ИНФОРМАТИКА

2014 январь-март № 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.872

В.В. Науменко, М.А. Маталыцкий

АНАЛИЗ МАРКОВСКОЙ СЕТИ С ДОХОДАМИ, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Рассматривается марковская сеть массового обслуживания с доходами в переходном режиме, с положительными и отрицательными заявками, которая может использоваться при прогнозировании доходов в информационно-телекоммуникационных системах и сетях с учетом попадания в них вирусов. Исследования проводятся в случаях, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от ее состояний, и случайными величинами с заданными средними значениями. В последнем случае предполагается, что все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки. Приводится пример расчета.

Введение

Современные информационно-телекоммуникационные системы и сети становятся все более сложными, что обусловлено необходимостью повышения надежности передачи и обработки информации. Построение и исследование математических моделей для оценки качества их функционирования является важной задачей. Применение для этой цели классических моделей теории массового обслуживания (МО) не всегда дает адекватные результаты, поскольку необходимо, чтобы модели учитывали как характерные особенности систем, так и возможное влияние различных дестабилизирующих факторов, например внезапных сбоев, попадания вирусов, потери передаваемых или обрабатываемых данных.

Для учета подобных факторов была предложена концепция отрицательных заявок и связанных с ними сетей и систем МО. Принципиально новый класс сетей МО – G-сетей, в которых помимо потоков обычных (положительных) заявок рассматриваются также дополнительные пуассоновские потоки отрицательных заявок, был введен Е. Геленбе в [1]. При поступлении в систему сети отрицательная заявка уничтожает одну положительную заявку, если таковая имеется в данной системе, тем самым уменьшая число положительных заявок в системе на единицу. Затем отрицательная заявка исчезает из сети, не получив никакого обслуживания. Например, в компьютерных сетях «положительными» заявками являются задания (программы), а «отрицательными» заявками – компьютерные вирусы. При поступлении в компьютерную сеть вирус уничтожает или наносит вред, заражает одну из исполняемых программ, уменьшая количество действующих программ или запросов в системе на единицу. Следует отметить, что исследование G-сетей в стационарном режиме проведено в работах [2, 3].

При попадании вируса в информационную систему из-за потери информации или ее искажения система и вся информационно-телекоммуникационная сеть несут некоторые расходы или убытки. Учет их можно осуществить, применив в качестве модели сеть МО с доходами (НМ-сеть) и с положительными и отрицательными заявками. После исчезновения отрицательной заявки система массового обслуживания (СМО) вновь после обслуживания в ней положительных заявок получает некоторый доход (прибыль). Во второй части данной статьи описана методика нахождения ожидаемых доходов в системах такой сети. Отметим, что НМ-сети уже применялись при прогнозировании доходов в логистических транспортных системах [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим открытую G-сеть МО с n однолинейными СМО. В СМО S_i извне (из системы S_0) поступает пуассоновский поток положительных (обычных) заявок с интенсивностью λ_{0i}^{+} и пуассоновский поток отрицательных заявок с интенсивностью λ_{0i}^{-}, $i=\overline{1,n}$. Все поступающие в сеть потоки заявок являются независимыми. Длительности обслуживания положительных заявок в СМО S_i распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_i, $i=\overline{1,n}$. Отрицательная заявка, поступающая в некоторую систему сети, в которой имеется по крайней мере одна положительная заявка, мгновенно уничтожает одну из них и наносит убыток этой СМО. При предположении экспоненциального распределения времени обслуживания положительных заявок можно не заботиться о том, какая именно заявка уничтожается. После этого отрицательная заявка сразу же покидает сеть или уничтожается, если в данной СМО не было заявок. Таким образом, в каждой СМО сети могут обслуживаться только положительные заявки, поэтому в дальнейшем, говоря об обслуживании положительных заявок, обычно для краткости называют их просто заявками [1]. Положительная заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней системе некоторый доход, и соответственно доход первой системы уменьшается на эту величину.

Положительная заявка, обслуженная в СМО S_i, с вероятностью p_{ij}^{+} направляется в СМО S_j как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^{-} – как отрицательная заявка, и с вероятностью

$$p_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-}\right) \tag{1}$$

заявка уходит из сети во внешнюю среду (СМО S_0), $i,\ j=\overline{1,n}$. Под состоянием сети будем понимать вектор $k(t)=(k,t)=(k_1(t),k_2(t),\ldots,k_n(t))$, где $k_i(t)$ – число заявок в момент времени t в системе S_i, $i=\overline{1,n}$.

2. Анализ сети с доходами, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями

Будем рассматривать сеть с учетом доходов и расходов СМО сети при обслуживании положительных и отрицательных заявок. Проанализируем случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени. Пусть функция $v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k. Предположим, что эта функция дифференцируема по t; I_i – вектор с ненулевыми компонентами за исключением компоненты с номером i, которая равна 1, $i=\overline{1,n}$; I_0 – нулевой n-вектор; $r_i(k)$ – доход системы S_i в единицу времени, когда сеть находится в состоянии k; $r_{0i}(k+I_i,t)$ – доход системы S_i, когда сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i,t+\Delta t)$ за время Δt; $-R_{i0}(k-I_i,t)$ – доход этой системы, если сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k-I_i,t+\Delta t)$; $r_{ij}(k+I_i-I_j,t)$ – доход системы S_i (расход или убыток системы S_j), когда сеть изменяет свое состояние из (k,t) на $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ за время Δt; $-r_{ij}(k-I_i-I_j,t)$ – доход системы S_i, когда сеть изменяет свое состояние из (k,t) на $(k-I_i-I_j,t+\Delta t)$ за время Δt, $i,j=\overline{1,n}$. Требуется найти ожидаемые (средние) доходы систем сети за время t при условии, что нам известно ее состояние в начальный момент времени.

Возможные переходы между состояниями сети, вероятности переходов и доходы системы S_i от этих переходов указаны в таблице, согласно которой, например, если сеть остается в состоянии k в момент времени $t+\Delta t$, то ожидаемый доход системы S_i составит $r_i(k)\Delta t$ за время Δt плюс ожидаемый доход $v_i(k,t)$, который эта система получила за предыдущие t единиц времени, $u(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ – функция Хевисайда. Такие переходы находятся так же, как и в [5], но с учетом отрицательных заявок.

Возможные переходы между состояниями сети, их вероятности и доходы системы S_i

Возможные переходы между состояниями сети	Вероятности переходов	Доходы системы S_i от переходов между состояниями
$(k,t)\to(k,t+\Delta t)$	$1-\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}^{+}+\left(\lambda_{0j}^{-}+\mu_j\right)u\left(k_j\right)\right]\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k,t)$
$(k,t)\to(k+I_j,t+\Delta t)$, $j\ne i$	$\lambda_{0j}^{+}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k+I_j,t)$
$(k,t)\to(k-I_j,t+\Delta t)$, $j\ne i$	$\mu_j p_{j0}u(k_j)\Delta t+\lambda_{0j}^{-}u(k_j)\Delta t+$ $+\mu_j\sum\limits_{\substack{c=1\\ c\ne i}}^{n}p_{jc}^{-}(1-u(k_c))\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k-I_j,t)$
$(k,t)\to(k+I_i,t+\Delta t)$	$\lambda_{0i}^{+}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_{0i}(k+I_i,t)+v_i(k+I_i,t)$
$(k,t)\to(k-I_i,t+\Delta t)$	$\mu_i p_{i0}u(k_i)\Delta t+\lambda_{0i}^{-}u(k_i)\Delta t+$ $+\mu_i\sum\limits_{\substack{c=1\\ c\ne i}}^{n}p_{ic}^{-}(1-u(k_c))\Delta t+o(\Delta t)$	$-R_{i0}(k-I_i,t)+v_i(k-I_i,t)$
$(k,t)\to(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$, $j\ne i$	$\mu_j p_{ji}^{+}u(k_j)\Delta t+o(\Delta t)$	$r_{ij}(k+I_i-I_j,t)+$ $+v_i(k+I_i-I_j,t)$
$(k,t)\to(k-I_i+I_j,t+\Delta t)$, $j\ne i$	$\mu_i p_{ij}^{+}u(k_i)\Delta t+o(\Delta t)$	$-r_{ji}(k-I_i+I_j,t)+$ $+v_i(k-I_i+I_j,t)$
$(k,t)\to(k+I_c-I_s,t+\Delta t)$, $c,s\ne i$	$\mu_s p_{sc}^{+}u(k_s)\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k+I_c-I_s,t)$
$(k,t)\to(k-I_i-I_j,t+\Delta t)$, $j\ne i$	$\mu_i p_{ij}^{-}\Delta t+o(\Delta t)$	$-r_{ij}(k-I_i-I_j,t)+$ $+v_i(k-I_i-I_j,t)$
$(k,t)\to(k-I_c-I_s,t+\Delta t)$, $c,s\ne i$	$\mu_c p_{cs}^{-}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k-I_c-I_s,t)$

Используя формулу полной вероятности для математического ожидания, получаем систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) для дохода $v_i(k,t)$:

$$\frac{dv_i(k,t)}{dt}=r_i(k)-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}^{+}+\left(\lambda_{0j}^{-}+\mu_j\right)u\left(k_j\right)\right]v_i(k,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{0j}^{+}v_i\left(k+I_j,t\right)+\left[\mu_j p_{j0}u\left(k_j\right)+\lambda_{0j}^{-}u\left(k_j\right)+\mu_j\sum_{\substack{c=1\\ c\ne j}}^{n}p_{jc}^{-}\left(1-u\left(k_c\right)\right)\right]v_i\left(k-I_j,t\right)\right)+$$

$$+\lambda_{0i}^{+}v_i(k+I_i,t)+\left[\mu_i p_{i0}u(k_i)+\lambda_{0i}^{-}u(k_i)+\mu_i\sum_{\substack{c=1\\c\neq i}}^{n}p_{ic}^{-}(1-u(k_c))\right]v_i(k-I_i,t)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left[\mu_j p_{ji}^{+}u(k_j)v_i(k+I_i-I_j,t)+\mu_i p_{ij}^{+}u(k_i)v_i(k-I_i+I_j,t)+\mu_i p_{ij}^{-}v_i(k-I_i-I_j,t)\right]+ \qquad (2)$$

$$+\sum_{\substack{c,s=1\\c,s\neq i,c\neq s}}^{n}\left[\mu_s p_{sc}^{+}u(k_s)v_i(k+I_c-I_s,t)+\mu_c\, p_{cs}^{-}v_i(k-I_c-I_s,t)\right]+$$

$$+\lambda_{0i}^{+}r_{0i}(k+I_i,t)-\left[\mu_i p_{i0}u(k_i)+\lambda_{0i}^{-}u(k_i)+\mu_i\sum_{\substack{c=1\\c\neq i}}^{n}p_{ic}^{-}(1-u(k_c))\right]R_{i0}(k-I_i,t)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left[\mu_j p_{ji}^{+}u(k_j)r_{ij}(k+I_i-I_j,t)-\mu_i p_{ij}^{+}u(k_i)r_{ji}(k-I_i+I_j,t)-\mu_i p_{ij}^{-}r_{ij}(k-I_i-I_j,t)\right].$$

Число уравнений в этой системе равно числу состояний сети, для открытой сети оно является бесконечным. В случае когда доходы от переходов между состояниями сети не зависят от времени, для решения системы (2) могут быть использованы алгоритмы, аналогичные тем, которые были предложены для НМ-сетей с обычными заявками, и основанные на применении метода многомерных z-преобразований [5, 6] и метода последовательных приближений, совмещенного с методом рядов [5, 7].

3. Анализ сети, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами

Пусть случайная величина (СВ) ξ_i – время обслуживания заявки в системе S_i, распределенная по экспоненциальному закону с функцией распределения $F_{\xi_i}(t)=1-e^{-\mu_i t}$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим динамику изменения доходов системы S_i сети. Пусть в начальный момент времени доход этой системы был равен v_{i0}. Нас будет интересовать доход системы $V_i(t)$ в момент времени t. Разобьем отрезок $[0,t]$ на m равных частей длиной $\Delta t=\dfrac{t}{m}$, считая m достаточно большой. Для нахождения дохода системы S_i выпишем условные вероятности тех событий, которые могут произойти на l-м отрезке времени, $l=\overline{1,m}$. Возможны следующие ситуации:

1. С вероятностью $\lambda_{0i}^{+}\Delta t+o(\Delta t)$ в систему S_i поступит положительная заявка из внешней среды, которая принесет ей доход в размере r_{0i}, где r_{0i} – СВ с математическим ожиданием (м.о.) $M\{r_{0i}\}=a_{0i}$, $i=\overline{1,n}$.

2. С вероятностью $\lambda_{0i}^{-}\Delta t+o(\Delta t)$ в систему S_i поступит отрицательная заявка из внешней среды, которая принесет ей доход (убыток) в размере $-\overline{r}_{0i}$, где $\overline{r}_{0i}$ – СВ с м.о. $M\{\overline{r}_{0i}\}=\overline{a}_{0i}$, $i=\overline{1,n}$.

3. С вероятностью $\mu_i p_{i0}u\left(k_i^{(l)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$ заявка из системы S_i перейдет во внешнюю среду, при этом доход системы S_i уменьшится на величину R_{i0}, где R_{i0} – СВ с м.о. $M\{R_{i0}\}=b_{i0}$,

$k_i^{(l)}$ – число заявок в системе S_i (в очереди и на обслуживании) на l-м отрезке времени, $l=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}$.

4. Положительная заявка из системы S_i перейдет в систему S_j с вероятностью $\mu_i p_{ij}^{+} u\left(k_i^{(l)}\right)\Delta t + o(\Delta t)$, $i, j=\overline{1,n}$, $i \neq j$. При таком переходе доход системы S_i уменьшится на величину $R_{ij}(\xi_i)$, а доход системы S_j увеличится на эту величину:

$$M\left\{R_{ij}(\xi_i)\right\} = \int_0^\infty R_{ij}(t)d\,F_{\xi_i}(t) = \mu_i \int_0^\infty R_{ij}(t)e^{-\mu_i t}dt = a_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n},\ i \neq j.$$

5. С вероятностью $\mu_j p_{ji}^{+} u(k_j)\Delta t + o(\Delta t)$ положительная заявка перейдет из системы S_j в систему S_i, при этом доход S_i возрастет на величину $R_{ji}(\xi_j)$, а доход системы S_j уменьшится на эту величину, $M\left\{R_{ji}(\xi_j)\right\} = a_{ji}$, $j=\overline{1,n},\ j \neq i$.

6. Положительная заявка из системы S_i перейдет в систему S_j с вероятностью $\mu_i p_{ij}^{-}\Delta t + o(\Delta t)$ как отрицательная заявка, $i, j=\overline{1,n}$, $i \neq j$. При таком переходе доход системы S_i увеличится на величину $\bar{R}_{ij}$, где $\bar{R}_{ij}$ – СВ с м.о. $M\left\{\bar{R}_{ij}\right\} = c_{ij}$, $i, j=\overline{1,n}$, $i \neq j$.

7. С вероятностью $1-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}^{+} + \left(\lambda_{0j}^{-} + \mu_j\right)u\left(k_j^{(l)}\right)\right]\Delta t + o(\Delta t)$ на отрезке времени Δt состояние сети не изменится.

8. За каждый малый промежуток времени Δt система S_i из-за нахождения в ней заявок увеличивает свой доход на величину $r_i\Delta t$, где r_i – СВ с м.о. $M\{r_i\} = d_i$, $i=\overline{1,n}$.

Пусть $\Delta V_{il}(\Delta t)$ – изменение дохода системы S_i на l-м отрезке времени, связанное с переходами между СМО сети заявок. Из этого следует

$$\Delta V_{il}(\Delta t) = \begin{cases} r_{0i} + r_i\Delta t \text{ с вероятностью } \lambda_{0i}^{+}\Delta t + o(\Delta t), \\ -\bar{r}_{0i} + r_i\Delta t \text{ с вероятностью } \lambda_{0i}^{-}\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{i0} + r_i\Delta t \text{ с вероятностью } \mu_i p_{i0} u\left(k_i^{(l)}\right)\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{ij}(\xi_i) + r_i\Delta t \text{ с вероятностью } \mu_i p_{ij}^{+} u\left(k_i^{(l)}\right)\Delta t + o(\Delta t),\ j=\overline{1,n},\ j \neq i, \\ R_{ji}(\xi_j) + r_i\Delta t \text{ с вероятностью } \mu_j p_{ji}^{+} u\left(k_j^{(l)}\right)\Delta t + o(\Delta t),\ j=\overline{1,n},\ j \neq i, \\ -\bar{R}_{ij} + r_i\Delta t \text{ с вероятностью } \mu_i p_{ij}^{-}\Delta t + o(\Delta t),\ j=\overline{1,n},\ j \neq i, \\ r_i\Delta t \text{ с вероятностью } 1-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}^{+} + \left(\lambda_{0j}^{-} + \mu_j\right)u\left(k_j^{(l)}\right)\right]\Delta t + o(\Delta t)\ . \end{cases} \tag{3}$$

Общий доход системы S_i

$$V_i(t) = v_{i0} + \sum_{l=1}^{m}\Delta V_{il}(\Delta t) = v_{i0} + V_i(\Delta t),$$

где $V_i(\Delta t) = \sum_{l=1}^{m}\Delta V_{il}(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$.

Найдем выражение для ожидаемого дохода системы S_i в момент времени t. Предположим, что все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки, т. е. $k_i(t)>0$, $\forall t>0$, $i=\overline{1,n}$. Тогда с учетом (3) для математического ожидания можно записать:

$$M\{\Delta V_{il}(\Delta t)\}=(a_{0i}+d_i\Delta t)(\lambda_{0i}^{+}\Delta t+o(\Delta t))+(-\bar{a}_{0i}+d_i\Delta t)(\lambda_{0i}^{-}\Delta t+o(\Delta t))+$$

$$+(-b_{i0}+d_i\Delta t)(\mu_i p_{i0}\Delta t+o(\Delta t))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[(-a_{ij}+d_i\Delta t)(\mu_i p_{ij}^{+}\Delta t+o(\Delta t))\right]+\sum_{j=1}^{n}\left[(a_{ji}+d_i\Delta t)(\mu_j p_{ji}^{+}\Delta t+o(\Delta t))\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[(-c_{ij}+d_i\Delta t)(\mu_i p_{ij}^{-}\Delta t+o(\Delta t))\right]+d_i\Delta t\left(1-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_{0j}^{+}+(\lambda_{0j}^{-}+\mu_j)\right]\Delta t+o(\Delta t)\right)=$$

$$=\left[a_{0i}\lambda_{0i}^{+}-\bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^{-}-b_{i0}\mu_i p_{i0}\right]\Delta t+\sum_{j=1}^{n}\left[-a_{ij}\mu_i p_{ij}^{+}+a_{ji}\mu_j p_{ji}^{+}-c_{ij}\mu_i p_{ij}^{-}+d_i\right]\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n}.$$

Поскольку $m\Delta t=t$ и при $m\to\infty$ величина $\Delta t\to 0$, получим

$$v_i(t)=M\{V_i(t)\}=\sum_{l=1}^{m}M\{\Delta V_{il}(\Delta t)\}=v_{i0}+$$

$$+\left(a_{0i}\lambda_{0i}^{+}-\bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^{-}-\mu_i\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_{ij}^{-}+d_i-b_{i0}\mu_i p_{i0}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mu_i p_{ij}^{+}+\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\mu_j p_{ji}^{+}\right)m\Delta t=$$

$$=v_{i0}+\left[\lambda_{0i}^{+}a_{0i}-\lambda_{0i}^{-}\bar{a}_{0i}-\mu_i\left(b_{i0}p_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}p_{ij}^{+}+c_{ij}p_{ij}^{-}\right)\right)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j a_{ji}p_{ji}^{+}+d_i\right]t,\ i=\overline{1,n}.$$

Для сравнения соотношение для общего дохода системы S_i в случае, когда в сети нет отрицательных заявок и все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки, имеет вид [7]

$$\tilde{v}_i(t)=v_{i0}+\left[\lambda a_{0i}\tilde{p}_{0i}-\mu_i b_{i0}\tilde{p}_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\mu_j a_{ji}\tilde{p}_{ji}-\mu_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{p}_{ij}+d_i\right]t,\ i=\overline{1,n},$$

где λ – интенсивность поступающего в сеть простейшего потока заявок; $\tilde{p}_{0i}$ – вероятность поступления заявки в систему S_i, $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_{0i}=1$; $\tilde{p}_{ij}$ – вероятность того, что заявка, завершившая обслуживание в i-й СМО, направляется в j-ю СМО, $\sum_{j=0}^{n}\tilde{p}_{ij}=1$, $i=\overline{1,n}$; $\tilde{p}_{i0}$ – вероятность, с которой заявка покидает сеть, $\tilde{p}_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\tilde{p}_{ij}$, $i=\overline{1,n}$.

Найдем разность $\tilde{v}_i(t)-v_i(t)$. Заметим, что $p_{ij}^{+}=\tilde{p}_{ij}$ и $\lambda_{0i}^{+}=\lambda\tilde{p}_{0i}$, $i,j=\overline{1,n}$. С учетом (1) получим

$$\tilde{v}_i(t)-v_i(t)=v_{i0}+\left[\lambda a_{0i}\tilde{p}_{0i}-\mu_i b_{i0}\tilde{p}_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\mu_j a_{ji}\tilde{p}_{ji}-\mu_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{p}_{ij}+d_i\right]t-$$

$$-v_{i0}-\left[\lambda_{0i}^{+}a_{0i}-\lambda_{0i}^{-}\overline{a}_{0i}-\mu_i\left(b_{i0}p_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}p_{ij}^{+}+c_{ij}p_{ij}^{-}\right)\right)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j a_{ji}p_{ji}^{+}+d_i\right]t=$$

$$=\left[\lambda_{0i}^{-}\overline{a}_{0i}+\mu_i\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_{ij}^{-}-\mu_i b_{i0}\widetilde{p}_{i0}+\mu_i b_{i0}p_{i0}\right]t=$$

$$=\left[\lambda_{0i}^{-}\overline{a}_{0i}+\mu_i\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_{ij}^{-}-\mu_i b_{i0}\left(1-\sum_{j=1}^{n}\widetilde{p}_{ij}\right)+\mu_i b_{i0}\left(1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-}\right)\right)\right]t=$$

$$=\left[\lambda_{0i}^{-}\overline{a}_{0i}+\mu_i\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^{-}\left(c_{ij}-b_{i0}\right)\right]t\quad i=\overline{1,n}\,.$$

Пример. Пусть количество СМО в сети n = 10. Интенсивности входного потока положительных и отрицательных заявок λ_{0i}^{+} и λ_{0i}^{-} равны соответственно $\lambda_{01}^{+}=2,\ \lambda_{04}^{+}=4,\ \lambda_{07}^{+}=3,$ $\lambda_{01}^{-}=1,\ \lambda_{04}^{-}=2,\ \lambda_{05}^{-}=3,$ остальные равны нулю. Интенсивности обслуживания заявок μ_i равны $\mu_1=\mu_2=\mu_3=2,\ \mu_4=1,\ \mu_5=3,\ \mu_6=4,\ \mu_7=3,\ \mu_8=13,\ \mu_9=7,\ \mu_{10}=8$. Пусть вероятности p_{ij}^{+} равны соответственно $p_{12}^{+}=1/8$, $p_{13}^{+}=1/8$, $p_{21}^{+}=p_{23}^{+}=p_{24}^{+}=p_{25}^{+}=1/10$, $p_{31}^{+}=p_{32}^{+}=p_{36}^{+}=$ $=p_{37}^{+}=1/10,$ $p_{42}^{+}=p_{45}^{+}=p_{48}^{+}=1/8$, $p_{52}^{+}=p_{54}^{+}=p_{56}^{+}=p_{58}^{+}=1/8$, $p_{63}^{+}=p_{65}^{+}=p_{67}^{+}=p_{69}^{+}=1/8$, $p_{73}^{+}=p_{76}^{+}=p_{79}^{+}=1/8$, $p_{84}^{+}=p_{85}^{+}=p_{89}^{+}=p_{8,10}^{+}=1/8$, $p_{96}^{+}=p_{97}^{+}=p_{98}^{+}=p_{9,10}^{+}=1/8$, $p_{10,8}^{+}=p_{10,9}^{+}=1/5$, остальные равны нулю. Вероятности того, что положительные заявки, обслуженные в СМО S_i, направляются в СМО S_j как отрицательные заявки, равны $p_{12}^{-}=1/9$, $p_{13}^{-}=1/9$, $p_{21}^{-}=1/11,$ $p_{23}^{-}=1/11,$ $p_{24}^{-}=1/11,$ $p_{25}^{-}=1/11,$ $p_{31}^{-}=1/11,$ $p_{32}^{-}=1/11,$ $p_{36}^{-}=1/11,$ $p_{37}^{-}=1/11,$ $p_{42}^{-}=p_{45}^{-}=p_{48}^{-}=1/9$, $p_{52}^{-}=p_{54}^{-}=p_{56}^{-}=p_{58}^{-}=1/9$, $p_{63}^{-}=1/9$, $p_{65}^{-}=1/9$, $p_{67}^{-}=1/9$, $p_{69}^{-}=1/9$, $p_{73}^{-}=p_{73}^{-}=p_{79}^{-}=1/9$, $p_{84}^{-}=p_{85}^{-}=p_{89}^{-}=p_{8,10}^{-}=1/9$, $p_{96}^{-}=p_{97}^{-}=p_{98}^{-}=p_{9,10}^{-}=1/9$, $p_{10,8}^{-}=p_{10,9}^{-}=1/6$, остальные равны нулю. Вероятности выхода заявок из сети во внешнюю среду $p_{40}=p_{70}=7/24$, $p_{10,0}=4/15$. Математические ожидания $a_{01}=10\,000,\ a_{02}=20\,000,\ a_{03}=30\,000,\ a_{04}=50\,000,$ $a_{05}=a_{06}=10\,000,$ $a_{07}=40\,000,$ $a_{08}=30\,000,$ $a_{09}=50\,000,\ a_{010}=10\,000;$ $\overline{a}_{01}=50\,000,$ $\overline{a}_{02}=60\,000,$ $\overline{a}_{03}=10\,000,$ $\overline{a}_{04}=25\,000,$ $\overline{a}_{05}=50\,000,$ $\overline{a}_{06}=7000,$ $\overline{a}_{07}=3000,$ $\overline{a}_{08}=2500,$ $\overline{a}_{09}=1200,$ $\overline{a}_{010}=9000;$ $b_{10}=1000,$ $b_{20}=2000,$ $b_{30}=3000,$ $b_{40}=5000,$ $b_{50}=b_{60}=b_{70}=1000,$ $b_{80}=3000,$ $b_{90}=5000,$ $b_{10,0}=1000;$ $c_{12}=1000,$ $c_{13}=1500,$ $c_{21}=c_{23}=\ =c_{24}=c_{25}=2000,$ $c_{31}=c_{32}=c_{36}=c_{37}=1000,$ $c_{42}=c_{45}=c_{48}=2000,$ $c_{52}=c_{54}=c_{56}=c_{58}=1500,$ $c_{63}=c_{65}=c_{67}=c_{69}=1700,$ $c_{73}=c_{76}=c_{79}=2300,$ $c_{84}=2000,$ $c_{85}=2000,$ $c_{89}=2000,$ $c_{8,10}=2000,$ $c_{96}=c_{97}=c_{98}=c_{9,10}=3000,$ $c_{10,8}=c_{10,9}=1300,$ $d_1=100,$ $d_2=200,$ $d_3=300,$ $d_4=120,$ $d_5=200,$ $d_6=100,$ $d_7=800,$ $d_8=100,$ $d_9=120,$ $d_{10}=300,$ остальные равны нулю. Случайные доходы системы S_i имеют вид

$$R_{12}(\xi_1)=3000\xi_1,\ R_{13}(\xi_1)=0.1+1000\xi_1,$$

$$R_{21}(\xi_2)=2500+\xi_2,\ R_{23}(\xi_2)=100\xi_2,\ R_{24}(\xi_2)=200\xi_2,\ R_{25}(\xi_2)=2000\xi_2,$$

$$R_{31}(\xi_3)=0{,}5\xi_3+1000,\ R_{32}(\xi_3)=0{,}1\xi_3+10000,\ R_{36}(\xi_3)=0{,}5\xi_3+450,\ R_{37}(\xi_3)=0{,}5\xi_3+5000,$$

$$R_{42}(\xi_4)=10\xi_4-100,\ R_{45}(\xi_4)=(\xi_4+100)\xi_4,\ R_{48}(\xi_4)=2000\xi_4,$$

$$R_{52}(\xi_5)=1000\xi_5-10,\ R_{54}(\xi_5)=1000\xi_5+100,\ R_{56}(\xi_5)=1000\xi_5+300, R_{58}(\xi_5)=1000\xi_5,$$

$$R_{63}(\xi_6)=\xi_6+1000,\ R_{65}(\xi_5)=5\xi_5+1000,\ R_{67}(\xi_6)=3\xi_6+1000, R_{69}(\xi_6)=2\xi_6+1000,$$

$$R_{73}(\xi_7)=1000\xi_7-100,\ R_{76}(\xi_7)=1000\xi_7,\ R_{79}(\xi_7)=100\xi_7+300,$$

$$R_{84}(\xi_8)=\xi_8(\xi_8+1000),\ R_{85}(\xi_8)=\xi_8(\xi_8+100),\ R_{89}(\xi_8)=\xi_8(\xi_8-10), R_{8,10}(\xi_8)=\xi_8(\xi_8+200),$$

$$R_{96}(\xi_9)=\xi_9+1000,\ R_{97}(\xi_9)=3\xi_9+1000,\ R_{98}(\xi_9)=10\xi_9+1000, R_{9,10}(\xi_9)=\xi_9-100,$$

$$R_{10,8}(\xi_{10})=3000\xi_{10},\ R_{10,9}(\xi_{10})=3000\xi_{10}-100.$$

Математические ожидания этих случайных доходов были рассчитаны в пакете Mathematica и равны соответственно

$$a_{12}=144000e^{-2t}t,\ a_{13}=48e^{-2t}(0{,}1+1000t),$$

$$a_{21}=48e^{-2t}(2500+t),\ a_{23}=4800e^{-2t}t,\ a_{24}=9600e^{-2t}t,\ a_{245}=96\,000e^{-2t}t,$$

$$a_{31}=48e^{-2t}(1000+0{,}5t),\ a_{32}=48e^{-2t}(10\,000+0{,}1t),\ a_{36}=48e^{-2t}(450+0{,}5t),\ a_{37}=48e^{-2t}(5000+0{,}5t),$$

$$a_{42}=24e^{-t}(10t-100),\ a_{45}=24e^{-t}(t+100),\ a_{48}=48\,000te^{-t},$$

$$a_{52}=72e^{-3t}(1000t-10),\ a_{54}=72e^{-3t}(1000t+100),\ a_{56}=72e^{-3t}(1000t+300),\ a_{54}=72\,000e^{-3t}t,$$

$$a_{63}=96e^{-4t}(t+1000),\ a_{65}=96e^{-4t}(5t+1000),\ a_{67}=96e^{-4t}(3t+1000),\ a_{69}=96e^{-4t}(2t+1000),$$

$$a_{73}=72e^{-3t}(-100+1000t),\ a_{76}=72\,000te^{-3t},\ a_{79}=72e^{-3t}(300+100t),$$

$$a_{84}=312e^{-13t}(1000+t),\ a_{85}=312e^{-13t}(100+t),\ a_{89}=312e^{-13t}(-10+t)t,\ a_{8,10}=312e^{-13t}(200+t),$$

$$a_{96}=168e^{-7t}(1000+t),\ a_{97}=168e^{-7t}(1000+3t),\ a_{98}=168e^{-7t}(1000+10t),\ a_{9,10}=168e^{-7t}(t-100),$$

$$a_{10,8}=576\,000e^{-8t}t,\ a_{10,9}=192e^{-8t}(3000-100t).$$

Доход в начальный момент времени $v_{i0}=0,\ i=\overline{1,n}$. Рассмотрим временной интервал длиной в 24 ч, $t\in[0,T],\ T=24$.

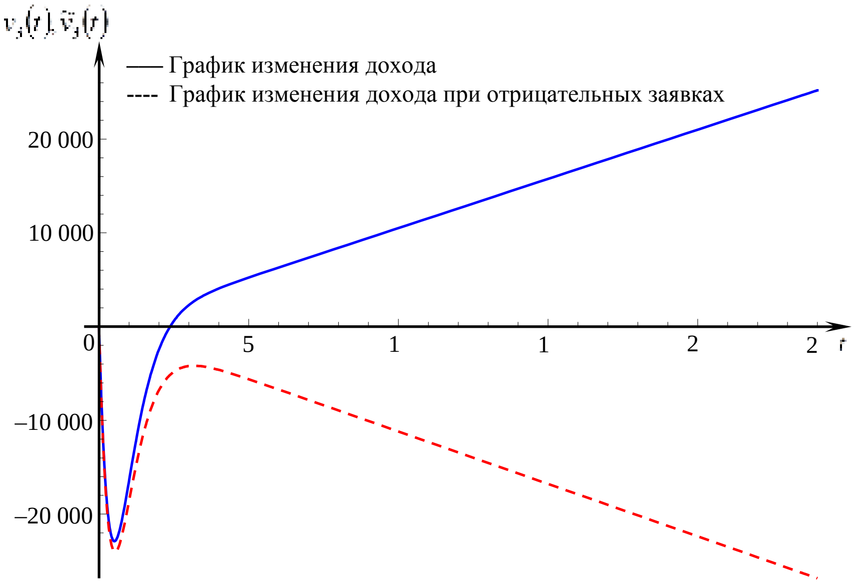
Нахождение ожидаемых доходов систем сети было реализовано в виде программы для пакета математических вычислений Mathematica. Были получены выражения для ожидаемых доходов. Например, выражение для ожидаемого дохода системы S_3 имеет вид

$$\tilde{v}_3(t)=0{,}2e^{-4t}t\left[e^{t}(135\,000t-13\,500)+e^{2t}(64\,723{,}2t-789\,594)+5250e^{4t}+240t+240\,000\right],$$

а в случае, когда в сети циркулируют отрицательные заявки, выражение для ожидаемого дохода системы S_3 примет вид

$$v_3(t)=e^{-4t}t\left[27e^{t}(1000t-100)+e^{2t}(12\,975{,}4t-157\,438{,}8)-\frac{61\,504}{55}e^{4t}+48t+48\,000\right].$$

На рисунке показано изменение доходов системы S_3 для НМ-сети с отрицательными заявками и без них. Видно, что отрицательные заявки не только уменьшают ожидаемый доход системы S_3, но при этом он может становиться вообще отрицательным.



Изменение доходов системы S_3

Заключение

В работе предложена методика нахождения ожидаемых доходов в системах НМ-сети МО с однолинейными СМО, положительными и отрицательными заявками в случаях, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени, либо являются СВ с известными средними. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с получением аналогичных результатов для сетей с многолинейными СМО.

Список литературы

1. Gelenbe, E. Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // J. of Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

2. Бочаров, П.П. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей / П.П. Бочаров, В.М. Вишневский // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 5. – С. 46–74.

3. Gelenbe, E. Stability of product-form G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probab. Eng. and Inf. Sci. – 1992. – Vol. 6. – P. 271–276.

4. Маталыцкий, М.А. О применении сетей обслуживания с доходами при решении задач транспортной логистики / М.А. Маталыцкий, О.М. Китурко // Информатика. – 2010. – № 4. – С. 81–95.

5. Маталыцкий, М.А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении / М.А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 10. – С. 97–113.

6. Колузаева, Е.В. Нахождение ожидаемых доходов в открытой двухузловой НМ-сети с помощью z-преобразований / Е.В. Колузаева // Вестник ГрГУ. Сер. 2. – 2009. – № 3. – С. 10–17.

7. Маталыцкий, М.А. Системы и сети МО: анализ и применения / М.А. Маталыцкий, О.М. Тихоненко, Е.В. Колузаева. – Гродно : ГрГУ, 2011. – 817 с.

Поступила 04.11.13

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы,
Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: m.matalytski@gmail.com
victornn86@gmail.com

V.V. Naumenko, M.A. Matalytski

ANALYSIS OF MARKOV NETWORK WITH INCOMES, POSITIVE AND NEGATIVE MESSAGES

Markov queuing network with income in transient regime is considered. It has positive and negative messages, which can be used in forecasting income of information and telecommunication systems and networks affected by viruses. Investigations are carried out in the cases when incomes from transitions between network states are deterministic functions dependent on states, or they are random variables with given mean values. In the last case it is assumed that all network systems operate in a high load mode. An example is given.