions of incompletely defined Boolean functions in a Binary Decision Diagram

Petr N. Bibilo

*The United Institute of Informatics Problems
of the National Academy of Sciences of Belarus,
st. Surganova, 6, Minsk, 220012, Belarus
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by*

Abstract

Objectives. The problems of minimizing the number of cofactors (subfunctions) of the Shannon expansions located at the same level of the BDD, representing a system of incompletely defined (partial) Boolean functions, are considered. To reduce the number of functions, it is proposed to find a subset of such functions that can be expressed as algebraic decompositions of disjunctions or conjunctions of other predefined partial functions, while the directed graph of function occurrences in decompositions should not contain contours.

Methods. Finding disjunctive and conjunctive decompositions requires searching for appropriate additional definitions of partial functions. Finding the largest number of separate algebraic decompositions reduces to the problem of finding a weighted row cover of a Boolean matrix of occurrences of system functions in separate decompositions. The task of finding consistent predefinitions of partial functions for various types of joint decompositions is reduced to the formulation and solution of logical equations.

Results. It is shown that the constructed logical equations can be easily transformed to a conjunctive normal form (CNF), and finding the roots of such equations is reduced to the problem of satisfiability of a Boolean formula presented in the form of CNF, for which effective methods and programs are known.

Conclusion. The proposed algorithms can be generalized to other types of algebraic decompositions, when, in addition to the logical operations of disjunction and conjunction, negations of these operations can be used. The application of the proposed algorithms and already known algorithms for minimizing multilevel BDD representations of partial function systems allows us to obtain the best results of technologically independent logical optimization, the initial stage of logic circuit synthesis.

Keywords: system of partial Boolean functions, additional definition of a partial Boolean function, Binary Decision Diagram, algebraic decompositions of Boolean functions, Shannon expansion, SAT-problem

For citation. Bibilo P. N. *Disjunctive and conjunctive decompositions of incompletely defined Boolean functions in a Binary Decision Diagram*. Informatika [Informatics], 2025, vol. 22, no. 1, pp. 40–65 (In Russ.). DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-1-40-65.

Conflict of interest. The author declares of no conflict of interest.

Введение. BDD строятся на основе разложений Шеннона булевых функций. Они нашли широкое применение в качестве представлений систем полностью определенных булевых функций на этапе технологически независимой оптимизации [1], после которого выполняется второй этап синтеза логической схемы – технологическое отображение в требуемый базис логических элементов. Использование дизъюнктивных и конъюнктивных разложений подфункций (кофакторов), получаемых в результате применения разложений Шеннона, которые представляют системы полностью определенных булевых функций, оказалось полезной дополнительной процедурой, позволяющей уменьшать площадь функциональных блоков цифровых заказных сверхбольших интегральных схем (СБИС) [2, 3].

В настоящей работе рассматриваются задачи нахождения разложений подмножества не полностью определенных (частичных) булевых функций исходной системы в виде алгебраических (двуоперандных) дизъюнкций либо конъюнкций других частичных функций этой системы, названных базисными функциями. В качестве функций системы рассматриваются кофакторы одного уровня графа BDD [3]. При решении данной задачи находится максимальное по мощности подмножество функций системы, представимых в виде дизъюнкций либо конъюнкций. При этом ориентированный граф вхождений функций в разложения, т. е. граф зависимо-

сти разлагаемых функций от базисных (и уже разложенных), не должен содержать контуров. Нахождение таких разложений требует для базисных функций замен некоторых неопределенных значений функций определенными – нулями либо единицами, чтобы разложение могло быть выполнено. Использование одной и той же частичной функции для разложений нескольких функций системы является более сложной задачей, так как требует согласованных доопределений всех функций, участвующих в совместном разложении. Проверка существования согласованных доопределений сводится к составлению и решению логического уравнения. Корни уравнения дают требуемые замены неопределенных значений определенными для каждой из частичных функций, участвующих в совместном разложении. Получаемые уравнения легко преобразуются к форме КНФ. Широко известная задача нахождения хотя бы одного корня такого уравнения называется в литературе «выполнимость КНФ» [4]. Для решения задачи выполнимости КНФ известны эффективные методы и программы, называемые SAT-solvers [5]. Они позволяют решать задачи большой размерности, когда число переменных достигает нескольких миллионов. Предлагаемые эвристические алгоритмы нахождения алгебраических разложений ориентированы на решение практических задач большой размерности, так как на одном уровне BDD может быть достаточно много (десятки и сотни) частичных функций, сокращение числа которых возможно выполнить предлагаемыми алгоритмами.

Основные определения. Булевыми называются двоичные $(0, 1)$ функции $f(x)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ двоичных (булевых) переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть V^x – булево пространство, построенное над переменными булева вектора $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Элементами этого пространства являются n -компонентные наборы (векторы) x^* нулей и единиц. Булева функция, значения 0, 1 которой определены на всех элементах $x^* \in V^x$, называется *полностью определенной*. Если же на некоторых элементах булева пространства V^x значения функции не определены, то такая функция будет *не полностью определенной*, или *частичной*. Частичная булева функция принимает единичное значение на элементах x^* подмножества M_f^1 булева пространства V^x и нулевое значение на элементах подмножества M_f^0 . На всех остальных элементах пространства V^x , образующих подмножество M_f^- пространства V^x , значения частичной функции не определены. Подмножество M_f^- будем называть также областью *неопределенных значений* частичной функции. Неопределенное значение функции обозначается символом «–». Очевидно, что $M_f^1 \cap M_f^0 = \emptyset$, $M_f^1 \cap M_f^- = \emptyset$, $M_f^0 \cap M_f^- = \emptyset$, $V^x = M_f^0 \cup M_f^1 \cup M_f^-$.

Частичные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны, если и только если

$$M_{f_1}^1 = M_{f_2}^1, \quad M_{f_1}^0 = M_{f_2}^0, \quad M_{f_1}^- = M_{f_2}^-.$$

Будем называть частичные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *взаимно инверсными* ($f_2 = \overline{f_1}$, $f_1 = \overline{f_2}$), если и только если

$$M_{f_1}^1 = M_{f_2}^0, \quad M_{f_1}^0 = M_{f_2}^1, \quad M_{f_1}^- = M_{f_2}^-.$$

Таким образом, взаимно инверсные частичные функции имеют одну и ту же область неопределенных значений.

Частичная функция f_i реализуется частичной (либо полностью определенной) функцией f_j (обозначается $f_i \prec f_j$), если и только если

$$M_{f_i}^1 \subseteq M_{f_j}^1, \quad M_{f_i}^0 \subseteq M_{f_j}^0.$$

Функцию f_j называют *доопределением* функции f_i . Для пары полностью определенных булевых функций f_i , f_j отношение реализации является отношением равенства. Пусть требу-

ется проверить отношение реализации $f_i(x) \prec f_j(x)$, при этом функции заданы таблицей истинности. В столбцах значений функций $f_i(x)$, $f_j(x)$ проверим для каждой пары значений этих функций выполнение битовых отношений реализации: $0 \prec 0$; $1 \prec 1$; $- \prec -$; $- \prec 0$; $- \prec 1$.

Если для каждой пары соответствующих значений функций $f_i(x)$, $f_j(x)$ выполняется одно (любое) из пяти перечисленных битовых отношений, то выполняется и отношение реализации $f_i(x) \prec f_j(x)$. Если же функции $f_i(x)$, $f_j(x)$ таковы, что для каждой пары их значений выполняется $0 \prec 0$ либо $1 \prec 1$, то это означает, что функции $f_i(x)$, $f_j(x)$ являются *полностью определенными и равными*.

Под *векторной булевой функцией* $f(x)$ будем понимать упорядоченную систему частичных булевых функций $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, значениями векторных функций на элементах x^* булева пространства являются m -компонентные троичные векторы $f(x^*)$. Неупорядоченное множество $\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ компонент векторной функции $f(x)$ будем обозначать $F(x)$ либо F .

Алгебраические разложения частичных функций. *Задача 1.* Заданы частичные булевы функции $\varphi(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$. Требуется найти, если это возможно, такие доопределения $\varphi^*(x)$, $f_1^*(x)$, $f_2^*(x)$ соответствующих функций (запишем это в виде $\varphi(x) \prec \varphi^*(x)$, $f_1(x) \prec f_1^*(x)$, $f_2(x) \prec f_2^*(x)$), что будет выполняться одно из алгебраических разложений:

$$\varphi^*(x) \prec (f_1^*(x) \vee f_2^*(x)), \quad (1)$$

$$\varphi^*(x) \prec (f_1^*(x) \& f_2^*(x)). \quad (2)$$

Естественно, для каждого из разложений (1), (2) требуются свои доопределения функций $\varphi(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$. Логические операторы \vee (дизъюнкция), $\&$ (конъюнкция) в формулах (1), (2) называют также *выходными* функциями соответствующего разложения. В работе [6] логические операции над частичными булевыми функциями (троичными переменными) определены следующим образом:

функция f_1	0	0	0	-	-	-	1	1	1
функция f_2	0	-	1	0	-	1	0	-	1
отрицание \bar{f}_1	1	1	1	-	-	-	0	0	0
дизъюнкция $f_1 \vee f_2$	0	-	1	-	-	1	1	1	1
конъюнкция $f_1 \& f_2$	0	0	0	0	-	-	0	-	1

Для краткости назовем *алгебраическими* разложениями множество дизъюнктивных и конъюнктивных разложений функций заданной системы частичных булевых функций.

Утверждение 1. *Задача нахождения разложения (1) не имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий (3)–(5):*

$$(M_{f_1}^0 \cap M_{f_2}^0) \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (3)$$

$$M_{f_1}^1 \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset, \quad (4)$$

$$M_{f_2}^1 \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset. \quad (5)$$

Условие (3) говорит о том, что если найдется хотя бы один набор значений переменных, на котором обе функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ принимают значение нуль, а функция $\varphi(x)$ принимает значение единица, то через операцию дизъюнкции функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ нельзя выразить функцию $\varphi(x)$, так как дизъюнкция двух нулей не может быть равна единице. В случае условия (4) от значения функции $f_2(x)$ ничего не зависит. Дизъюнкция $f_1(x) \vee f_2(x)$ не может

принять значение ноль (значение ноль имеет функция $\varphi(x)$), так как $f_1(x)$ принимает значение единица, аналогично и для условия (5). Табл. 1 позволяет проверить возможность доопределения функций $\varphi(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ для проверки реализации $\varphi^*(x) \prec (f_1^*(x) \vee f_2^*(x))$. Рассмотрим третью строку табл. 1, в которой $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $\varphi(x)=\text{«} \rightarrow \text{»}$. Для выполнения дизъюнктивного разложения нужно заменить значение $\text{«} \rightarrow \text{»}$ на ноль: $\varphi(x)=0$. Аналогично можно доопределять значения $\text{«} \rightarrow \text{»}$ и для других строк из табл. 2, не содержащих пометку «Нет решения».

Таблица 1
Доопределение частичных функций
для дизъюнктивного разложения
Table 1
Redefinition of partial functions
for disjunctive decomposition

Значения исходных булевых функций Values of the original Boolean functions			Значения реализующих функций для разложения $\varphi^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ Values of implementing functions for decomposition $\varphi^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$		
f_1	f_2	φ	f_1^*	f_2^*	φ^*
0	0	0	0	0	0
0	0	1	Нет решения		
0	0	–	0	0	0
0	1	0	Нет решения		
0	1	1	0	1	1
0	1	–	0	1	1
0	–	0	0	0	0
0	–	1	0	1	1
0	–	–	0	0	0
			0	1	1
1	0	0	Нет решения		
1	0	1	1	0	1
1	0	–	1	0	1
1	1	0	Нет решения		
1	1	1	1	1	1
1	1	–	1	1	1
1	–	0	Нет решения		
1	–	1	1	–	1
1	–	–	1	–	1
–	0	0	0	0	0
–	0	1	1	0	1
–	0	–	0	0	0
			1	0	1
–	1	0	Нет решения		
–	1	1	–	1	1
–	1	–	–	1	1
–	–	0	0	0	0
–	–	1	1	–	1
			–	1	1
–	–	–	–	–	–

Таблица 2
Доопределение частичных функций для конъюнктивного разложения
Table 2
Redefinition of partial functions for conjunctive decomposition

Значения исходных булевых функций Values of the original Boolean functions			Значения реализующих функций для разложения $\varphi^* \prec (f_1^* \& f_2^*)$ Values of implementing functions for decomposition $\varphi^* \prec (f_1^* \& f_2^*)$		
f_1	f_2	φ	f_1^*	f_2^*	φ^*
0	0	0	0	0	0
0	0	1	Нет решения		
0	0	–	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	Нет решения		
0	1	–	0	1	0
0	–	0	0	0	0
0	–	1	Нет решения		
0	–	–	0	–	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	Нет решения		
1	0	–	1	0	0
1	1	0	Нет решения		
1	1	1	1	1	1
1	1	–	1	1	1
1	–	0	1	0	0
1	–	1	1	1	1
1	–	–	1	1	1
			1	0	0
–	0	0	0	0	0
–	0	1	Нет решения		
–	0	–	–	0	0
–	1	0	0	1	0
–	1	1	1	1	1
–	1	–	1	1	1
			0	1	0
–	–	0	0	–	0
			–	0	0
–	–	1	1	1	1
–	–	–	–	–	–

Утверждение 2. Задача нахождения разложения (2) не имеет решения тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из условий:

$$M_{f_1}^0 \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (6)$$

$$M_{f_2}^0 \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (7)$$

$$(M_{f_1}^1 \cap M_{f_2}^1) \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset. \quad (8)$$

Табл. 2 позволяет проверить возможность доопределения функций $\varphi(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ для проверки реализации $\varphi^*(\mathbf{x}) \prec (f_1^*(\mathbf{x}) \& f_2^*(\mathbf{x}))$. Таким образом, решение задачи 1 осуществляется с помощью табл. 1 и 2, позволяющих выполнить проверку и найти доопределенные функции $\varphi^*(\mathbf{x})$, $f_1^*(\mathbf{x})$, $f_2^*(\mathbf{x})$ либо убедиться, что таких функций не существует.

Пусть частичные функции $\varphi^*(\mathbf{x})$, $f_1^*(\mathbf{x})$, $f_2^*(\mathbf{x})$ являются доопределениями соответствующих функций $\varphi(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, т. е. выполняются реализации $\varphi(\mathbf{x}) \prec \varphi^*(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x}) \prec f_1^*(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x}) \prec f_2^*(\mathbf{x})$.

Утверждение 3. Если для тройки частичных функций $\varphi(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ не существует дизъюнктивное разложение $\varphi(\mathbf{x}) \prec (f_1(\mathbf{x}) \vee f_2(\mathbf{x}))$, то и для любых доопределений $\varphi^*(\mathbf{x})$, $f_1^*(\mathbf{x})$, $f_2^*(\mathbf{x})$ дизъюнктивные разложения $\varphi^*(\mathbf{x}) \prec (f_1^*(\mathbf{x}) \vee f_2^*(\mathbf{x}))$ также не существуют.

Аналогичное утверждение 4 справедливо и для конъюнктивного разложения.

Утверждение 4. Если для тройки частичных функций $\varphi(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ не существует конъюнктивное разложение $\varphi(\mathbf{x}) \prec (f_1(\mathbf{x}) \& f_2(\mathbf{x}))$, то и для любых доопределений $\varphi^*(\mathbf{x})$, $f_1^*(\mathbf{x})$, $f_2^*(\mathbf{x})$ конъюнктивные разложения $\varphi^*(\mathbf{x}) \prec (f_1^*(\mathbf{x}) \& f_2^*(\mathbf{x}))$ также не существуют.

Нахождение раздельных алгебраических разложений. Рассмотрим систему $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ частичных булевых функций. Чтобы найти все варианты алгебраических разложений, требуется перебор всех различных троек функций из системы F . Пусть k – число функций f_1, \dots, f_k . Тогда требуется рассмотреть $3 \times C_k^3$ (C_k^3 – число сочетаний из k функций по три, $k \geq 3$) вариантов проверки дизъюнктивных разложений: число всех различных неупорядоченных троек функций f_p , f_i , f_j равно C_k^3 , а для каждой тройки $\{f_p, f_i, f_j\}$ надо проверять три дизъюнктивных разложения $f_p = f_i \vee f_j$; $f_i = f_p \vee f_j$; $f_j = f_i \vee f_p$. Аналогично для каждой из C_k^3 троек функций надо перебирать три варианта при построении конъюнктивных разложений. Общий перебор составит $6C_k^3$ вариантов. Существование отдельных разложений можно проверять, используя табл. 1 и 2, в которых приводятся требуемые доопределения частичных функций для выполнения дизъюнктивных (табл. 1) и конъюнктивных (табл. 2) разложений.

Пусть оператор \odot обозначает любую из рассматриваемых алгебраических операций – конъюнкцию либо дизъюнкцию (рис. 1).

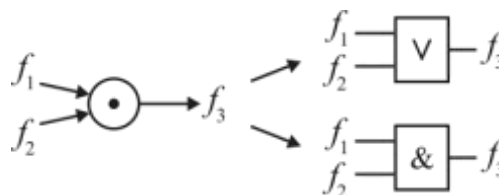


Рис. 1. Интерпретация оператора \odot

Fig. 1. Interpretation of the operator \odot

Обозначим через E множество найденных разложений $E = \{ E_1, \dots, E_q \}$, которые назовем *элементарными*. В алгебраическом разложении $f_p^* \prec f_i^* \odot f_j^*$ участвует тройка T функций. Функцию f_p^* элементарного разложения $f_p^* \prec f_i^* \odot f_j^*$ назовем *представимой*. Если для функции f_p системы F не найдено ни одного алгебраического разложения из функций системы F , то такую функцию назовем *непредставимой*. Однако непредставимые функции могут участвовать в разложениях представимых функций. Каждое элементарное разложение $f_p^* \prec f_i^* \odot f_j^*$ характеризуется парой неотрицательных целочисленных весов w_{f_i, f_i^*} , w_{f_j, f_j^*} для доопределенных функций f_i^* , f_j^* , которые назовем *базисными* функциями этого разложения. Вес w_{f_i, f_i^*} задает число наборов, на которых функция f_i доопределена до функции f_i^* , вес w_{f_j, f_j^*} – число наборов, на которых функция f_j доопределена до функции f_j^* . Если вес равен нулю, то для существования разложения данную функцию не потребовалось доопределять. Если функция f_p является непредставимой и не участвует ни в одном из разложений ни одной из представимых функций, то такие функции f_p удаляются из рассмотрения, так как предлагаемые далее алгоритмы для этих функций не предназначены. Представимые функции могут быть заменены дизъюнкциями либо конъюнкциями других функций. Дизъюнктивное разложение при схемной реализации соответствует логическому элементу ИЛИ (дизъюнктору), конъюнктивное – элементу И (конъюнктору).

Пару элементарных алгебраических разложений E_1 , E_2 назовем *раздельной* (либо будем говорить, что разложения E_1 , E_2 являются *раздельными*), если тройки T_1 , T_2 участвующих в этих разложениях функций не пересекаются: $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Очевидно, что в каждом раздельном разложении участвует своя тройка функций. Рассмотрим множество R^{sep} попарно *раздельных* разложений, т. е. таких, для которых попарные пересечения троек функций для каждой пары различных разложений из R^{sep} являются пустыми.

Пример 1. Пусть $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ являются кофакторами разложения Шеннона частичных функций r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 по переменной x_5 (рис. 2), т. е. $r_1 = \bar{x}_5 f_1 \vee x_5 f_2$, $r_2 = \bar{x}_5 f_2 \vee x_5 f_3$, $r_3 = \bar{x}_5 f_3 \vee x_5 f_5$, $r_4 = \bar{x}_5 f_4 \vee x_5 f_3$, $r_5 = \bar{x}_5 f_6 \vee x_5 f_7$. Требуется проверить, существуют ли элементарные разложения

$$f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*), f_7^* \prec (f_5^* \vee f_6^*)$$

для функций $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$, заданных в табл. 3, и найти соответствующие доопределения $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_5^*, f_6^*, f_7^*$.



Рис. 2. Бинарная диаграмма решений – разложение по переменной x_5
Fig. 2. Binary Decision Diagram – decomposition by variable x_5

Таблица 3
Система частичных булевых функцийTable 3
A system of partial Boolean functions

x_1 x_2 x_3 x_4	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0 0 0 0	–	–	–	–	–	–	–
0 0 0 1	0	–	1	–	0	1	–
0 0 1 0	1	0	1	1	–	0	–
0 0 1 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 0 0	0	0	–	1	0	–	1
0 1 0 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 1 0	–	1	–	1	1	0	–
0 1 1 1	–	–	–	–	–	–	–
1 0 0 0	–	0	1	0	0	–	1
1 0 0 1	–	–	–	–	0	–	–
1 0 1 0	0	0	0	0	–	–	0
1 0 1 1	–	–	–	–	1	1	–
1 1 0 0	–	–	–	–	–	–	–
1 1 0 1	1	1	–	1	–	–	–
1 1 1 0	–	–	–	–	–	1	–
1 1 1 1	–	–	–	–	–	0	1

В табл. 4 даны доопределения (показаны в скобках) функций, найденные с помощью табл. 1. Таким образом, из существования доопределений f_1^* , f_2^* , f_3^* , f_5^* , f_6^* , f_7^* функций следует, что элементарные разложения существуют. На наборе 0010 функции f_5^* и f_7^* имеют значение нуль, хотя согласно табл. 1 они могут быть доопределены и до единицы. Аналогичная ситуация на наборе 1001 для функций f_6^* , f_7^* , которые также доопределены до нуля. Заметим, что данные функции являются кофакторами в BDD по переменной x_5 (см. рис. 2) и будут подвергаться дальнейшим разложениям Шеннона. Как показано в работе [1], нулевые доопределения частичных булевых функций часто (но не всегда) являются целесообразными, так как уменьшают число кофакторов при дальнейшей минимизации BDD-представлений булевых функций.

Поэтому две представимые функции f_3 , f_7 не потребуют дальнейшей оптимизации, так как могут быть реализованы с помощью дизъюнкторов. Функция f_4 не участвует в разложениях, поэтому не была доопределена. Сумма весов доопределений базисных функций равна девяти. Логическая схема, соответствующая найденным разложениям, показана на рис. 3, а.

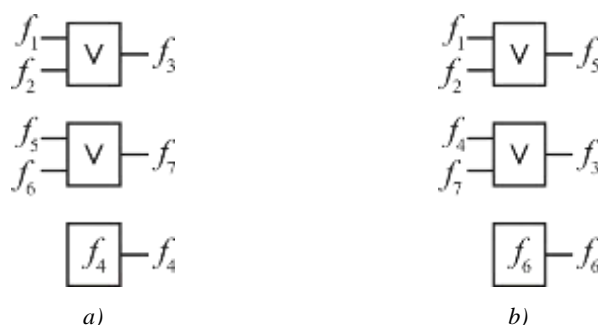


Рис. 3. Логические схемы: а) для первого множества отдельных разложений; б) для второго множества отдельных разложений

Fig. 3. Logic circuits: a) for the first set of separate decompositions; b) for the second set of separate decompositions

Таблица 4
Доопределенные функции из табл. 3

Table 4
Predefined functions from Table 3

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$	f_1^*	f_2^*	f_3^*	f_4	f_5^*	f_6^*	f_7^*
0 0 0 0	–	–	–	–	–	–	–
0 0 0 1	0	– (1)	1	–	0	1	– (1)
0 0 1 0	1	0	1	1	– (0)	0	– (0)
0 0 1 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 0 0	0	0	– (0)	1	0	– (1)	1
0 1 0 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 1 0	–	1	– (1)	1	1	0	– (1)
0 1 1 1	–	–	–	–	–	–	–
1 0 0 0	– (1)	0	1	0	0	– (1)	1
1 0 0 1	–	–	–	–	0	– (0)	– (0)
1 0 1 0	0	0	0	0	– (0)	– (0)	0
1 0 1 1	–	–	–	–	1	1	– (1)
1 1 0 0	–	–	–	–	–	–	–
1 1 0 1	1	1	– (1)	1	–	–	–
1 1 1 0	–	–	–	–	–	1	– (1)
1 1 1 1	–	–	–	–	– (1)	0	1
Вес w_{f_i}	1	1	3	0	3	4	6

Множество R_{\max}^{sep} отдельных разложений для заданной системы F частичных функций назовем *максимальным* (по мощности), если оно содержит наибольшее число отдельных разложений, т. е. если в множестве R_{\max}^{sep} имеется наибольшее число различных троек функций из системы F , причем одна из функций тройки представима в виде дизъюнкции либо конъюнкции двух оставшихся функций данной тройки.

Сформулируем задачу 2 нахождения максимального множества R_{\max}^{sep} отдельных разложений для заданной системы $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ частичных булевых функций. Каждая представимая функция из множества R_{\max}^{sep} при этом должна задаваться в алгебраическом (дизъюнктивном либо конъюнктивном) разложении своей парой базисных функций, т. е. каждая базисная функция может входить в разложение только одной представимой функции из R_{\max}^{sep} . В таком случае в схеме не будет соединений между логическими элементами И, ИЛИ.

Задача 2. Для заданной системы $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ частичных функций требуется найти такое максимальное по мощности множество R_{\max}^{sep} отдельных алгебраических разложений, чтобы была минимальной сумма весов базисных функций.

Зададим найденные элементарные разложения булевой матрицей B , столбцы которой соответствуют функциям f_1, \dots, f_k системы F , строки – разложениям, а единичные значения элементов строки отмечают функции, входящие в соответствующее элементарное разложение. Если существуют два разложения вида $f_p^* \prec f_i^* \vee f_j^*$, $f_p^* \prec f_i^* \& f_j^*$, то в матрице B оставляется строка с меньшим суммарным весом $w_{f_i, f_i^*} + w_{f_j, f_j^*}$. Если для этих разложений суммы

$w_{f_i, f_i^*} + w_{f_j, f_j^*}$ весов одинаковы, то удаляется одна (любая) из строк.

Решение задачи 2 сводится к нахождению такого строчного покрытия столбцов матрицы B , чтобы максимальное число этих столбцов было покрыто строками, не имеющими попарных пересечений, и чтобы был минимальным суммарный вес строк найденного покрытия. Напомним, что весом строки матрицы B (т. е. соответствующего ей дизъюнктивного либо конъюнктивного разложения) является суммарное число доопределяемых значений двух базисных функций, связанных дизъюнкцией либо конъюнкцией. Методы нахождения взвешенных строчных покрытий булевых матриц рассматривались в работе [7] для случая, когда не было ограничения на вид покрытия, а именно когда строки покрытия попарно не пересекались.

Эвристика алгоритма решения задачи 2. Алгоритм состоит в итеративном повторении шагов 1 и 2, пока матрица B не станет пустой (не будет содержать строк):

Шаг 1. Найти строку (тройку функций) матрицы B с минимальным весом и зачислить ее в искомое покрытие.

Шаг 2. Удалить все те строки матрицы B , в которых содержится хотя бы одна из функций найденной на шаге 1 тройки функций.

Рассмотрим решение задачи 2 на примере системы функций, заданных в табл. 3. Не гарантируя полноту проверки всех $6C_7^3 = 210$ возможных вариантов алгебраических разложений, зададим найденные 30 вариантов разложений и их веса в виде табл. 5. Например, функция f_5 может быть выражена в виде разложения $f_5^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ с суммой весов $w_{f_1, f_1^*} + w_{f_2, f_2^*} = 3$.

Таблица 5
Матрица B покрытия функций элементарными разложениями (нули заменены точками)

Table 5
Matrix B of function coverage by elementary decompositions (zeros replaced by dots)

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	Разложение Decomposition	$w_{f_i, f_i^*} + w_{f_j, f_j^*}$
Матрица B Matrix B								
1	.	1	.	1	.	.	$E_1 = \{f_1^* \prec (f_3^* \& f_5^*)\}$	8
1	.	1	.	.	.	1	$E_2 = \{f_1^* \prec (f_3^* \& f_7^*)\}$	6
1	.	.	1	1	.	.	$E_3 = \{f_1^* \prec (f_4^* \& f_5^*)\}$	6
1	.	.	.	1	.	1	$E_4 = \{f_1^* \prec (f_5^* \& f_7^*)\}$	9
1	1	.	.	1	.	.	$E_5 = \{f_2^* \prec (f_1^* \& f_5^*)\}$	7
1	1	1	$E_6 = \{f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)\}$	2
1	.	1	.	.	1	.	$E_7 = \{f_3^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)\}$	4
.	.	1	1	.	1	.	$E_8 = \{f_3^* \prec (f_4^* \vee f_6^*)\}$	4
.	.	1	1	.	.	1	$E_9 = \{f_3^* \prec (f_4^* \vee f_7^*)\}$	1
.	.	1	.	1	1	.	$E_{10} = \{f_3^* \prec (f_5^* \vee f_6^*)\}$	7
.	.	1	.	1	.	1	$E_{11} = \{f_3^* \prec (f_5^* \vee f_7^*)\}$	3
1	.	.	1	.	1	.	$E_{12} = \{f_4^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)\}$	6
.	.	.	1	1	1	.	$E_{13} = \{f_4^* \prec (f_5^* \vee f_6^*)\}$	7
1	1	.	.	1	.	.	$E_{14} = \{f_5^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)\}$	3
1	1	.	.	1	.	.	$E_{15} = \{f_5^* \prec (f_1^* \& f_3^*)\}$	9
1	.	.	.	1	.	1	$E_{16} = \{f_5^* \prec (f_1^* \& f_7^*)\}$	11
.	1	.	1	1	.	.	$E_{17} = \{f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)\}$	6

Окончание табл. 5

End of table 5

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	Разложение Decomposition	$w_{f_i, f_i^*} + w_{f_j, f_j^*}$
Матрица B Matrix B								
.	1	.	.	1	.	1	$E_{18} = \{f_5^* \prec (f_2^* \& f_7^*)\}$	7
.	.	1	1	1	.	.	$E_{19} = \{f_5^* \prec (f_3^* \& f_4^*)\}$	8
.	1	.	.	.	1	1	$E_{20} = \{f_6^* \prec (f_2^* \& f_7^*)\}$	9
1	.	1	.	.	.	1	$E_{21} = \{f_7^* \prec (f_1^* \vee f_3^*)\}$	2
1	.	.	1	.	.	1	$E_{22} = \{f_7^* \prec (f_1^* \vee f_4^*)\}$	4
1	1	1	$E_{23} = \{f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)\}$	5
.	1	1	.	.	.	1	$E_{24} = \{f_7^* \prec (f_2^* \vee f_3^*)\}$	2
.	1	.	.	.	1	1	$E_{25} = \{f_7^* \prec (f_2^* \vee f_6^*)\}$	4
.	.	1	1	.	.	1	$E_{26} = \{f_7^* \prec (f_3^* \vee f_4^*)\}$	1
.	.	1	.	1	.	1	$E_{27} = \{f_7^* \prec (f_3^* \vee f_5^*)\}$	4
.	.	1	.	.	1	1	$E_{28} = \{f_7^* \prec (f_3^* \vee f_6^*)\}$	4
.	.	.	1	.	1	1	$E_{29} = \{f_7^* \prec (f_4^* \vee f_6^*)\}$	3
.	.	.	.	1	1	1	$E_{30} = \{f_7^* \prec (f_5^* \vee f_6^*)\}$	7

На шаге 1 занесем в покрытие строку с разложением E_9 , имеющую вес единица. На шаге 2 получим сокращенную матрицу B , состоящую из двух строк (табл. 6).

Таблица 6

Матрица B в начале итерации 2

Table 6

Matrix B at the beginning of iteration 2

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	Разложение Decomposition	$w_{f_i, f_i^*} + w_{f_j, f_j^*}$
Матрица B Matrix B								
1	1	.	.	1	.	.	$E_5 = \{f_2^* \prec (f_1^* \& f_5^*)\}$	7
1	1	.	.	1	.	.	$E_{14} = \{f_5^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)\}$	3

На итерации 2 в матрице B (табл. 6) выбираем строку с разложением E_{14} и весом три, сокращаем матрицу – она становится пустой. Результат эвристического алгоритма решения задачи 2: $R_{\max}^{sep} = \{E_9, E_{14}\}$, где $E_9 = \{f_3^* \prec (f_4^* \vee f_7^*)\}$, $E_{14} = \{f_5^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)\}$ с суммарным весом четыре. Столбец f_6 матрицы B не покрыт, поэтому функция f_6 не вошла ни в одно из разложений найденного множества R_{\max}^{sep} . Очевидно, что тройки $T_9 = \{f_3^*, f_4^*, f_7^*\}$, $T_{14} = \{f_1^*, f_2^*, f_5^*\}$ функций, из которых состоят раздельные разложения E_9 , E_{14} , являются различными (не пересекаются). Назовем раздельные разложения E_9 , E_{14} вторым множеством раздельных разложений, соответствующая логическая схема показана на рис. 3, *b*. Базисные функции второго множества раздельных разложений имеют вид

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1^*	f_2^*	f_4^*	f_6	f_7^*
0	0	0	0	-	-	-	-	-
0	0	0	1	0	0	-	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	-
0	0	1	1	-	-	-	-	-
0	1	0	0	0	0	1	-	1
0	1	0	1	-	-	-	-	-
0	1	1	0	-1	1	0	-	-
0	1	1	1	-	-	-	-	-
1	0	0	0	0	0	0	-	1
1	0	0	1	0	0	-	-	-
1	0	1	0	0	0	0	-	0
1	0	1	1	-	1	-	1	-
1	1	0	0	-	-	-	-	-
1	1	0	1	1	1	1	-	-
1	1	1	0	-	-	-	1	-
1	1	1	1	-	-	-	0	1

Суммарный вес отдельных разложений из множества $R_{\max}^{sep} = \{E_9, E_{14}\}$ равен четырем. Заметим, что ранее найденные элементарные разложения $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$, $f_7^* \prec (f_5^* \vee f_6^*)$ также являются отдельными (см. рис. 3, а), однако суммарный вес базисных функций f_1^* , f_2^* , f_5^* , f_6^* равен девяти (см. табл. 4).

Виды совместных разложений. В отличие от отдельных разложений рассматриваемые далее *совместные* разложения имеют *общие* (совместно используемые) функции для элементарных разложений.

Совокупности взаимосвязанных алгебраических разложений совместного разложения соответствует логическая схема в базисе элементов И, ИЛИ, при этом представимым функциям соответствуют выходные и промежуточные переменные схемы. Функции, которые соответствуют входным полюсам схемы, назовем *базисными*. Если рассматривать логические уравнения, соответствующие разложениям, то вместо комбинационной схемы лучше использовать ориентированный граф (орграф) G зависимости разлагаемых функций от базисных (и уже разложенных), вершины которого соответствуют функциям, а дуги – связям между функциями: две заходящие дуги соответствуют двум функциям, которые составляют разложение той функции, в которую дуги заходят.

Утверждение 5. *Орграф G для совместного разложения должен быть бесконтурным (не должен содержать контуров).*

Далее будут рассматриваться только те виды совместных разложений, которые показаны на рис. 4–7. Очевидно, что они не исчерпывают все возможные совместные разложения для систем (множеств) функций мощности четыре–семь, тем более для систем функций большей мощности. На рис. 4, б и 5, б показаны графы G . Очевидно, что они не содержат контуров, как и графы для других видов (рис. 6 и 7) совместных разложений.

Совместное разложение, показанное на рис. 4, а, имеет две общие функции для двух элементарных разложений. На рис. 5 изображена структура совместного разложения с одной общей функцией f_4 , позволяющая получить при конкретизации оператора \odot четыре совместных разложения:

1. $f_4 \prec (f_1 \vee f_2)$; $f_5 \prec (f_3 \vee f_4)$;
2. $f_4 \prec (f_1 \& f_2)$; $f_5 \prec (f_3 \vee f_4)$;
3. $f_4 \prec (f_1 \vee f_2)$; $f_5 \prec (f_3 \& f_4)$;
4. $f_4 \prec (f_1 \& f_2)$; $f_5 \prec (f_3 \& f_4)$.

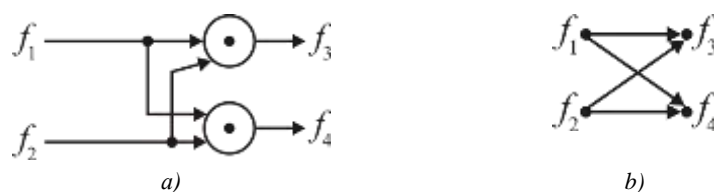


Рис. 4. Совместное разложение: а) реализация двумя базисными функциями f_1, f_2 двух представимых функций f_3, f_4 ; б) граф G зависимости функций

Fig. 4. Joint decomposition: a) implementation by two basic functions f_1, f_2 two representable functions f_3, f_4 ; б) graph G of function dependence

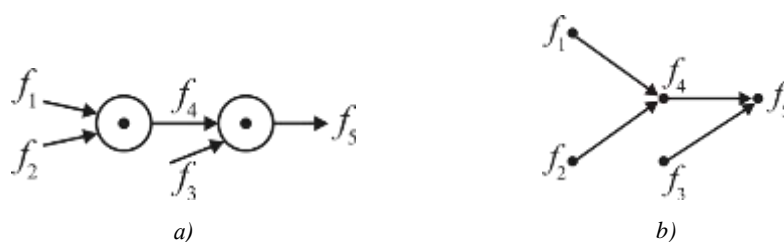


Рис. 5. Совместное разложение: а) реализация тремя базисными функциями f_1, f_2, f_3 двух представимых функций f_4, f_5 ; б) граф G зависимости функций

Fig. 5. Joint decomposition: a) implementation by three basic functions f_1, f_2, f_3 of two representable functions f_4, f_5 ; б) graph G of function dependence

Рассмотрим совместное разложение на рис. 6, б. Для разложений $f_4 = f_1 \odot f_2$, $f_6 = f_1 \odot f_5$ имеется одна общая функция f_1 . Функция f_2 является общей для разложений $f_5 = f_2 \odot f_3$, $f_4 = f_1 \odot f_2$. Аналогичный анализ может быть проведен для других совместных разложений, показанных на рис. 4–7.



Рис. 6. Совместные разложения для реализации трех представимых функций f_4, f_5, f_6

Fig. 6. Joint decompositions to implement three representable functions f_4, f_5, f_6

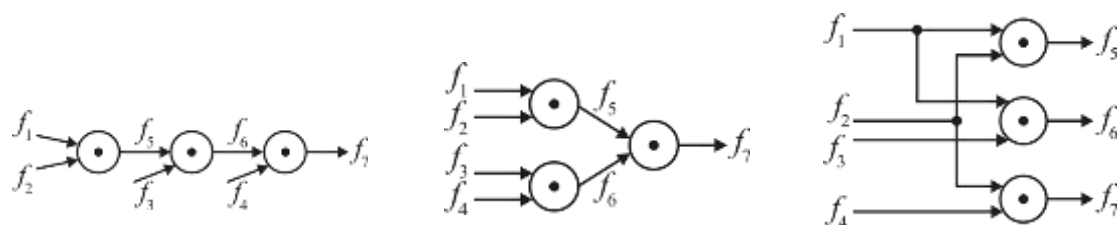


Рис. 7. Совместные разложения для реализации трех представимых функций f_5, f_6, f_7

Fig. 7. Joint decompositions to implement three representable functions f_5, f_6, f_7

Проверка существования совместного разложения. *Задача 3.* Требуется проверить, существует ли совместное разложение заданного вида, и если существует, то найти доопределения частичных функций, входящих в совместное разложение.

Очевидно, что каждое из отдельных разложений, входящих в совместное разложение, должно быть элементарным, т. е. для троек функций разложений должны существовать соответствующие доопределения – это необходимые условия существования совместного разложения. Покажем на простом примере, что раздельные разложения могут существовать, а совместное – нет. В табл. 7 приведены булевы функции, составляющие два разложения. Рассмотрим *совместное* разложение $f_4 = f_1 \& f_2$, $f_5 = f_2 \& f_3$, такое, которое соответствует разложению, показанному на рис. 6, а. *Раздельное* разложение $f_4 = f_1 \& f_2$ существует, если заменить неопределенное значение «–» функции f_2 на значение единица; *раздельное* разложение $f_5 = f_2 \& f_3$ также существует, если заменить неопределенное значение «–» функции f_2 на значение нуль. Очевидно, что общее согласованное доопределение не существует из-за того, что требуется противоречивое доопределение функции f_2 . Следовательно, совместное разложение $f_4 = f_1 \& f_2$, $f_5 = f_2 \& f_3$ не существует, хотя существуют (по отдельности) требуемые доопределения для указанных раздельных разложений.

Таблица 7
Раздельные разложения
Table 7
Separate decompositions

$x_1 \ x_2$	$f_4 = f_1 \& f_2$			$f_5 = f_2 \& f_3$		
	f_1	f_2	f_4	f_2	f_3	f_5
0 0	1	1	1	1	0	0
0 1	1	0	0	0	0	0
1 0	0	1	0	1	1	1
1 1	1	–	1	–	1	0

Утверждение 6. *Функции, участвующие в совместном разложении, должны иметь хотя бы одно общее согласованное доопределение, которое удовлетворяет каждому элементарному алгебраическому разложению, входящему в совместное разложение.*

Решение задачи 3 сводится к составлению и решению логического уравнения, задающего условия согласованного доопределения всех частичных функций, участвующих в совместном разложении. Существование хотя бы одного решения логического уравнения является достаточным условием существования совместного разложения.

Первое совместное разложение. Проверим, существуют ли для трех заданных формул $f_3 = f_1 \vee f_2$, $f_5 = f_2 \& f_4$, $f_7 = f_1 \vee f_6$ такие доопределения (помечены символом *) частичных функций из табл. 3, чтобы выполнялось совместное разложение вида

$$P_1 = \{ f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*); f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*); f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*) \}. \quad (9)$$

Назовем совместное разложение (9) *первым* совместным разложением. Такого вида совместные разложения изображены на рис. 7 (справа). Заметим, что элементарные разложения $E_6 = \{ f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*) \}$, $E_{17} = \{ f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*) \}$, $E_{23} = \{ f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*) \}$ существуют (см. табл. 5). Задача заключается в нахождении таких функций f_1^* , f_2^* , f_3^* , f_4^* , f_5^* , f_6^* , f_7^* , чтобы существовало совместное разложение (9).

Будем рассматривать сокращенную табл. 3, удалив строки, для которых все функции системы имеют неопределенное значение «–». Булевы переменные t_1, \dots, t_{40} для проверки условий существования первого совместного разложения введены для тех значений частичных булевых

функций, которые, возможно, будут доопределены (табл. 8). Заметим, что для тех наборов, на которых значения всех функций не определены, булевы переменные не вводятся – эти строки были удалены из рассмотрения.

Таблица 8

Введение логических переменных для неопределенных значений функций

Table 8

Introduction of logical variables for undefined function values

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0 0 0 1	0	$-(t_1)$	1	$-(t_2)$	0	1	$-(t_3)$
0 0 1 0	1	0	1	1	$-(t_4)$	0	$-(t_5)$
0 1 0 0	0	0	$-(t_6)$	1	0	$-(t_7)$	1
0 1 1 0	$-(t_8)$	1	$-(t_9)$	1	1	0	$-(t_{10})$
1 0 0 0	$-(t_{11})$	0	1	0	0	$-(t_{12})$	1
1 0 0 1	$-(t_{13})$	$-(t_{14})$	$-(t_{15})$	$-(t_{16})$	0	$-(t_{17})$	$-(t_{18})$
1 0 1 0	0	0	0	0	$-(t_{19})$	$-(t_{20})$	0
1 0 1 1	$-(t_{21})$	$-(t_{22})$	$-(t_{23})$	$-(t_{24})$	1	1	$-(t_{25})$
1 1 0 1	1	1	$-(t_{26})$	1	$-(t_{27})$	$-(t_{28})$	$-(t_{29})$
1 1 1 0	$-(t_{30})$	$-(t_{31})$	$-(t_{32})$	$-(t_{33})$	$-(t_{34})$	1	$-(t_{35})$
1 1 1 1	$-(t_{36})$	$-(t_{37})$	$-(t_{38})$	$-(t_{39})$	$-(t_{40})$	0	1

Будем рассматривать строки табл. 8 по отдельности и для каждого разложения записывать требуемые условия доопределения значений функций данной строки, используя табл. 1 для дизъюнктивных разложений и табл. 2 для конъюнктивных разложений. По условиям доопределения будем составлять логические уравнения. Имеющиеся значения и доопределенные значения функций из рассматриваемых строк должны удовлетворять элементарным разложениям, поэтому требуется, чтобы составленное для этих строк логическое уравнение имело хотя бы одно решение. Табл. 9 задает первую итерацию составления логических уравнений по строкам табл. 8.

Логические условия, составленные по строкам, должны выполняться одновременно, поэтому результирующее логическое уравнение после выполнения итерации 1 имеет вид конъюнкции левых частей всех уравнений из табл. 9:

$$t_1 (\bar{t}_1 \vee \bar{t}_2) t_3 \bar{t}_4 t_5 \bar{t}_6 t_7 t_9 (\bar{t}_8 \bar{t}_{10} \vee t_8 t_{10}) t_{11} (t_{11} \vee t_{12}) (\bar{t}_{14} \vee \bar{t}_{16}) \& \\ \& \bar{t}_{19} \bar{t}_{20} t_{22} t_{24} t_{25} t_{26} t_{27} t_{29} t_{35} t_{36} = 1. \quad (10)$$

Переменные $t_{13}, t_{15}, t_{17}, t_{18}, t_{21}, t_{23}, t_{28}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{37}, t_{38}, t_{39}, t_{40}$ не участвуют в записи уравнения, составленного на первой итерации. Если у уравнения (10) нет решения, то дальнейший поиск доопределений функций не имеет смысла. Однако уравнение (10) имеет несколько корней (решений), одно из них приведено ниже:

$$t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = 0, t_5 = 1, t_6 = 0, t_7 = 1, t_8 = 0, t_9 = 1, t_{10} = 0, t_{11} = 1, t_{12} = 1, t_{14} = 0, t_{16} = 0, t_{19} = 0, \\ t_{20} = 0, t_{22} = 1, t_{24} = 1, t_{25} = 1, t_{26} = 1, t_{27} = 1, t_{29} = 1, t_{35} = 1, t_{36} = 1.$$

Таблица 9
Итерация 1 – проверка существования элементарных разложений

Table 9
Iteration 1 – checking the existence of elementary decompositions

Строка таблицы истинности Row of the truth table		Разложение $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ Decomposition $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$			Разложение $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$ Decomposition $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$			Разложение $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$ Decomposition $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$		
		f_1	f_2	f_3	f_2	f_4	f_5	f_1	f_6	f_7
0001	Значения функций	0	t_1	1	t_1	t_2	0	0	1	t_3
	Условия доопределения	$t_1=1$			$(t_1=0)$ или $(t_2=0)$			$t_3=1$		
	Уравнение	$t_1 (\overline{t_1} \vee \overline{t_2}) t_3=1$								
0010	Значения функций	1	0	1	0	1	t_4	1	0	t_5
	Условия доопределения	нет			$t_4=0$			$t_5=1$		
	Уравнение	$\overline{t_4} t_5=1$								
0100	Значения функций	0	0	t_6	0	1	0	0	t_7	1
	Условия доопределения	$t_6=0$			нет			$t_7=1$		
	Уравнение	$\overline{t_6} t_7=1$								
0110	Значения функций	t_8	1	t_9	1	1	1	t_8	0	t_{10}
	Условия доопределения	$t_9=1$			нет			$((t_8=0) \text{ и } (t_{10}=0))$ или $((t_8=1) \text{ и } (t_{10}=1))$		
	Уравнение	$t_9 (\overline{t_8} \overline{t_{10}} \vee t_8 t_{10})=1$								
1000	Значения функций	t_{11}	0	1	0	0	0	t_{11}	t_{12}	1
	Условия доопределения	$t_{11}=1$			нет			$(t_{11}=1) \text{ или } (t_{12}=1)$		
	Уравнение	$t_{11} (t_{11} \vee t_{12})=1$								
1001	Значения функций	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{14}	t_{16}	0	t_{13}	t_{17}	t_{18}
	Условия доопределения	Нет на итерации 1. Появятся на итерации 2, так как $t_{14}=0$			$(t_{14}=0) \text{ или } (t_{16}=0)$			нет		
	Уравнение	$\overline{t_{14}} \vee \overline{t_{16}}=1$								
1010	Значения функций	0	0	0	0	0	t_{19}	0	t_{20}	0
	Условия доопределения	нет			$t_{19}=0$			$t_{20}=0$		
	Уравнение	$\overline{t_{19}} \overline{t_{20}}=1$								

End of table 9

Строка таблицы истинности <i>Row of the truth table</i>		Разложение $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ <i>Decomposition</i> $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$			Разложение $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$ <i>Decomposition</i> $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$			Разложение $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$ <i>Decomposition</i> $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$		
		f_1	f_2	f_3	f_2	f_4	f_5	f_1	f_6	f_7
1011	Значения функций	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{22}	t_{24}	1	t_{21}	1	t_{25}
	Условия доопределения	Нет на итерации 1. Появятся на итерации 2, так как $t_{22}=1$			$(t_{22}=1)$ и $(t_{24}=1)$			$t_{25}=1$		
	Уравнение	$t_{22} \ t_{24} \ t_{25}=1$								
1101	Значения функций	1	1	t_{26}	1	1	t_{27}	1	t_{28}	t_{29}
	Условия доопределения	$t_{26}=1$			$t_{27}=1$			$t_{29}=1$		
	Уравнение	$t_{26} \ t_{27} \ t_{29}=1$								
1110	Значения функций	t_{30}	t_{31}	t_{32}	t_{31}	t_{33}	t_{34}	t_{30}	1	t_{35}
	Условия доопределения	нет			нет			$t_{35}=1$		
	Уравнение	$t_{35}=1$								
1111	Значения функций	t_{36}	t_{37}	t_{38}	t_{37}	t_{39}	t_{40}	t_{36}	0	1
	Условия доопределения	Нет на итерации 1. Появятся на итерации 2, так как $t_{36}=1$			нет			$t_{36}=1$		
	Уравнение	$t_{36}=1$								

Таблица 10
Итерация 2. Шаг 1
Table 10
Iteration 2. Step 1

Строка таблицы истинности <i>Row of the truth table</i>		Разложение $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ <i>Decomposition</i> $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$			Разложение $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$ <i>Decomposition</i> $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$			Разложение $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$ <i>Decomposition</i> $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$		
		f_1	f_2	f_3	f_2	f_4	f_5	f_1	f_6	f_7
1001	Значения функций	t_{13}	$t_{14}=0$	t_{15}						
	Условия доопределения	$((t_{13}=0) \text{ и } (t_{14}=0) \text{ и } (t_{15}=0))$ или $((t_{13}=1) \text{ и } (t_{14}=0) \text{ и } (t_{15}=1))$			нет			нет		
	Уравнение	$\overline{t_{13}}\overline{t_{14}}\overline{t_{15}} \vee t_{13}\overline{t_{14}}t_{15}=1$								

На итерации 2 на каждом из шагов 1–3 (табл. 10–12) рассматриваются те строки, в которых нужны доопределения функций, входящих в первое разложение $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$. Для функций этого разложения составляются дополнительные условия доопределения, которые вызваны доопределениями, выполненными на итерации 1. Таким образом, для трех строк 1001, 1011, 1111, для которых отсутствовали условия доопределения (стояла пометка «Нет на итерации 1»), появляются новые условия доопределения и по ним составляется дополнительное логическое уравнение.

Таблица 11
Итерация 2. Шаг 2
Table 11
Iteration 2. Step 2

Строка таблицы истинности <i>Row of the truth table</i>		Разложение $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ <i>Decomposition</i> $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$			Разложение $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$ <i>Decomposition</i> $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$			Разложение $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$ <i>Decomposition</i> $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$		
		f_1	f_2	f_3	f_2	f_4	f_5	f_1	f_6	f_7
		t_{21}	$t_{22}=1$	t_{23}						
1011	Значения функций	t_{21}	$t_{22}=1$	t_{23}						
	Условия доопределения	$t_{23}=1$			нет			нет		
	Уравнение	$t_{23}=1$								

Таблица 12
Итерация 2. Шаг 3
Table 12
Iteration 2. Step 3

Строка таблицы истинности <i>Row of the truth table</i>		Разложение $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ <i>Decomposition</i> $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$			Разложение $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$ <i>Decomposition</i> $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$			Разложение $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$ <i>Decomposition</i> $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$		
		f_1	f_2	f_3	f_2	f_4	f_5	f_1	f_6	f_7
1111	Значения функций	$t_{36}=1$	t_{37}	t_{38}						
	Условия доопределения	$t_{38}=1$			нет			нет		
	Уравнение	$t_{38}=1$								

Уравнение, добавляемое после выполнения итерации 2, имеет следующий вид:

$$(\bar{t}_{13}\bar{t}_{14}\bar{t}_{15} \vee t_{13}\bar{t}_{14}t_{15})t_{23}t_{38}=1.$$

Одно из решений этого уравнения – $t_{13}=0$, $t_{14}=0$, $t_{15}=0$, $t_{23}=1$, $t_{38}=1$.

Доопределение значения t_{13} логической переменной (значения функции f_1 на наборе 1001) вызывает необходимость доопределения переменных t_{17} , t_{18} , что приводит к итерации 3 (табл. 13).

Таблица 13
Итерация 3
Table 13
Iteration 3

Строка таблицы истинности Row of the truth table		Разложение $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$ Decomposition $f_3^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)$			Разложение $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$ Decomposition $f_5^* \prec (f_2^* \& f_4^*)$			Разложение $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$ Decomposition $f_7^* \prec (f_1^* \vee f_6^*)$		
		f_1	f_2	f_3	f_2	f_4	f_5	f_1	f_6	f_7
		$t_{13}=0$						$t_{13}=0$	t_{17}	t_{18}
1001	Значения функций	$t_{13}=1$						$t_{13}=1$		
	Условия доопределения	нет			нет			(($t_{13}=0$) и ($t_{17}=0$) и ($t_{18}=0$)) или (($t_{13}=0$) и ($t_{17}=1$) и ($t_{18}=1$)) или (($t_{13}=1$) и ($t_{18}=1$))		
Уравнение		$\overline{t_{13}}\overline{t_{17}}\overline{t_{18}} \vee \overline{t_{13}}t_{17}t_{18} \vee t_{13}t_{18}=1$								

Уравнение, добавляемое после выполнения итерации 3:

$$\bar{t}_{13}\bar{t}_{17}\bar{t}_{18} \vee \bar{t}_{13}t_{17}t_{18} \vee t_{13}t_{18}=1.$$

Одно из решений этого уравнения – $t_{13}=0, t_{17}=0, t_{18}=0$.

Результирующее логическое уравнение, составленное для проверки существования совместного разложения и нахождения доопределений функций, имеет вид

$$t_1(\bar{t}_1 \vee \bar{t}_2)t_3\bar{t}_4\bar{t}_5\bar{t}_6\bar{t}_7\bar{t}_9(\bar{t}_8\bar{t}_{10} \vee t_8t_{10})t_{11}(t_{11} \vee t_{12})(\bar{t}_{14} \vee \bar{t}_{16})\bar{t}_{19}\bar{t}_{20}t_{22}t_{24}t_{25}t_{26}t_{27}t_{29}t_{35}t_{36} \& \\ \& t_{29}t_{35}t_{36}(\bar{t}_{13}\bar{t}_{14}\bar{t}_{15} \vee t_{13}\bar{t}_{14}t_{15})t_{23}t_{38}(\bar{t}_{13}\bar{t}_{17}\bar{t}_{18} \vee \bar{t}_{13}t_{17}t_{18} \vee t_{13}t_{18})=1. \quad (11)$$

Методам решения логических уравнений посвящена монография [8]. Целесообразно привести левую часть уравнения к виду КНФ и получить задачу о выполнимости КНФ, которая имеет многочисленные применения при верификации описаний функционирования цифровых систем и которой посвящено большое число научных исследований [4]. Эффективные программы (SAT-solvers) решения логических уравнений используют КНФ в левых частях уравнений [5]. Приведем ДНФ-сомножители $\bar{t}_8\bar{t}_{10} \vee t_8t_{10}$, $\bar{t}_{13}\bar{t}_{14}\bar{t}_{15} \vee t_{13}\bar{t}_{14}t_{15}$, $\bar{t}_{13}\bar{t}_{17}\bar{t}_{18} \vee \bar{t}_{13}t_{17}t_{18} \vee t_{13}t_{18}$ к представлению в виде КНФ. Чтобы перейти от ДНФ D булевой функции к КНФ K , получим сначала инверсию \bar{D} ДНФ D , упростим полученную ДНФ \bar{D} , затем воспользуемся *принципом двойственности* для получения КНФ $K = \bar{\bar{D}}$ [9, с. 20]. Например,

$$\bar{D} = \neg(\bar{t}_{13}\bar{t}_{17}\bar{t}_{18} \vee \bar{t}_{13}t_{17}t_{18} \vee t_{13}t_{18}) = (t_{13} \vee t_{17} \vee t_{18}) \& (t_{13} \vee \bar{t}_{17} \vee \bar{t}_{18}) \& (\bar{t}_{13} \vee \bar{t}_{18}) = \\ = t_{13} \vee t_{13}\bar{t}_{17} \vee t_{13}\bar{t}_{18} \vee t_{13}t_{17} \vee t_{17}\bar{t}_{18} \vee t_{13}t_{18} \vee \bar{t}_{17}t_{18};$$

$$K = \bar{\bar{D}} = (t_{13} \vee \bar{t}_{17} \vee t_{18}) \& (t_{13} \vee t_{17} \vee \bar{t}_{18}) \& (\bar{t}_{13} \vee t_{18}) \& (\bar{t}_{13} \vee t_{17} \vee \bar{t}_{18}) \& (\bar{t}_{13} \vee \bar{t}_{17} \vee t_{18}).$$

Здесь символ \neg обозначает инверсию выражения, перед которым он стоит. Полученная формула имеет вид КНФ. Аналогично получаем другие КНФ:

$$\bar{t}_8\bar{t}_{10} \vee t_8t_{10} = (t_8 \vee \bar{t}_{10}) \& (\bar{t}_8 \vee t_{10}),$$

$$\bar{t}_{13}\bar{t}_{14}\bar{t}_{15} \vee t_{13}\bar{t}_{14}t_{15} = (\bar{t}_{13} \vee \bar{t}_{14}) \& (\bar{t}_{13} \vee t_{15}) \& (t_{13} \vee \bar{t}_{15}) \& \bar{t}_{14} \& (\bar{t}_{17} \vee t_{15}) \& (t_{13} \vee \bar{t}_{15}) \& (\bar{t}_{17} \vee \bar{t}_{15}).$$

Запишем левую часть результирующего уравнения (11) в виде КНФ, в которой для сокращения записи оставлены только символы $\&$, соединяющие строки:

$$t_1 (\bar{t}_1 \vee \bar{t}_2) t_3 \bar{t}_4 t_5 \bar{t}_6 t_7 t_9 (\bar{t}_8 \bar{t}_{10} \vee t_8 t_{10}) t_{11} (t_{11} \vee t_{12}) t_{12} (\bar{t}_{14} \vee \bar{t}_{16}) \bar{t}_{19} \bar{t}_{20} t_{22} t_{24} t_{25} t_{26} t_{27} t_{29} t_{35} t_{36} \& \\ \& (\bar{t}_{13} \vee \bar{t}_{14}) (\bar{t}_{13} \vee t_{15}) (t_{13} \vee \bar{t}_{15}) \bar{t}_{14} (\bar{t}_{17} \vee t_{15}) (t_{13} \vee \bar{t}_{15}) (\bar{t}_{17} \vee \bar{t}_{15}) t_{23} t_{38} \& \\ \& (t_{13} \vee \bar{t}_{17} \vee t_{18}) \& (t_{13} \vee t_{17} \vee \bar{t}_{18}) \& (\bar{t}_{13} \vee t_{18}) \& (\bar{t}_{13} \vee t_{17} \vee t_{18}) \& (\bar{t}_{13} \vee \bar{t}_{17} \vee t_{18}) = 1. \quad (12)$$

Утверждение 7. Корень логического уравнения, выражающего условия существования совместного разложения, является доопределением значений функций, при котором существует совместное разложение.

Утверждение 8. Если логическое уравнение, выражающее условия существования совместного разложения, не имеет корней (решений), то совместное разложение не существует.

Совместное разложение (9) существует, так как уравнение (12) имеет корни. Один из корней уравнения (12) выглядит следующим образом:

$$t_1=1, t_2=0, t_3=1, t_4=0, t_5=1, t_6=0, t_7=1, t_8=0, t_9=1, t_{10}=0, \\ t_{11}=1, t_{12}=1, t_{13}=0, t_{14}=0, t_{15}=0, t_{16}=0, t_{17}=0, t_{18}=0, t_{19}=0, t_{20}=0, \\ t_{22}=1, t_{23}=1, t_{24}=1, t_{25}=1, t_{26}=1, t_{27}=1, t_{29}=1, t_{35}=1, t_{36}=1, t_{38}=1.$$

Другие оставшиеся семь корней (всего корней восемь) уравнения (12) дадут другие доопределения базисных функций, при которых первое совместное разложение также будет существовать. Замены неопределенных значений функций найденными определенными значениями корней уравнения (12) показаны в табл. 14. Переменные $t_{21}, t_{28}, t_{30}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{37}, t_{39}, t_{40}$ не участвовали в записи уравнения (12), поэтому соответствующие значения функций остались неопределенными (табл. 15). Сумма весов базисных функций $f_1^*, f_2^*, f_4^*, f_6^*$ равна 13. Логическая схема (рис. 8) построена по первому совместному разложению.

Таблица 14

Замена доопределяемых значений функций из табл. 8 корнями уравнения (12)

Table 14

Replacing up to the predefined values of the functions from Table 8 with the roots of equation (12)

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f_1^*	f_2^*	f_3^*	f_4^*	f_5^*	f_6^*	f_7^*
0 0 0 0	–	–	–	–	–	–	–
0 0 0 1	0	$-(t_1=1)$	1	$-(t_2=0)$	0	1	$-(t_3=1)$
0 0 1 0	1	0	1	1	$-(t_4=0)$	0	$-(t_5=1)$
0 0 1 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 0 0	0	0	$-(t_6=0)$	1	0	$-(t_7=1)$	1
0 1 0 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 1 0	$-(t_8=0)$	1	$-(t_9=1)$	1	1	0	$-(t_{10}=0)$
0 1 1 1	–	–	–	–	–	–	–
1 0 0 0	$-(t_{11}=1)$	0	1	0	0	$-(t_{12}=1)$	1
1 0 0 1	$-(t_{13}=0)$	$-(t_{14}=0)$	$-(t_{15}=0)$	$-(t_{16}=0)$	0	$-(t_{17}=0)$	$-(t_{18}=0)$
1 0 1 0	0	0	0	0	$-(t_{19}=0)$	$-(t_{20}=0)$	0
1 0 1 1	$-(t_{21})$	$-(t_{22}=1)$	$-(t_{23}=1)$	$-(t_{24}=1)$	1	1	$-(t_{25}=1)$
1 1 0 0	–	–	–	–	–	–	–
1 1 0 1	1	1	$-(t_{26}=1)$	1	$-(t_{27}=1)$	$-(t_{28})$	$-(t_{29}=1)$
1 1 1 0	$-(t_{30})$	$-(t_{31})$	$-(t_{32})$	$-(t_{33})$	$-(t_{34})$	1	$-(t_{35}=1)$
1 1 1 1	$-(t_{36}=1)$	$-(t_{37})$	$-(t_{38}=1)$	$-(t_{39})$	$-(t_{40})$	0	1

Таблица 15

Доопределенные частичные функции для первого совместного разложения

Table 15

Predefined partial functions for the first joint decomposition

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$	f_1^*	f_2^*	f_3^*	f_4^*	f_5^*	f_6^*	f_7^*
0 0 0 0	–	–	–	–	–	–	–
0 0 0 1	0	1	1	0	0	1	1
0 0 1 0	1	0	1	1	0	0	1
0 0 1 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 0 0	0	0	0	1	0	1	1
0 1 0 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 1 0	0	1	1	1	1	0	0
0 1 1 1	–	–	–	–	–	–	–
1 0 0 0	1	0	1	0	0	1	1
1 0 0 1	0	0	0	0	0	0	0
1 0 1 0	0	0	0	0	0	0	0
1 0 1 1	–	1	1	1	1	1	1
1 1 0 0	–	–	–	–	–	–	–
1 1 0 1	1	1	1	1	1	–	1
1 1 1 0	–	–	–	–	–	1	1
1 1 1 1	1	–	1	–	–	0	1
Вес w_{f_i}	4	3	6	3	3	3	7

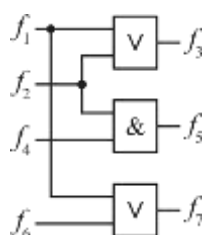


Рис. 8. Логическая схема для первого совместного разложения

Fig. 8. The logical circuit for the first joint decompositions

Второе совместное разложение. Проверим, существуют ли для трех заданных формул $f_3 = f_1 \vee f_2$, $f_5 = f_3 \& f_4$, $f_7 = f_5 \vee f_6$ такие доопределения (помечены символами **) частичных функций из табл. 3, чтобы выполнялось совместное разложение вида

$$f_3^{**} \prec (f_1^{**} \vee f_2^{**}), f_5^{**} \prec (f_3^{**} \& f_4^{**}), f_7^{**} \prec (f_5^{**} \vee f_6^{**}). \quad (13)$$

Назовем это совместное разложение *вторым* совместным разложением. Такого вида разложения показаны на рис. 7, а. Граф уравнений, изображенный на рис. 7, а, изоморфен графу совместного разложения (11) (рис. 9), необходимо только в оба графа ввести дополнительные вершины, которые будут соответствовать функциям. Графы являются *изоморфными*, если они совпадают с точностью до обозначения вершин [10]. Заметим, что и графы G зависимости функций, построенные по этим графам уравнений, также будут изоморфными.



Рис. 9. Граф уравнений второго совместного разложения (11)

Fig. 9. Graph of equations of the second joint decomposition (11)

Результирующие доопределения функций, найденные путем составления и решения нового логического уравнения, заданы в табл. 16. Сумма доопределений базисных функций равна 15. Логическая схема второго совместного разложения изображена на рис. 10.

Таблица 16

Доопределенные частичные функции для второго совместного разложения

Table 16

Predefined partial functions for the second joint decomposition

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f_1^{**}	f_2^{**}	f_3^{**}	f_4^{**}	f_5^{**}	f_6^{**}	f_7^{**}
0 0 0 0	–	–	–	–	–	–	–
0 0 0 1	0	– (1)	1	– (0)	0	1	– (1)
0 0 1 0	1	0	1	1	– (1)	0	– (1)
0 0 1 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 0 0	0	0	– (0)	1	0	– (1)	1
0 1 0 1	–	–	–	–	–	–	–
0 1 1 0	–	1	– (1)	1	1	0	– (1)
0 1 1 1	–	–	–	–	–	–	–
1 0 0 0	– (1)	0	1	0	0	– (1)	1
1 0 0 1	– (0)	– (0)	– (0)	– (0)	0	– (0)	– (0)
1 0 1 0	0	0	0	0	– (0)	– (0)	0
1 0 1 1	–	– (1)	– (1)	– (1)	1	1	– (1)
1 1 0 0	–	–	–	–	–	–	–
1 1 0 1	1	1	– (1)	1	– (1)	–	– (1)
1 1 1 0	–	–	–	–	–	1	– (1)
1 1 1 1	– (1)	– (1)	– (1)	– (1)	– (1)	0	1
Вес w_{f_i}	3	4	6	4	4	4	7



Рис. 10. Логическая схема для второго совместного разложения

Fig. 10. The logical circuit for the second joint decomposition

Эвристический алгоритм [3] поиска наибольшего множества представимых функций для системы полностью определенных кофакторов при поиске *множеств* совместных разложений может быть обобщен на случай частичных кофакторов. Однако одной проверки на бесконтурность очередного подграфа графа G для частичных функций мало, так как для множества вершин очередного подграфа (множества кофакторов) должна выполняться процедура проверки существования общего доопределения, сводящаяся к решению логического уравнения. Достоинством такого алгоритма является то, что он не ограничивается числом вершин в бесконтурных подграфах и конкретными видами совместных разложений, примеры которых показаны на рис. 4–7. Обобщение алгоритма [3] для частичных функций требует отдельного изучения и в данной работе не рассматривается.

Синтез схем. После решения задачи 2 либо задачи 3 частичные базисные функции и те, которые не участвовали в разложениях, могут подвергаться дальнейшей логической оптимизации, например доопределению с целью поиска максимального по мощности подмножества взаимно инверсных частичных функций [11], либо подвергаться минимизации в классе ДНФ, после чего могут быть применены уже известные алгоритмы [3, 12] представления полностью определенных кофакторов в виде алгебраических разложений. Заметим, что процедура поиска взаимно инверсных частичных функций может быть выполнена и перед началом поиска дизъюнктивных и конъюнктивных разложений.

Проведем BDD-минимизацию как исходной системы кофакторов (см. табл. 3), так и систем базисных функций, полученных в результате двух отдельных и двух совместных разложений. Для этого воспользуемся:

– программой OPT_BDD [1, с. 489] BDD-минимизации систем полностью определенных функций, при этом исходные частичные базисные булевы функции доопределяются до полностью определенных путем «нулевого» доопределения (все неопределенные значения заменяются нулями);

– программой [1, с. 516], выполняющей доопределение частичных базисных функций до полностью определенных в процессе построения BDD; получающееся доопределение частичных функций в этом случае не является «нулевым».

Все результаты BDD-минимизации имеют вид многоуровневых представлений систем полностью определенных функций в виде взаимосвязанных логических уравнений, которые переводятся в синтезируемые VHDL-описания и по которым могут быть синтезированы логические схемы.

VHDL-описания для синтеза логических схем получались следующим образом: для каждого множества базисных функций проводилась BDD-минимизация как в классе полностью определенных, так и в классе частичных функций, затем добавлялись соответствующие формулы дизъюнктивных либо конъюнктивных разложений. Например, для второго множества отдельных разложений $E_9 = \{f_3^* \prec (f_4^* \vee f_7^*)\}$, $E_{14} = \{f_5^* \prec (f_1^* \vee f_2^*)\}$ соответствующее многоуровневое представление, полученное программой [1, с. 516] оптимизации BDD-представлений, имеет вид

$$\begin{aligned} r_1 &= \bar{x}_5 f_1 \vee x_5 f_2, \quad r_2 = \bar{x}_5 f_2 \vee x_5 f_3, \quad r_3 = \bar{x}_5 f_3 \vee x_5 f_5, \quad r_4 = \bar{x}_5 f_4 \vee x_5 f_3, \quad r_5 = \bar{x}_5 f_6 \vee x_5 f_7, \\ f_1 &= \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 s_1, \quad f_2 = s_1, \quad f_3 = f_4 \vee f_7, \quad f_5 = f_1 \vee f_2, \quad f_4 = \bar{x}_1 \vee x_1 s_1, \quad f_6 = \bar{x}_1 s_2 \vee x_1 s_1, \\ f_7 &= \bar{x}_1 \vee x_1 s_2, \quad s_1 = \bar{x}_3 s_3 \vee x_3 s_4, \quad s_2 = \bar{x}_3 \vee x_3 s_3, \quad s_3 = x_2 x_4; \quad s_4 = \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_4 \end{aligned}$$

и показано на рис. 11.

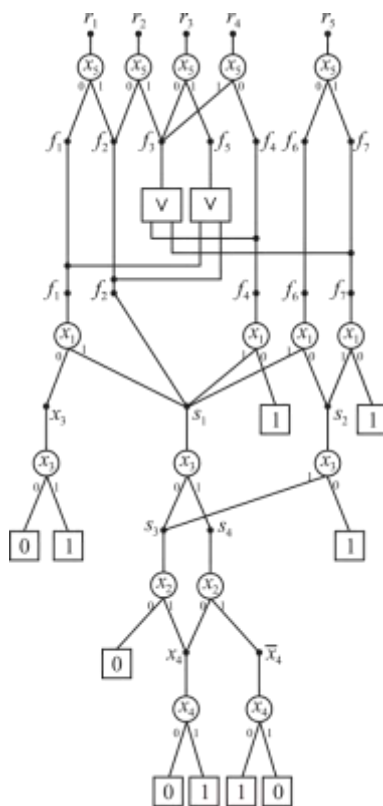


Рис. 11. Многоуровневое представление полностью определенных булевых функций r_1, r_2, r_3, r_4, r_5

Fig. 11. Multilevel representation of fully defined Boolean functions r_1, r_2, r_3, r_4, r_5

Логические уравнения конвертировались в VHDL-описания, подаваемые на вход синтезатора LeonardoSpectrum, в котором выполнялся синтез логических схем в библиотеке [1, с. 448] проектирования заказных КМОП СБИС. Результаты синтеза представлены в табл. 17, где *Area* – суммарная площадь элементов схемы (в условных единицах), *Delay* – временная задержка схемы (нс). Символом * помечены меньшие значения площади и задержки.

Таблица 17
Результаты синтеза схем
Table 17
Results of circuit synthesis

Функциональное описание <i>Functional description</i>	BDD-минимизация в классе полностью определенных булевых функций <i>BDD-minimization in a class of fully defined Boolean functions</i>		BDD-минимизация в классе частичных булевых функций <i>BDD-minimization in the class of partial Boolean functions</i>	
	<i>Area</i>	<i>Delay</i>	<i>Area</i>	<i>Delay</i>
Кофакторы (см. табл. 3)	9 213	2,31	5 781	2,32
Функции первого множества раздельных разложений	9 185	2,95	6 891	2,93
Функции второго множества раздельных разложений	9 347	2,28	*5 491	2,80
Функции первого совместного разложения	9 871	2,98	5 971	*2,16
Функции второго совместного разложения	8 710	3,73	8 158	3,33

Анализ результатов синтеза показывает, что BDD-минимизация частичных функций имеет преимущества по сравнению с BDD-минимизацией в классе полностью определенных функций, а нахождение множеств раздельных либо совместных разложений (дизъюнктивных, конъюнктивных) может улучшать схемные реализации по сравнению с BDD-минимизацией, которая проводится без учета дизъюнктивных и конъюнктивных разложений кофакторов функций. Эти результаты показывают также, что целесообразно развивать методы алгебраических разложений частичных функций при BDD-минимизации, а не переходить с помощью «нулевого доопределения» к полностью определенным функциям и для них выполнять BDD-оптимизацию, как это обычно принято в литературе.

Заключение. В статье предложены приближенные алгоритмы построения дизъюнктивных и конъюнктивных разложений систем частичных булевых функций – кофакторов одного уровня бинарной диаграммы решений. Алгоритмы могут быть обобщены для других видов алгебраических разложений, когда выходными функциями разложений являются не только дизъюнкции и конъюнкции, но и отрицания данных логических операций. Применение предложенных алгоритмов и уже известных алгоритмов минимизации многоуровневых BDD-представлений систем частичных функций позволяет получать лучшие результаты технологически независимой логической оптимизации – начального этапа синтеза многовыходных логических схем в базисе библиотечных элементов либо в базисе программируемых логических интегральных схем.

Список использованных источников

1. Бибило, П. Н. Бинарные диаграммы решений в логическом проектировании / П. Н. Бибило. – М. : Ленанд, 2024. – 560 с.
2. Yang, S. BDS: a BDD-based logic optimization system / S. Yang, M. Ciesielski // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2002. – Vol. 21, no. 7. – P. 866–876.

3. Бибило, П. Н. Экспериментальное исследование алгоритмов минимизации BDDI-представлений систем булевых функций с использованием алгебраических разложений кофакторов / П. Н. Бибило, В. И. Романов // Программная инженерия. – 2022. – Т. 13, № 2. – С. 51–67.
4. Handbook of Satisfiability / ed.: A. Biere, M. Heule, H. van Maaren, T. Valsh. – IOS Press, 2009. – 980 p.
5. Goldberg, E. BerkMin: a fast and robust sat-solver / E. Goldberg, Y. Novikov // Discrete Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 155, no. 12. – P. 1549–1561.
6. Закревский, А. Д. Логический синтез каскадных схем / А. Д. Закревский. – М. : Наука, 1981. – 416 с.
7. Еремеев, А. В. Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования / А. В. Еремеев, Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2000. – Т. 7, вып. 2. – С. 22–46.
8. Закревский, А. Д. Логические уравнения / А. Д. Закревский. – Минск : Наука и техника, 1975. – 96 с.
9. Бибило, П. Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 211 с.
10. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 384 с.
11. Бибило, П. Н. Минимизация BDDI-представлений систем не полностью определенных булевых функций / П. Н. Бибило // Программная инженерия. – 2020. – Т. 11, № 3. – С. 152–168.
12. Бибило, П. Н. Минимизация многоуровневых представлений систем полностью определенных булевых функций с использованием разложений Шеннона и алгебраических представлений кофакторов / П. Н. Бибило, В. И. Романов // Информатика. – 2021. – Т. 18, № 2. – С. 7–32.
13. Брейтон, Р. К. Синтез многоуровневых комбинационных логических схем / Р. К. Брейтон, Г. Д. Хэчтел, А. Л. Санджованни-Винченцелли // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1990. – Т. 78, № 2. – С. 38–83.

References

1. Bibilo P. N. Binarnye diagrammy reshenij v logicheskom proektirovanii. *Binary Decision Diagrams in Logical Design*. Moscow, Lenand, 2024, 560 p. (In Russ.).
2. Yang S., Ciesielski M. BDS: a BDD-based logic optimization system. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2002, vol. 21, no. 7, pp. 866–876.
3. Bibilo P. N., Romanov V. I. *Experimental study of algorithms for minimization of binary decision diagrams using algebraic representations of cofactors*. Programmnaya ingeneria [Software Engineering], 2022, vol. 13, no. 2, pp. 51–67 (In Russ.).
4. *Handbook of Satisfiability*. In A. Biere, M. Heule, H. van Maaren, T. Valsh (eds.). IOS Press, 2009, 980 p.
5. Goldberg E., Novikov Y. BerkMin: a fast and robust SAT-solver. *Discrete Applied Mathematics*, 2007, vol. 155, no. 12, pp. 1549–1561.
6. Zakrevskij A. D. Logicheskij sintez kaskadnyh skhem. *Logical Synthesis of Cascading Circuit*. Moscow, Nauka, 1981, 416 p. (In Russ.).
7. Eremeev A. V., Zaozerskaya L. A., Kolokolov A. A. *The problem of covering the set: complexity, algorithms, experimental studies*. Diskretnyj analiz i issledovanie operacij [Discrete Analysis and Operations Research], 2000, vol. 7, no. 2, pp. 22–46 (In Russ.).
8. Zakrevskij A. D. Logicheskie uravneniya. *Logical Equations*. Minsk, Nauka i tekhnika, 1975, 96 p. (In Russ.).
9. Bibilo P. N. Dekompoziciya bulevykh funkciy na osnove resheniya logicheskikh uravnenij. *Decomposition of Boolean Functions Based on Solving Logical Equations*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2009, 211 p. (in Russ.).
10. Emelichev V. A., Mel'nikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. Lekcii po teorii grafov. *Lectures on Graph Theory*. Moscow, Nauka, 1990, 384 p. (In Russ.).
11. Bibilo P. N. *Minimization of binary decision diagrams for systems of incompletely defined Boolean functions using inverse cofactors*. Programmnaya ingeneria [Software Engineering], 2020, vol. 11, no. 3, pp. 152–168 (In Russ.).

12. Bibilo P. N., Romanov V. I. *Minimization of binary decision diagrams for systems of completely defined Boolean functions using Shannon expansions and algebraic representations of cofactors*. Informatika [Informatics], 2021, vol. 18, no. 2, pp. 7–32 (In Russ.).

13. Brayton R. K., Hachtel G. D., Sangiovanni-Vincentelli A. L. *Synthesis of multilevel combinational logic circuits*. Trudy Instituta inzhenerov po jelectrotehnike i radioelektronike [Proceedings of the IEEE], 1990, vol. 78, no. 2, pp. 38–83 (In Russ.).

Информация об авторе

Бибилло Петр Николаевич, доктор технических наук, профессор, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by

Information about the author

Petr N. Bibilo, D. Sc. (Eng.), Prof., The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: bibilo@newman.bas-net.by