МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.8
DOI: 10.37661/1816-0301-2024-21-4-24-36

Оригинальная статья
Original Article

Клиринг в финансовых сетях с ограниченными равными выплатами

Я. М. Шафранский

Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси,
ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь
E-mail: shafr-04@yandex.by

Аннотация

Цели. Цель исследования – разработка алгоритма построения наибольшей клиринговой матрицы для финансовых сетей с правилом ограниченных равных выплат для распределения средств агента между его кредиторами. Предполагается, что денежные резервы всех агентов – нулевые.

Методы. Используются методы теории графов и математического программирования.

Результаты. Предложен полиномиальный алгоритм построения наибольших клиринговых матриц в финансовых сетях с правилом ограниченных равных выплат, используемым при распределении имеющегося у агента денежного резерва между его кредиторами. Предполагается, что исходный денежный резерв каждого из агентов равен нулю (между кредиторами распределяются лишь средства, получаемые от других агентов). Алгоритм основан на использовании выявленных свойств взвешенных сильно связных графов. Получены необходимые и достаточные условия, при которых наибольшая клиринговая матрица отлична от нулевой при нулевых денежных резервах агентов.

Заключение. Разработанный подход может быть использован при построении алгоритмов клиринга для сетей с другими правилами распределения имеющихся у агента средств между его кредиторами.

Ключевые слова: финансовая сеть, клиринговая матрица, правила распределения средств агента, представление сети графом, сильно связный граф

Благодарности. Автор благодарит кандидата физико-математических наук В. И. Сарванова за конструктивные советы и замечания, использование которых позволило заметно улучшить качество статьи.

Для цитирования. Шафранский, Я. М. Клиринг в финансовых сетях с ограниченными равными выплатами / Я. М. Шафранский // Информатика. – 2024. − Т. 21, № 4. – С. 24–36. – DOI: 10.37661/1816-0301-2024-21-4-24-36.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 27.10.2024
Подписана в печать | Accepted 28.11.2024
Опубликована | Published 30.12.2024

© Шафранский Я. М., 2024

Clearing in financial networks with constrained equal awards

Yakov M. Shafransky

The United Institute of Informatics Problems
of the National Academy of Sciences of Belarus,
st. Surganova, 6, Minsk, 220012, Belarus
E-mail: shafr-04@yandex.by

Abstract

Objectives. Financial networks with a rule of constrained equal awards for the distribution of the agent's estate between its creditors are considered. The aim of the study is to develop an algorithm for constructing greatest clearing matrices for such networks under zero cash reserves of all agents.

Methods. Graph theory and mathematical programming methods are used.

Results. A polynomial-time algorithm for constructing the greatest clearing matrices for financial networks with a rule of constrained equal awards for the distribution of the agent's estate between its creditors is proposed. It is assumed that the cash reserves of each agent are equal to zero (funds received from other agents are distributed among creditors). The algorithm is based on the use of the identified properties of weighted strongly connected graphs. Necessary and sufficient conditions are obtained under which the greatest clearing matrix is different from zero at zero cash reserves of agents'.

Conclusion. The developed approach can be used in constructing clearing algorithms for financial networks with other rules for distributing the agent's estate between its creditors.

Keywords: financial network, clearing matrix, rules for distribution of the agent's estate, graph representation of the network, strongly connected graph

Acknowledgments. The author thanks V. I. Sarvanov, candidate of physical and mathematical sciences, for his constructive advice and commentary, the use of which allowed to significantly improve the quality of the article.

For citation. Shafransky Y. M. *Clearing in financial networks with constrained equal awards*. Informatika [*Informatics*], 2024, vol. 21, no. 4, pp. 24–36 (In Russ.). DOI: 10.37661/1816-0301-2024-21-4-24-36.

Conflict of interest. The author declares of no conflict of interest.

Введение. Современная финансовая среда характеризуется богатой сетью взаимосвязей между фирмами. Исполнение финансовых обязательств одной фирмы перед другой зависит не только от финансового здоровья фирмы-должника, но и от состояния других фирм, имеющих перед ней прямые или косвенные обязательства. Например, фирма *А* имеет финансовые обязательства перед фирмой *Б*, а фирма *Б* имеет обязательства перед *В*, кредитором которой выступает фирма *А*, т. е. *А* является не только должником *Б*, но и косвенным образом кредитором *Б*. Если каждая из фирм в состоянии рассчитаться со своими долгами, то финансовая система функционирует нормально. Банкротство одной из фирм может вызвать цепную реакцию банкротств ряда других фирм, входящих в ту же финансовую сеть. Причина заключается в том, что каждая из фирм полагается не только на свои оперативные финансовые резервы, но и на средства, которые должны поступить от фирм, являющихся ее должниками. Банкротство одной или нескольких фирм приводит к необходимости решения задачи минимизации суммарного ущерба, обусловленного таким банкротством.

Исследованию функционирования финансовых сетей и разработке механизмов работы в экстремальных ситуациях, возникающих при несостоятельности отдельных компонентов сети, посвящены многочисленные публикации. В работах [1–5] представлены не только результаты авторов, но и достаточно полные обзоры состояния области к соответствующему моменту времени. Важность проведения исследований в рассматриваемом направлении отмечается в фундаментальном обзоре [6].

Далее, следуя принятой терминологии, фирмы и прочие финансовые организации, рассматриваемые в качестве элементов сети, именуются *агентами*. Агент характеризуется своими активами и обязательствами перед другими агентами. Активы агента состоят из оперативного денежного резерва и платежей, полученных от других агентов, которые имеют обязательства перед ним.

В случае возникновения экстремальной ситуации, когда агент не в состоянии рассчитаться по своим обязательствам, остатки его активов должны быть распределены между другими агентами, являющимися кредиторами агента. В различных сетях действуют, вообще говоря, разные наборы правил, в соответствии с которыми осуществляется распределение имеющихся активов агента между другими агентами. Все эти правила базируются на одних и тех же принципах:

1) ограниченной ответственности – сумма всех выплат агента не может превосходить размера имеющихся активов агента;

2) приоритета долга – агент обязан направить все свои активы на погашение долговых обязательств.

Правила распределения имеющихся денежных резервов. В финансовой сети каждому агенту i сопоставлена величина $e_i \geq 0$ его денежного резерва и вектор $L_i = (l_{i1},\ldots, l_{in})$ обязательств агента i перед остальными агентами. Здесь n – число агентов в сети, $l_{ij} \geq 0$ и $l_{ii} = 0$.

Наиболее распространенными правилами распределения средств агента между его кредиторами являются следующие три [7]: правило ограниченных равных выплат *CEA* (constrained equal awards), правило ограниченных равных потерь *CEL* (constrained equal losses) и правило пропорционального распределения *Prop* (proportional). В формулировке каждого из правил предполагается, что $e_i < \sum_{j=1}^{n} l_{ij}$. При $e_i \geq \sum_{j=1}^{n} l_{ij}$ никаких правил распределения не требуется: кредитор j агента i получает ровно l_{ij} единиц.

В соответствии с перечисленными правилами денежный резерв агента i распределяется между его кредиторами следующим образом (формулы определяют сумму, получаемую кредитором j, $j = 1,\ldots, n$):

1) $CEA_{ij}(e_i, L_i) = \min\{l_{ij}, \alpha_i\}$, где $\sum_{j=1}^{n} \min\{l_{ij}, \alpha_i\} = e_i$;

2) $CEL_{ij}(e_i, L_i) = \max\{0, l_{ij} - \beta_i\}$, где $\sum_{j=1}^{n} \max\{0, l_{ij} - \beta_i\} = e_i$;

3) $Prop_{ij}(e_i, L_i) = e_i\gamma_j$, где $\gamma_j = l_{ij} / \sum_{j=1}^{n} l_{ij}$.

Далее ввиду ограниченности объема статьи рассматриваются лишь те финансовые сети, в которых используется правило ограниченных равных выплат. Поведение сетей с другими правилами распределения средств агентов – предмет дальнейших исследований.

Величина α_i, фигурирующая в правиле *CEA*, определяется итеративно. Для упрощения описания процесса вычисления α_i будем считать, что агент i имеет b кредиторов и их нумерация такова, что $l_{i1} \leq \ldots \leq l_{ib}$. Здесь $l_{i1} > 0$.

Шаг 0. Полагаем $r = 1$.

Шаг 1. Полагаем $e_i = e_i - \sum_{j=1}^{r-1} l_{ij}$ и $\alpha_i = e_i/(b - r + 1)$.

Шаг 2. Если $l_{ir} \geq \alpha_i$, то процесс вычисления α_i завершен. Если $l_{ir} < \alpha_i$, то находим такой минимальный индекс j, что $l_{ij} \geq \alpha_i$, полагаем $r = j$ и переходим к выполнению шага 1.

Финансовая сеть определяется тройкой параметров (n, E, L), где n – число агентов; $E = (e_1,\ldots, e_n)$ – вектор денежных резервов агентов; L – матрица взаимных обязательств агентов, строками которой являются векторы L_i. Финансовая сеть может быть представлена ориентированным графом $G = (V, \Lambda)$, где $|V| = n$, вершинам графа сопоставлены агенты, а дуга $(i, j) \in \Lambda$, если $l_{ij} > 0$.

Особое значение имеет ситуация, где агенты вообще не располагают денежными резервами, т. е. $e_i = 0$ для каждого агента i. На первый взгляд может показаться, что в такой ситуации не-возможно предпринять каких-либо действий, направленных на улучшение позиций агентов. Тем не менее даже в таком случае нередко можно заметно сократить общую сумму задолженности агентов за счет *клиринга* (взаимозачета) обязательств агентов. Рассмотрим пример, демонстрирующий как технологию сокращения взаимных долгов агентов, так и роль правил распределения денежных резервов агентов.

Пусть $n = 4$, $l_{1,2} = 16$, $l_{1,3} = 24$, $l_{2,4} = 12$, $l_{3,4} = 28$, $l_{4,1} = 30$, $e_i = 0$ для всех $i = 1,\ldots, 4$. На рис. 1 представлен соответствующий граф, где числа возле дуг графа – величины обязательств агентов.

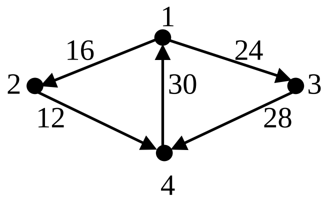


Рис. 1. Пример представления финансовой сети ориентированным графом

Fig. 1. An example of a financial network representation by a directed graph

Попытаемся отыскать максимальную величину e_4 денежного резерва агента 4, который при условии $e_4 > 0$, будучи выплачен кредиторам агента 4, полностью вернулся бы этому агенту в результате полного или частичного погашения долгов остальных агентов. Это означало бы, что имеется возможность погашения части задолженности агентов без использования каких-либо средств – за счет взаимного зачета (клиринга) обязательств агентов. Предположим, что $e_4 = 30$. Тогда агент 4 мог бы вернуть весь свой долг агенту 1, агент 1 перечислил бы 12 единиц агенту 2 и 18 единиц агенту 3, которые все полученные средства вернули бы агенту 4. Оставшиеся обязательства выглядели бы следующим образом: агент 1 должен агентам 2 и 3 по четыре и шесть единиц соответственно, а агент 3 агенту 4 – 10 единиц. Есть, однако, одно «но»: в соответствии с правилом *CEA* агент 1, получив 30 единиц от агента 4, должен был передать по 15 единиц каждому из агентов 2 и 3. В итоге три единицы из 15 остались бы у агента 2 и не вернулись к агенту 4. Можно убедиться, что вместо правила *CEA* агент 1 использовал правило пропорционального распределения средств. Поэтому предложенное решение примера задачи сокращения взаимной задолженности агентов является недопустимым. Нетрудно проверить, что корректным является решение, при котором величина $l_{4,1}$ уменьшается не на 30, а на 24 единицы, а каждая из величин $l_{1,2}$, $l_{1,3}$, $l_{2,4}$ и $l_{3,4}$ – на 12 единиц.

Обозначим через p_{ij} величину платежа, переводимого агентом i агенту j. Матрица платежей $P = ||p_{ij}||_{i,j=1,\ldots,n}$ называется *допустимой,* если $p_{ij} = CEA_{ij}(e_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ji}, L_i)$ для любых $i, j \in \{1,\ldots, n\}$.

Как следует из определения, сумма, которую агент i выплачивает агенту j, зависит от денежного резерва агента i и от суммы платежей, полученных агентом i от других агентов.

Обозначим через $e_i(P)$ сумму средств агента i после осуществления им выплат в соответствии с матрицей P: $e_i(P) = e_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ji} - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$.

Матрица платежей P называется *клиринговой матрицей,* если она является допустимой, для каждого $i \in \{1,\ldots, n\}$ выполняется $e_i(P) \geq 0$, а при $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} < \sum_{j=1}^{n} l_{ij}$ выполняется $e_i(P) = 0$. При поиске клиринговой матрицы, обладающей теми или иными свойствами, рассматривается непрерывная постановка задачи, в которой отсутствуют ограничения на величину наименьшего положительного числа – оно может быть сколь угодно малым, оставаясь больше нуля.

Для двух $n\times n$ матриц W и W', элементами которых являются рациональные числа, запись $W < W'$ означает, что $w_{ij} \leq w'_{ij}$ для всех $i, j = 1,\ldots, n$ и существует такая пара (i, j), что $w_{ij} < w'_{ij}$. Далее предполагается, что все рассматриваемые числа являются рациональными.

Пусть задан набор (возможно, бесконечный) $n\times n$ числовых матриц $W^{(1)}, W^{(2)},\ldots, W^{(k)},\ldots$. Матрица W^* называется наибольшей в наборе, если в этом наборе не существует другой такой матрицы W', что $W' > W^*$.

Известно [5], что для любой финансовой сети множество клиринговых матриц образует полную решетку. В частности, имеются наименьшая и наибольшая клиринговые матрицы. Цель настоящей статьи – представить алгоритм построения наибольшей клиринговой матрицы при нулевых денежных резервах всех агентов.

Особую роль в дальнейшем изложении играют *сильно связные графы* – ориентированные графы, в которых каждая вершина достижима из любой другой вершины графа.

Сильно связные графы. В разделе формулируется вспомогательная задача и предлагается алгоритм ее решения, который далее используется при построении клиринговых матриц.

Далее рассматриваются только ориентированные графы, поэтому прилагательное «ориентированный» обычно будет опускаться. Вершина графа называется *начальной* (*терминальной*), если степень ее захода (степень исхода соответственно) равна нулю.

Задача 1. Пусть $G = (V, \Lambda)$ – сильно связный граф с множеством вершин V, $|V| = n$, и множеством дуг Λ. Каждой дуге (i, j) графа необходимо сопоставить рациональное число (вес) w_{ij} так, чтобы все дуги, исходящие из одной и той же вершины, имели один и тот же вес и каждая из вершин была *сбалансирована,* т. е. сумма весов дуг, заходящих в вершину, равнялась сумме весов дуг, исходящих из вершины.

Поскольку все дуги, исходящие из одной и той же вершины, должны иметь один и тот же вес, можно вес каждой дуги, исходящей из вершины i, обозначить через x_i.

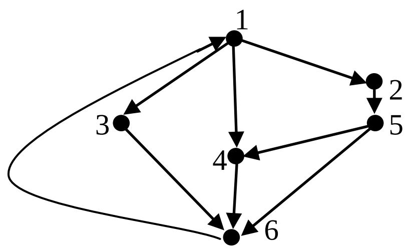
Наряду с сильно связными графами будем рассматривать связные графы, не имеющие ни начальных, ни терминальных вершин. Такие графы назовем *замкнутыми.* Очевидно, любой сильно связный граф является замкнутым. Для замкнутых графов не требуется уточнений понятия «сбалансированная вершина», поскольку каждая вершина такого графа имеет ненулевые степени исхода и захода.

Обозначим через r_i степень исхода вершины i, а через λ_{ij} – элемент матрицы смежности графа G: $\lambda_{ij} = 1$, если $(i, j) \in \Lambda$, и $\lambda_{ij} = 0$, если $(i, j) \notin \Lambda$. Отметим, что $\lambda_{ii} = 0$, поскольку в G нет петель.

Запишем условие сбалансированности вершины i замкнутого графа: $r_i x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} x_j$. Это условие можно слегка преобразовать:

$$-\lambda_{1i}x_1-\ldots-\lambda_{i-1,i}x_{i-1}+r_ix_i-\lambda_{i+1,i}x_{i+1}-\ldots-\lambda_{ni}x_n=0. \quad (1)$$

Значения величин x_i, представляющих решение задачи 1 для замкнутого графа, определяются системой однородных уравнений вида (1). Эту систему можно представить в матричной форме $Ax = 0$, где A – $n\times n$ матрица, на диагонали которой расположены числа r_i, а все остальные элементы равны 0 либо –1: $a_{ij} = -\lambda_{ji}$, если $i \neq j$ и $a_{ii} = r_i$. На рис. 2 показан пример сильно связного графа и соответствующей матрицы A (в левом столбце и верхней строке указаны номера строк и столбцов матрицы).



	1	2	3	4	5	6
1	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–1**
2	**–1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**–1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
4	**–1**	**0**	**0**	**1**	**–1**	**0**
5	**0**	**–1**	**0**	**0**	**2**	**0**
6	**0**	**0**	**–1**	**–1**	**–1**	**1**

Рис. 2. Пример сильно связного графа и соответствующей матрицы A

Fig. 2. An example of a strongly connected graph and corresponding matrix A

Замечание 1. Описанная матрица A однозначным образом представляет любой ориентированный граф. Действительно, если умножить матрицу A на –1 и заменить ее диагональные элементы нулями, то получится транспонированная матрица смежности графа G.

Если граф G не является замкнутым, то в матрице A некоторые диагональные элементы могут равняться 0, что соответствует терминальным вершинам, а в некоторых строках матрицы все элементы помимо диагонального могут быть равны 0, что соответствует начальным вершинам. Вершина i является изолированной, если i-я строка состоит из нулей.

Замечание 2. Соотношение $(i, j) \in \Lambda$ эквивалентно равенству $a_{ji} = -1$. Поэтому в i-м столбце матрицы A имеется ровно r_i элементов, равных –1. Отсюда следует, что сумма всех строк матрицы A имеет вид (0,…, 0). Поэтому определитель матрицы A равен 0.

Замечание 3. Из замечания 2 следует, что система уравнений $Ax=0$ наряду с тривиальным решением $x_i = 0$, $i = 1,\dots, n$, имеет бесконечное множество ненулевых решений и, кроме того, что каждая строка матрицы A является линейной комбинацией остальных ее строк.

Основной вопрос, возникающий в связи с использованием задачи 1 при построении клиринговых матриц для финансовых сетей, заключается в существовании «положительного» решения задачи 1, в котором отсутствуют отрицательные числа и хотя бы часть переменных принимает ненулевые значения. Ответ на этот вопрос можно получить, решив задачу линейного программирования

$$Ax = 0,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,\dots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i > 0.$$

Неизвестно, однако, всегда ли данная задача имеет решение. Кроме того, возможно, существует более эффективный с вычислительной точки зрения способ решения задачи, основанный на использовании свойств взвешенных сильно связных графов. Изучению таких свойств посвящена оставшаяся часть раздела.

Граф G будем называть *равномерно взвешенным*, если его дугам сопоставлены такие веса, что все дуги, исходящие из одной и той же вершины, имеют один и тот же вес (условие сбалансированности может при этом нарушаться).

Пусть в равномерно взвешенном графе $G = (V, \Lambda)$ каждая из вершин подмножества $V' \subset V$ является сбалансированной. Тогда порожденный подграф $G' = (V', \Lambda')$ графа G будем называть сбалансированным.

Дугу (i, j) графа $G = (V, \Lambda)$ будем называть *внешней заходящей в подграф* $G' = (V', \Lambda')$, если $(i, j) \notin \Lambda'$, а $j \in V'$. Аналогично дугу $(i, j) \in \Lambda$ будем называть *внешней исходящей из подграфа* G', если $(i, j) \notin \Lambda'$, а $i \in V'$.

Лемма 1. *Дан замкнутый граф G', являющийся порожденным подграфом равномерно взвешенного графа G. Для того чтобы граф G' был сбалансированным, необходимо, чтобы сумма весов внешних дуг, заходящих в вершины графа G', равнялась сумме весов внешних дуг, исходящих из вершин графа G'.*

Доказательство. Матричное уравнение $Ax = 0$ описывает условия сбалансированности замкнутого графа. Как учесть появление внешних дуг, рассматривая замкнутый граф G' в качестве подграфа графа G? Не теряя общности, можно считать, что в графе G вершины графа G' занумерованы числами $1,\dots, n'$. Пусть из вершины i графа G' исходит r_i' внешних дуг, а суммарный вес заходящих в эту вершину внешних дуг равен b_i. Тогда условие (1) сбалансированности вершины i, $i \in \{1,\dots, n\}$, примет следующий вид:

$$-\alpha_{i1}x_1 - \dots - \alpha_{i.i-1}x_{i-1} + (r_i + r_i')x_i - \alpha_{i.i+1}x_{i+1} - \alpha_{i.n}x_n = b_i. \quad (2)$$

Систему уравнений вида (2) в матричной форме можно записать как $A_0x = b$, где b – вектор-столбец из чисел $b_1,\dots, b_n$, а матрицу A_0 можно представить в виде $A_0 = A + A'$, где A' – диагональная $n\times n$ матрица с числами r_i' на диагонали.

Сложим все n уравнений (2). Сумма строк матрицы A – нулевой вектор, поэтому результатом суммирования будет соотношение $\sum_{i=1}^{n} r_i' x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$, что и означает равенство суммы весов внешних дуг, исходящих из вершин G', сумме весов внешних дуг, заходящих в вершины графа G'. □

Система уравнений $Ax=0$ всегда имеет тривиальное решение $x_i = 0$, $i = 1,\dots, n$, но такой набор значений x_i не является нужным нам решением задачи 1, поскольку не выполнено условие $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$.

Теорема 1. *Любое нетривиальное решение* $(x_1,\dots, x_n)$ *системы однородных уравнений* $Ax = 0$ *с матрицей* A*, представляющей сильно связный граф* $G = (V, \Lambda)$*, удовлетворяет либо условию* $x_i > 0$, $i = 1,\dots, n$, *либо условию* $x_i < 0$, $i = 1,\dots, n$.

Доказательство. Поскольку матрица A представляет сильно связный граф G, то система уравнений $Ax = 0$ имеет, как отмечено выше, бесконечное множество решений. Если существует решение, удовлетворяющее условию $x_i < 0$, $i = 1,\dots, n$, то, очевидно, существует и решение, удовлетворяющее условию $x_i > 0$, $i = 1,\dots, n$.

Предположим, что существует решение, в котором присутствуют числа разных знаков и, возможно, нули. Напомним, что любое решение должно обеспечивать сбалансированность каждой вершины графа G.

Обозначим через V^+ множество всех таких вершин l графа G, что $x_l > 0$, а через G^+ – подграф графа G, порожденный множеством вершин V^+. Возможно, граф G^+ состоит из нескольких компонент связности. Пусть G_0^+ – одна из таких компонент. Заметим, что начальная вершина ни одной из внешних дуг, заходящих в граф G_0^+, не может принадлежать другой компоненте связности графа G^+. Поэтому вес любой внешней заходящей в граф G_0^+ дуги не превосходит 0. Множество таких дуг не пусто, поскольку граф G является сильно связным, а помимо вершин V^+ в нем присутствуют такие вершины i, что $x_i < 0$, и, возможно, такие вершины, что $x_i = 0$.

В графе G_0^+ нет начальных вершин. Действительно, если l – начальная вершина G_0^+, то l не может быть сбалансированной: все дуги, исходящие из l, имеют положительный вес, а вес любой внешней дуги, заходящей в l, не превосходит 0.

Предположим, что в G_0^+ нет терминальных вершин. Из сильной связности графа G и не пустоты множества $V \setminus V^+$ следует наличие внешних дуг, исходящих из вершин G_0^+. Итак, все внешние заходящие в замкнутый граф G_0^+ дуги имеют неположительный вес, а все исходящие из G_0^+ дуги имеют положительный вес. Такая ситуация противоречит необходимому условию сбалансированности замкнутого графа G_0^+ (см. лемму 1).

Предположим теперь, что в G_0^+ имеются терминальные вершины. Удалим их из множества V_0^+ вершин графа G_0^+. Если граф G_1^+, порожденный множеством V_1^+ оставшихся вершин, все еще содержит терминальные вершины, удалим их из V_1^+. Процесс будем продолжать до получения такого множества V_k^+ вершин, что порожденный ими граф G_k^+ не имеет терминальных вершин.

Покажем, что граф G_k^+ не пуст и не имеет начальных вершин. Процесс получения графа G_{r+1}^+ из графа G_r^+, $0 \le r < k$, можно рассматривать как процесс удаления из G_r^+ некоторых вершин и инцидентных им дуг. При этом ни одна из удаляемых из G_r^+ дуг не заходит ни в одну из вершин графа G_{r+1}^+. Следовательно, в G_k^+ не могут появиться начальные вершины. Из отсутствия в графе G_0^+ начальных вершин следует, что в G_0^+ имеется контур. Вершина, принадлежащая контуру, не может оказаться терминальной ни на одном из шагов процесса получения графа G_k^+ из графа G_0^+. Поэтому граф G_k^+ не пуст.

Итак, граф G_k^+ является замкнутым. Все внешние, исходящие из G_k^+ дуги имеют положительный вес, а вес каждой внешней, заходящей в G_k^+ дуги не превосходит 0. Снова сбалансированность графа G_k^+ противоречит лемме 1.

Противоречие получено из-за предположения о наличии в нетривиальном решении системы уравнений $Ax = 0$ чисел разных знаков и (или) нулей. □

Следствие 1. *В системе уравнений* $Ax = 0$*, где* A *– матрица, представляющая сильно связный граф, имеется лишь одна свободная переменная, а любое решение имеет вид*

$$x_1 = k_1 x_s, \ldots, x_{s-1} = k_{s-1} x_s,\ x_s = x_s,\ x_{s+1} = k_{s+1} x_s, \ldots, x_n = k_n x_s, \tag{3}$$

где все коэффициенты k_i *отличны от* 0 *и имеют один и тот же знак. Свободной может быть любая переменная.*

Единственность свободной переменной следует из того, что наличие двух и более свободных переменных приводило бы к наличию таких решений системы $Ax = 0$, в которых часть значений переменных равнялась бы нулю, а часть – нет, что противоречит теореме 1. Одинаковость знаков коэффициентов k_i является прямым следствием теоремы 1.

Произвольные ориентированные графы. Пусть G – произвольный ориентированный граф без изолированных вершин. *Сильно связной компонентой* G называется его максимальный относительно включения сильно связный подграф.

Напомним, что одновершинный граф является по определению сильно связным. Для любого ориентированного графа набор его сильно связных компонент определен однозначно [8]. Пусть $\{G_1,\ldots, G_h\}$ – множество всех сильно связных компонент графа G.

Конденсацией ориентированного графа G называется ориентированный граф G^*, вершинам $g_1,\ldots, g_h$ которого сопоставлены сильно связные компоненты $G_1,\ldots, G_h$ графа G, а пара (g_i, g_j) является дугой графа G^* тогда и только тогда, когда в G есть дуга, начало которой принадлежит компоненте G_i, а конец – компоненте G_j.

Среди компонент $G_1,\ldots, G_h$ могут быть одновершинные графы. Такие компоненты будем называть *вырожденными*. Вершину g_i графа G^* будем называть *вырожденной*, если ей сопоставлена вырожденная компонента графа G.

Отметим, что конденсация G^* графа G может быть построена за время $O(n+m)$, где n и m – соответственно количество вершин и дуг графа G [9].

Граф G^* не может иметь контуров, поскольку в противном случае соответствующие компоненты графа G представляли бы сильно связный подграф и должны были составлять одну компоненту.

На рис. 3 приведен пример графа G (слева) и его конденсации G^* (справа). Граф G имеет пять сильно связных компонент, порожденных множествами вершин $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{11, 12\}$ и $\{10\}$. Этим компонентам соответствуют вершины 1, 2, 3, 4 и 5 графа G^*. Компонента $\{10\}$ – вырожденная, ей соответствует вершина 5 графа G^*.

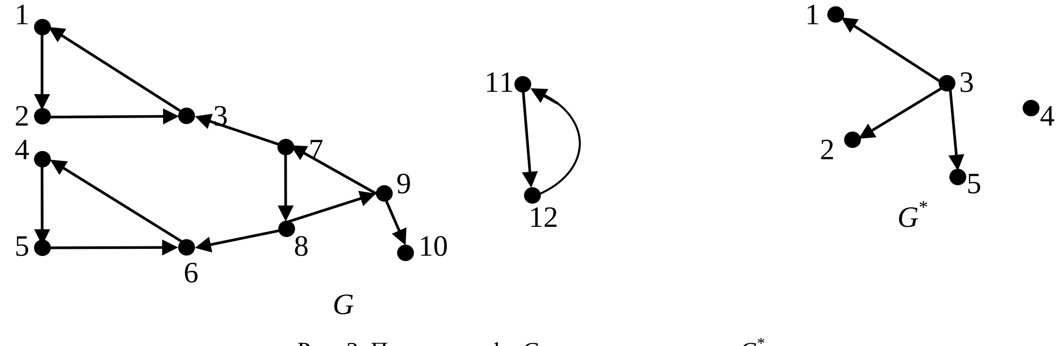


Рис. 3. Пример графа G и его конденсации G^*

Fig. 3. An example of graph G and its condensation G^*

Сильно связные компоненты графа G, сопоставленные терминальным вершинам графа G^*, будем называть *терминальными компонентами*. Если терминальная компонента имеет не менее двух вершин, то будем называть ее *невырожденной терминальной компонентой*.

Рассмотрим *задачу 2*, отличающуюся от задачи 1 лишь тем, что ориентированный граф $G = (V, \Lambda)$ является произвольным. Сформируем для графа G матрицу A точно так же, как и для сильно связного графа. Как отмечено в замечании 1, матрицу A можно построить для любого ориентированного графа.

Матрица A фактически сопоставляет систему линейных уравнений $Ax = 0$ графу G. Число переменных в такой системе равно числу вершин графа. Вес каждой дуги, исходящей из вершины i, равен значению переменной x_i. Поэтому можно рассматривать x_i как переменную, сопоставленную вершине i графа.

Если вершина графа имеет ненулевые степени исхода и захода, то понятно, что́ подразумевается под сбалансированностью вершины: суммарный вес заходящих в вершину дуг должен равняться суммарному весу исходящих из нее дуг. Что делать с начальными и терминальными вершинами графа, не имеющими соответственно заходящих и исходящих дуг?

В определении взвешенного графа $G = (V, \Lambda)$ (см. формулировку задачи 1) фактически вводится функция $f\colon \Lambda \to Q$, где Q – множество рациональных чисел. Доопределим функцию f на множестве $(V{\times}V)\backslash\Lambda$, полагая $f(i, j) = 0$, если $(i, j) \notin \Lambda$.

Замечание 4. Если i – терминальная вершина графа G, то полагаем $x_i = 0$.

Замечание 4 естественным образом согласует выбор значений переменных x_i с доопределением весовой функции f. Такой подход хорошо согласуется с содержательным смыслом задачи о клиринге: если агент i сопоставлен терминальной вершине графа G, это означает, что $l_{ij} = 0$ для всех $j = 1,\ldots, n$ и, соответственно, все выплаты такого агента прочим агентам могут быть только нулевыми.

Система уравнений $Ax = 0$ имеет бесконечное множество решений. Для произвольного графа G, однако, не учтено условие $x_i = 0$ для терминальных вершин i. Поэтому систему $Ax = 0$ необходимо дополнить равенствами вида $x_i = 0$ для каждой из терминальных вершин. Для полученной системы уравнений $A'x = 0$ утверждение о наличии бесконечного множества решений может оказаться неверным. Заметим, что модифицированная матрица A' не является квадратной при наличии в графе G терминальных вершин: в такой матрице число строк больше числа столбцов.

Теорема 2. *Пусть A' – модифицированная матрица, сопоставленная ориентированному графу G, а G^* – конденсация графа G. Система уравнений* $A'x = 0$ *имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда граф G^* имеет невырожденные терминальные вершины.*

Доказательство. Пусть $\{G_1,\ldots, G_h\}$ – множество всех сильно связных компонент графа G, среди которых могут быть вырожденные (т. е. одновершинные) подграфы. Этим компонентам соответствуют вершины $g_1,\ldots, g_h$ графа G^*. Не теряя общности, можно считать, что вершины графа G^* занумерованы в соответствии с их взаимным расположением в G^*: первые k_1 вершин являются начальными (их степени захода равны 0, а степени исхода – ненулевые), следующие k_2 вершин являются промежуточными (они имеют ненулевые степени и захода, и исхода), последние k_3 вершин – терминальные (степени исхода равны нулю). Вообще говоря, число k_2 или оба числа k_1 и k_2 могут оказаться нулями (в G^* всегда имеется хотя бы одна терминальная вершина). Следует обратить внимание, что здесь используется несколько уточненное определение начальной вершины графа: такая вершина должна иметь не только нулевую степень захода, но и ненулевую степень исхода.

Будем поочередно просматривать вершины графа G^*, начиная с начальных вершин и переходя к следующей вершине лишь после того, как все ее предшественники (при их наличии) уже просмотрены.

Рассмотрим одну из первых k_1 вершин графа G^*. Каждой такой вершине сопоставлен сильно связный подграф графа G, имеющий непустое множество внешних исходящих дуг. В силу леммы 1 суммарный вес всех внешних исходящих дуг должен быть равен 0. В силу теоремы 1 веса всех дуг сильно связного графа являются одновременно либо положительными, либо отрицательными, либо все они равны 0. Все дуги, исходящие из одной и той же вершины, имеют один и тот же вес. Поэтому веса внешних исходящих дуг должны иметь один и тот же знак, а равенство их суммы 0 возможно, лишь если каждый из весов равен 0. Из равенства 0 весов внешних исходящих дуг следует равенство 0 весов всех дуг подграфа. Итак, веса дуг каждой из первых k_1 сильно связных компонент равны 0, как и веса каждой из внешних дуг, исходящих из этих подграфов.

Рассмотрим сильно связную компоненту G_j, сопоставленную промежуточной вершине графа G^*, все предшественники которой являются начальными вершинами. Из представленных рассуждений следует, что все внешние заходящие в G_j дуги имеют нулевой вес. В силу леммы 1 суммарный вес всех внешних исходящих из G_j дуг должен быть равен 0. Отсюда и из теоремы 1 немедленно следует равенство 0 весов всех дуг подграфа G_j, а также всех внешних исходящих из G_j дуг.

Просматривая последовательно каждую из k_2 промежуточных вершин графа G^* после анализа ее предшественников, приходим к выводу, что вес всех дуг каждой сильно связной компоненты, сопоставленной промежуточной вершине G^*, равен 0.

Следуя описанной процедуре просмотра вершин и добравшись до терминальной вершины g_l графа G^*, обнаруживаем, что вес каждой внешней дуги, заходящей в компоненту G_l, равен 0. Поскольку g_l – терминальная вершина, то G_l не имеет внешних исходящих дуг и, следовательно, условия леммы 1 выполнены. Если G_l – вырожденный подграф, то значение переменной x, сопоставленной этой вершине графа G, равно 0. Рассмотрим ситуацию, когда G_l имеет не менее двух вершин.

Для исключения громоздкости обозначений можно считать, что вершины G_l занумерованы числами $1,\ldots, q$, $q \geq 2$. В систему уравнений $A'x = 0$ подставим значения переменных для уже просмотренных вершин графа G, т. е. для вершин всех сильно связных компонент графа G, сопоставленных первым $k_1 + k_2$ вершинам графа G^*. Как следует из предшествующих рассуждений, значение каждой из таких переменных равно 0.

В матрице A'' полученной системы уравнений $A''x = 0$ первые q строк и q столбцов образуют изолированный блок, т. е. все элементы первых q строк в столбцах $q + 1,\ldots, n$ равны 0 (поскольку они либо изначально были нулями, либо соответствуют весам внешних заходящих в G_l дуг) и все элементы первых q столбцов в строках, начиная с (q+1)-й, также равны 0 (поскольку G_l не имеет внешних исходящих дуг).

Выделим в матрице A'' подматрицу A_l, образованную элементами первых q строк и q столбцов. Матрица A_l задает сильно связный граф G_l. Следовательно, определитель A_l равен 0, а система уравнений $A_lx = 0$ имеет бесконечное множество решений. Поскольку A_l представляет изолированный блок в матрице A'', любое решение системы $A_lx = 0$ является частью решения системы уравнений $A''x = 0$ (переменные $x_1,\ldots, x_q$ не входят ни в одно из уравнений, начиная с (q+1)-го).

Рассуждения, приведенные относительно компоненты G_l, справедливы и для любой другой невырожденной терминальной компоненты графа G.

Итак, если граф G^* имеет невырожденную терминальную вершину, то система $A'x = 0$ имеет ненулевое решение. С другой стороны, если система уравнений $A'x = 0$ имеет ненулевое решение, то, как следует из приведенных выше рассуждений, соотношение $x_i \neq 0$ возможно лишь в случае, когда вершина i принадлежит невырожденной терминальной компоненте графа G. □

Как и в случае задачи 1, где речь идет о сильно связных графах, при работе с задачей 2 основной вопрос, который нас интересует, заключается в существовании положительного решения задачи 2, т. е. такого набора значений переменных x_i, что $A'x = 0$, $x_i \geq 0$, $i = 1,\ldots, n$, и $\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$. Теоремы 1 и 2 позволяют получить ответ на этот вопрос, причем не только определить, существует ли требуемый набор весов дуг ориентированного графа, но и построить такой набор, если он существует. Соответствующий алгоритм представлен следующим утверждением.

Следствие 2. *Если G – ориентированный граф, то положительный набор весов его дуг существует тогда и только тогда, когда в конденсации* G^* *графа G имеются невырожденные терминальные вершины. Для построения положительного набора весов для каждой невырожденной терминальной компоненты* G_l *графа G следует найти положительное решение системы уравнений* $A_l x = 0$, *где матрица* A_l *представляет эту компоненту. Соответствующее решение системы уравнений может быть найдено с помощью метода Гаусса.*

Будем говорить, что ориентированный взвешенный сбалансированный граф G имеет максимальный положительный набор весов дуг, если для каждой его невырожденной терминальной компоненты G_l выбрано положительное решение системы уравнений $A_l x = 0$.

Из доказательства теоремы 2 следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 3. *Если G – ориентированный равномерно взвешенный сбалансированный граф с максимальным положительным набором весов, то* $x_i = 0$ *тогда и только тогда, когда вершина i не принадлежит невырожденной терминальной компоненте графа G.*

Построение наибольшей клиринговой матрицы. Вернемся к задаче клиринга в финансовых сетях. Построим ориентированный граф $G = (V, \Lambda)$, представляющий финансовую сеть. Каждой вершине графа сопоставлен один из агентов сети. Упорядоченная пара (i, j) принадлежит множеству Λ дуг графа, если $l_{ij} > 0$, где l_{ij} – сумма долговых обязательств агента i перед агентом j. Напомним, что рассматривается ситуация с нулевыми денежными резервами агентов. Конечная цель – построение наибольшей клиринговой матрицы.

Очевидно, возможность уменьшить задолженность агента i имеется лишь тогда, когда вершина i принадлежит некоторому контуру графа G. Более того, в силу теоремы 2, а также следствий 2 и 3 такая возможность появляется лишь тогда, когда вершина i принадлежит сильно связной невырожденной терминальной компоненте графа G. Поэтому в качестве первого шага выделим нетривиальные терминальные сильно связные компоненты графа G. Пусть G_1 – одна из таких терминальных компонент.

Отыщем какое-нибудь положительное решение задачи 1 для сильно связного графа G_1. Пусть это $(x_1,..., x_{n_1})$, где n_1 – число вершин графа G_1. Положим $l_i = \min_{j=1,...,n_1} l_{ij}$ и $\alpha_i = l_i/x_i$. Найдем $\alpha^0 = \min_{j=1,...,n_1} \alpha_i$ и построим новое решение $(x'_1,..., x'_{n_1})$ рассматриваемой задачи 1, полагая $x'_i = \alpha^0 x_i$.

Построим матрицу платежей $P_1 = \|p_{ij}\|_{i,j=1,...,n_1}$ для графа G_1, полагая $p_{ij} = x'_i$ для всех пар (i, j), являющихся дугами графа G_1, и $p_{ij} = 0$ для всех пар (i, j), не являющихся дугами графа G_1. Преобразуем граф G_1 в граф G'_1, вычитая из l_{ij} величину p_{ij} для всех пар (i, j), являющихся дугами графа G_1, и удаляя из графа дуги, для которых $l_{ij} - p_{ij} = 0$. Из определения x'_i следует, что в графе G'_1 будет не более $m_1 - 1$ дуг, где m_1 – число дуг графа G_1.

Может оказаться, что граф G'_1 не является сильно связным. В этом случае отыщем разложение G'_1 на сильно связные компоненты, найдем невырожденные терминальные компоненты полученного разложения (если они существуют) и для каждой такой компоненты повторим действия, описанные для графа G_1. Прибавим новые значения p_{ij} к ранее вычисленным.

Процесс последовательного преобразования графа G_1 в граф без невырожденных терминальных компонент займет не более m_1 итераций, на каждой из которых используется метод Гаусса.

Описанную для графа G_1 процедуру повторим для каждой невырожденной терминальной компоненты графа G. Временна́я сложность построения итоговой клиринговой матрицы P не превосходит $O(m(n + m))$. В этой оценке не учтена сложность решения однородной системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса. Если считать, что реализация метода Гаусса требует выполнения $O(n^3)$ операций для системы уравнений с n переменными, то итоговая оценка сложности построения клиринговой матрицы равна $O(mn^3)$.

Обозначим построенную клиринговую матрицу через $P^*(L)$, где L – матрица взаимных обязательств агентов: строками матрицы L служат векторы $L_i = (l_{i1},\ldots, l_{in})$, $i = 1,\ldots, n$. Покажем, что матрица $P^*(L)$ является наибольшей клиринговой матрицей.

Напомним, что граф G однозначно определяется матрицей L: вершинам G сопоставлены агенты $1,\ldots, n$, а пара (i, j) является дугой графа G, если $l_{ij} > 0$.

Лемма 2. *Пусть* $P^{(1)}(L)$ *и* $P^{(2)}(L)$ *– такие клиринговые матрицы, что* $P^{(1)}(L) < P^{(2)}(L)$, *а матрица* $L' = L - P^{(1)}(L)$. *Тогда матрица* $P' = P^{(2)}(L) - P^{(1)}(L)$ *является клиринговой матрицей для финансовой сети с матрицей* L' *взаимных обязательств агентов.*

Доказательство. Из $p_{ij}^{(1)} \le l_{ij}$ и $p_{ij}^{(2)} \le l_{ij}$ для любых $i, j \in \{1,\ldots, n\}$ получаем $l'_{ij} \ge 0$ для любого элемента матрицы L', и, следовательно, L' можно рассматривать как матрицу взаимных обязательств агентов $1,\ldots, n$. Граф, соответствующий матрице L', обозначим через G'.

Граф G является сбалансированным относительно как матрицы $P^{(1)}(L)$, так и матрицы $P^{(2)}(L)$ в том смысле, что дугам графа в качестве весов сопоставлены соответствующие элементы матрицы. Поэтому из определения матриц L' и P' следует, что граф G' является сбалансированным относительно матрицы P'.

Поскольку $e_i = 0$ для всех $i = 1,\ldots, n$, то условие допустимости матрицы платежей P' выглядит так: $p'_{ij} = CEA_{ij}(\sum_{j=1}^{n} p'_{ji}, L'_i)$ для любых $i, j \in \{1,\ldots, n\}$. Это условие означает, что для любых пар (i, j) выполняется либо $p'_{ij} = l'_{ij}$, либо $p'_{ij_1} = p'_{ij_2}$ для всех таких j_1, j_2, что $p'_{ij_1} < l'_{ij_1}$ и $p'_{ij_2} < l'_{ij_2}$. Кроме того, сумма $\sum_{j=1}^{n} p'_{ji}$ должна быть полностью распределена между кредиторами агента i. Последнее условие выполнено ввиду сбалансированности графа G' относительно матрицы P'.

Возможны три варианта: (а) $p_{ij}^{(1)} = l_{ij}$; (б) $p_{ij}^{(1)} < l_{ij}$ и $p_{ij}^{(2)} = l_{ij}$; (в) $p_{ij}^{(2)} < l_{ij}$. В случае (а) $p'_{ij} = l'_{ij} = 0$. В случае (б) $p'_{ij} = l_{ij} - p_{ij}^{(1)} = l'_{ij}$. Из условия (в) следует, что $p_{ij}^{(1)} < l_{ij}$. Из допустимости матрицы $P^{(1)}(L)$ следует, что для любых таких пар (i, j), что $p_{ij}^{(1)} < l_{ij}$, выполняется $p_{ij}^{(1)} = C_i^{(1)}$ для некоторой константы $C_i^{(1)}$. Аналогично из допустимости матрицы $P^{(2)}(L)$ следует $p_{ij}^{(2)} = C_i^{(2)}$ для любых таких пар (i, j), что $p_{ij}^{(2)} < l_{ij}$. Поэтому $p'_{ij} = C_i^{(2)} - C_i^{(1)} = C'_i < l_{ij} - C_i^{(1)} = l'_{ij}$.

Таким образом, P' является клиринговой матрицей. □

Теорема 3. *Матрица* $P^*(L)$ *является наибольшей клиринговой матрицей.*

Доказательство. Предположим, что существует такая клиринговая матрица $P^0(L)$, что $P^*(L) < P^0(L)$. Из леммы 2 следует, что $P' = P^0(L) - P^*(L)$ является клиринговой матрицей для финансовой сети с матрицей $L' = L - P^*(L)$ взаимных обязательств агентов. В силу сделанного предположения о соотношении матриц $P^*(L)$ и $P^0(L)$ заключаем, что P' – ненулевая матрица.

Из описания алгоритма построения матрицы $P^*(L)$ следует, что граф G', соответствующий матрице L', не имеет невырожденных терминальных компонент. Тогда отличие P' от нулевой матрицы прямо противоречит теореме 2. □

Заключение. Построен полиномиальный алгоритм формирования наибольших клиринговых матриц для финансовых сетей с правилом ограниченных равных выплат в предположении, что каждый агент в сети имеет нулевой денежный резерв. Алгоритм базируется на специфических свойствах взвешенных сильно связных графов. Разработанный подход может быть использован при построении алгоритмов клиринга для сетей с другими правилами распределения имеющихся у агента активов между его кредиторами.

Список использованных источников

1. Eisenberg, L. Systemic risk in financial systems / L. Eisenberg, T. H. Noe // Management Science. – 2001. – Vol. 47(2). – P. 236–249.

2. Schaarsberg, G. M. On solving mutual liability problems / G. M. Schaarsberg, H. Reijnierse, P. Borm // Mathematical Methods of Operations Research. – 2018. – Vol. 87(3). – P. 383–409.

3. Jackson, M. O. Systemic risk in financial networks: A survey / M. O. Jackson, A. Pernoud // Annual Review of Economics. – 2021. – Vol. 13(1). – P. 171–202.

4. Csóka, P. Centralized clearing mechanisms in financial networks: A programming approach / P. Csóka, P. J.-J. Herings // Journal of Mechanism and Institution Design. – 2022. – Vol. 7(1). – P. 45–69.

5. Csóka, P. Uniqueness of clearing payment matrices in financial networks / P. Csóka, P. J.-J. Herings // Mathematics of Operations Research. – 2024. – Vol. 49(1). – P. 232–250.

6. Elliott, M. Networks and economic fragility / M. Elliott, B. Golub // Annual Review of Economics. – 2022. – Vol. 14(1). – P. 665–696.

7. Thomson, W. How to Divide When There Isn’t Enough / W. Thomson. – Cambridge : Cambridge University Press, 2019. – 508 p.

8. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 384 с.

9. Tarjan, R. E. Depth-first search and linear graph algorithms / R. E. Tarjan // SIAM Journal on Computing. – 1972. – Vol. 1(2). – P. 146–160.

References

1. Eisenberg L., Noe T. H. Systemic risk in financial systems. *Management Science*, 2001, vol. 47(2), pp. 236–249.

2. Schaarsberg G. M., Reijnierse H., Borm P. On solving mutual liability problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2018, vol. 87(3), pp. 383–409.

3. Jackson M. O., Pernoud A. Systemic risk in financial networks: A survey. *Annual Review of Economics*, 2021, vol. 13(1), pp. 171–202.

4. Csóka P., Herings P. J.-J. Centralized clearing mechanisms in financial networks: A programming approach. *Journal of Mechanism and Institution Design*, 2022, vol. 7(1), pp. 45–69.

5. Csóka P., Herings P. J.-J. Uniqueness of clearing payment matrices in financial networks. *Mathematics of Operations Research*, 2024, vol. 49(1), pp. 232–250.

6. Elliott M., Golub B. Networks and economic fragility. *Annual Review of Economics*, 2022, vol. 14(1), pp. 665–696.

7. Thomson W. *How to Divide When There Isn’t Enough.* Cambridge, Cambridge University Press, 2019, 508 p.

8. Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. Lekcii po teorii grafov. *Lectures on Graph Theory*. Moscow, Nauka, 1990, 384 p. (In Russ.).

9. Tarjan R. E. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1972, vol. 1(2), pp. 146–160.

Информация об авторе

Шафранский Яков Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории математической кибернетики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: shafr-04@yandex.by

Information about the author

Yakov M. Shafransky, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Leading Researcher of the Laboratory of Mathematical Cybernetics, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: shafr-04@yandex.by