

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING



УДК 519.24
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2024-21-2-24-35>

Оригинальная статья
Original Article

Применение моделей копул в анализе акций фондового рынка

А. М. Кендысь[✉], Н. Н. Труш

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь
[✉]E-mail: kendyslesha@gmail.com

Аннотация

Цели. Целью исследования является применение моделей копул для анализа акций российского фондового рынка и описания изменения зависимости между акциями до и во время коронавирусной инфекции (COVID-19).

Методы. Приводится алгоритм использования копул и функций языка программирования R при его реализации. Для описания динамики финансовых рядов используется модель ARMA-GJR-GARCH (ARMA-Glosten-Jagannathan-Runkle-GARCH, модель авторегрессии – скользящего среднего Глостен – Джаганнатан – Ранкл с обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичностью). Осуществляется подбор оптимальных семейств и параметров моделей копул. Проверяется адекватность полученных моделей и анализируются результаты исследования взаимосвязи между данными рядами.

Результаты. Разработан алгоритм для относительно нового подхода использования копул в связке с моделью ARMA-GJR-GARCH. Подход применен для исследования влияния коронавируса в контексте российской экономики. Выявлено, что в период COVID-19 зависимость между различными акциями фондового рынка возрастает. Показано, что эффект волатильности финансовых рядов увеличивается после вспышки пандемии.

Заключение. Алгоритм исследования с помощью моделей копул в связке с моделью ARMA-GJR-GARCH показал свою целесообразность. Данный подход можно использовать и с применением других моделей GARCH-типа для исследования финансов и других сфер.

Ключевые слова: копула, модель ARMA-GJR-GARCH, фондовый рынок, акции, коронавирусная инфекция, математическое моделирование

Для цитирования. Кендысь, А. М. Применение моделей копул в анализе акций фондового рынка / А. М. Кендысь, Н. Н. Труш // Информатика. – 2024. – Т. 21, № 2. – С. 24–35.
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2024-21-2-24-35>

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 27.12.2023
Подписана в печать | Accepted 21.03.2024
Опубликована | Published 28.06.2024

Application of copula models in stock market analysis

Alexey M. Kendys[✉], Mikolai M. Trough

Belarusian State University,
av. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220030, Belarus
[✉]E-mail: kendyslesha@gmail.com

Abstract

Objectives. The objective of the study is to use copula models to analyze shares of the Russian stock market and describe changes in the relationship between the shares before and during the coronavirus infection (COVID-19).

Methods. An algorithm for using copulas and functions of the R programming language in its implementation is presented. To model the dynamics of financial series the ARMA-GJR-GARCH process (autoregressive moving average GJosten-Jagannathan-Runkle model with generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) is used. The selection of optimal families and parameters of copula models is carried out. The adequacy of the obtained models is checked and the results of the study of the relationship between the series are analyzed.

Results. An algorithm has been developed for a relatively new approach to using copulas in conjunction with the ARMA-GJR-GARCH model. The approach was used to study the impact of coronavirus in the context of the Russian economy. It is revealed that during the COVID-19 period the dependence between different stocks increases. It is shown that the effect of volatility in financial series increases after the outbreak of the pandemic.

Conclusion. The research algorithm using copula models in conjunction with the ARMA-GJR-GARCH process has shown its feasibility. This approach can be used with other GARCH-type models to study finance and other areas.

Keywords: copula, ARMA-GJR-GARCH model, stock market, shares, coronavirus infection, mathematical modelling

For citation. Kendys A. M., Trough M. M. *Application of copula models in stock market analysis*. *Informatika [Informatics]*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 24–35 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2024-21-2-24-35>

Conflict of interest. The authors declare of no conflict of interest.

Введение. В настоящее время активное исследование и применение копул происходит в таких областях, как, например, управление финансами, анализ страховых рисков, моделирование макроэкономических процессов. Э. Склар ввел копулы в 1959 г. как мощный инструмент для моделирования зависимости между переменными. Копулы – это функции, которые позволяют «связывать» многомерные функции распределения с их одномерными маргинальными функциями распределения. Данное представление оказывается удобнее, чем использование совместных функций распределений изучаемых показателей. Это обусловлено тем, что, с одной стороны, в копулах выделены маргинальные распределения показателей, что, конечно же, играет важную роль при исследовании реальных совокупностей, а с другой – выделена структура зависимости между найденными маргинальными распределениями.

Копулы активно применяются для управления финансовыми рисками, поскольку позволяют не только определять совместное распределение с помощью частных (маргинальных) функций и вида взаимосвязи, но и моделировать неэллипсообразные многомерные распределения.

В книге [1] описываются базовые принципы применения копул в финансах, а работы [2, 3] иллюстрируют современный подход к применению моделей копул в этой области. В настоящей статье копулы используются для исследования влияния коронавирусной инфекции на акции российского фондового рынка. Изучение последствий COVID-19 на экономику уже было проведено в различных публикациях [4–7]. Хотя копулы уже использовались в некоторых исследованиях для анализа последствий коронавирусной инфекции, у работ, фокусирующихся на российском фондовом рынке, есть ряд недостатков, к тому же использование модели ARMA-GJR-GARCH в связке с копулами является относительно новым подходом. Настоящая работа направлена на дополнение существующих исследований с применением современных методов матема-

тического моделирования, а также внесение нового вклада в литературу об исследовании влияния COVID-19 в контексте российской экономики. Помимо этого, в работе представлена разработка алгоритма исследования на языке R, который можно использовать в дальнейшем для изучения других данных и сравнения эффективности различных моделей.

Теория копул. Для начала приведем определение копулы и основную теорему теории копул.

Функция $C(u, v)$, принимающая значения на $[0; 1]$, называется копулой двух переменных u и v , где $u, v \in [0; 1]$ (т. е. $C(u, v)$ действует из $[0; 1]^2$ в $[0; 1]$), если она удовлетворяет следующим условиям [8, с. 10]:

- 1) $C(u, 0) = 0, C(0, v) = 0$;
- 2) $C(1, v) = v, C(u, 1) = u$;
- 3) $C(u_2, v_2) + C(u_1, v_1) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) \geq 0$, где $u_1, v_1, u_2, v_2 \in [0; 1]$ и $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$.

Аналогичное определение можно привести и для копулы размерности n [8, с. 45].

Теорема Склара [1, с. 24]. Функцию распределения случайного вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ со значениями в \mathbb{R}^n обозначим $F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}$. Пусть $F_{X_j}(x_j) = P\{X_j < x_j\}$, $j = \overline{1, n}$ – маргинальные функции распределения отдельных компонент. Тогда существует такая n -мерная копула $C(u_1, \dots, u_n)$, что для любых $x_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, справедлива формула

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)). \quad (1)$$

Если функции $F_{X_j}(x_j)$ непрерывны, $j = \overline{1, n}$, то такая копула C единственная.

Таким образом, копула позволяет перейти от одномерных распределений нескольких случайных величин к их совместному распределению.

Методология. Перед тем как измерять зависимость между финансовыми рядами, извлечем стандартизированные остатки данных для учета некоторых свойств финансовых временных рядов. Используем связку моделей ARMA(p, q)-GJR-GARCH(1, 1) [9], применяемую для стационарных временных рядов.

Модель авторегрессии – скользящего среднего, или ARMA(p, q), где p, q – целые числа, задается для временного ряда r_t в виде равенства [9]

$$r_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}, \quad (2)$$

где c – константа (отвечает за среднее значение); $\{\varepsilon_t\}$ – остатки модели ARMA; α_i и β_j – авторегрессионные (AR) коэффициенты и коэффициенты скользящего среднего (MA) соответственно (являются действительными числами), $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$; $t \in \mathbb{Z}$.

Сильная модель GJR-GARCH(1, 1), введенная Глостеном, Джаганнатаном и Ранклом, использует понятие гетероскедастичности и для процесса ε_t из равенства (2) задается соотношениями [9]

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (3)$$

где z_t – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним, единичной дисперсией и некоторым заданным распределением;

$I_{t-1} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ 1, & \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$; σ_t^2 – условная дисперсия; $\omega, \alpha, \beta, \gamma$ – параметры модели, где

$\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$. Параметр γ относится к модификации GJR и описывает эффект финансового рычага. Величины z_t и σ_t независимы.

В отличие от сильной модели слабая модель GJR-GARCH(1, 1) используется для процессов, у которых не существует вторых, а иногда и первых моментов.

В качестве распределения z_t будем рассматривать скошенное распределение Стьюдента. Для оценивания зависимости между стандартизированными остатками z_t будем применять копулы [3]. Найдем оптимальные семейства копул и их параметры и, используя их как оценки совместных распределений остатков, исследуем зависимость между рядами. Вычисления произведем с помощью языка программирования R [10]. Опишем алгоритм исследования и укажем основные функции, использованные в языке R для получения результатов.

Алгоритм исследования:

1. Преобразование исходных данных. Удаление тренда (функция *detrend*), стандартизация данных (функция *scale*).

2. Предварительный статистический анализ рассматриваемых временных рядов. Вывод описательных статистик (функция *descr*).

3. Проверка рядов на стационарность и отсутствие нормальности. В частности, тест на нормальность Харке – Бера (функция *col_jarquebera*) и некоторые тесты на стационарность: расширенный тест Дики – Фуллера (или ADF-тест, функция *adf.test*), тест Филлипса – Перрона (или PP-тест, функция *pp.test*) и тест Квятковского – Филлипса – Шмидта – Шина (или KPSS-тест, функция *kpss.test*, проверка на тренд).

4. Построение графиков Кендалла для предварительного анализа зависимости данных (функция *BiCopKPlot*).

5. Оценка оптимальных параметров p и q модели ARMA(p, q) (функция *auto.arima*).

6. Построение модели ARMA(p, q)-GJR-GARCH(1, 1) для полученных параметров p и q (функция *ugarchfit*).

7. Извлечение стандартизированных остатков из построенной модели (функция *residuals*).

8. Извлечение эффекта волатильности (функция *sigma*).

9. Построение графиков квантиль-квантиль для полученных остатков, основанных на скошенном распределении Стьюдента (функция *plot* с аргументом *which=9*).

10. Приведение стандартизированных остатков к псевдонаблюдениям с помощью функции *pobs*.

11. Выбор оптимальных моделей копул для описания зависимости между остатками рядов и оценка их параметров (функция *BiCopSelect*).

12. Генерация данных с помощью построенных копул и сравнение результатов с исходными данными (функция *BiCopSim*).

13. Сравнительный анализ зависимости рядов до коронавирусной инфекции и во время инфекции, основанный на полученных результатах и оптимальных копулах.

Исходные данные и их преобразование. Исследуются цены на акции следующих российских компаний: Лукойла, Газпрома, Магнита, МТС (Мобильные ТелеСистемы), Сбербанка, Аэрофлота. Соответственно, исследуются акции из шести различных областей: нефти, газа, торговли, телекоммуникаций, финансов и транспорта. Ежедневные данные были собраны с финансовой платформы *investing.com*¹ в период с 12.03.2018 по 11.01.2022.

На рис. 1, *a* представлены исходные данные для компаний Лукойл и Магнит, а на рис. 1, *b* – для компаний Газпром, МТС, Сбербанк, Аэрофлот (разные графики из-за большой разницы в значениях).

¹Investing.com [Electronic resource] // Fusion Media Limited. – Mode of access: <https://ru.investing.com>. – Date of access: 10.09.2023.

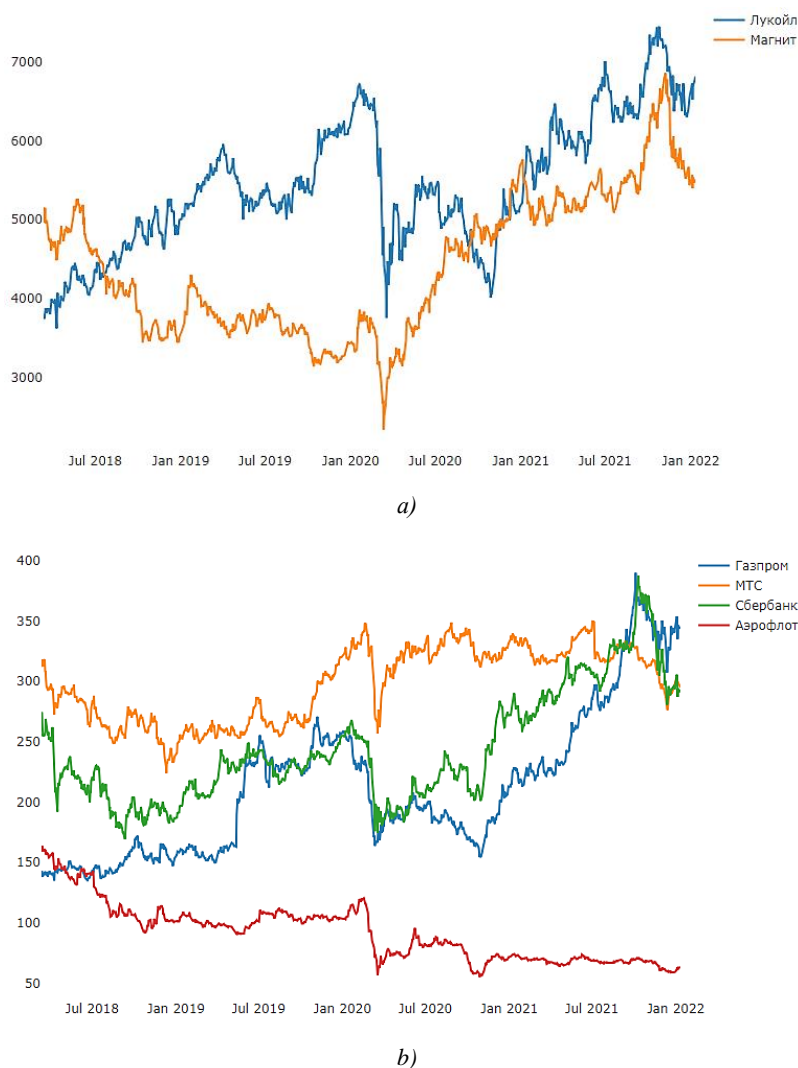


Рис. 1. Цены на акции компаний Лукойл и Магнит (а) и Газпром, МТС, Сбербанк и Аэрофлот (b)
Fig. 1. Share prices of Lukoil and Magnit (a) and Gazprom, MTS, Sberbank and Aeroflot (b)

Периодом до пандемии считаем даты с 12.03.2018 по 29.01.2020, а даты с 30.01.2020 по 11.01.2022 считаем периодом пандемии.

Обозначим через $P(t)$ цены на акции, а через $R(t)$ – логарифмические доходности в момент времени t :

$$R(t) = \ln \frac{P(t)}{P(t-1)}. \quad (4)$$

Из доходностей удаляется линейный тренд и полученные данные стандартизируются.

Описательные статистики и предварительный анализ зависимости. Для полученных доходностей были найдены описательные статистики, а также проведен тест на их нормальность Харке – Бера (приведено значение статистики), расширенный тест Дики – Фуллера (или ADF-тест, приведено значение статистики), тест Филлипса – Перрона (или PP-тест, приведено значение статистики) и тест Квятковского – Филлипса – Шмидта – Шина (или KPSS-тест, приведено значение статистики). Все результаты даны в табл. 1. Статистики тестов ADF и PP вычислены с уровнем значимости 0,01.

Таблица 1
Описательные статистики и результаты тестов

Table 1
Descriptive statistics and test results

Компания <i>Company</i>	Статистики <i>Statistics</i>									
	Выборочн. среднее <i>Mean</i>	Мин. <i>Min</i>	Макс. <i>Max</i>	Стат. отклонение <i>Std. dev.</i>	Коэф-т асимметр. <i>Skewness</i>	Коэф-т эксцесса <i>Kurtosis</i>	Тест Харке – Бера <i>Jarque-Bera test</i>	ADF	PP	KPSS
До пандемии										
Лукойл	0	-6,08	5,19	1	-0,03	4,11	341,8	-7,99	-427,36	0,05
Газпром	0	-4,64	8,85	1	1,85	15,32	4993,2	-7,7	-476,96	0,07
Магнит	0	-3,46	4,21	1	0,26	1,96	83,1	-7,6	-478,25	0,04
МТС	0	-5,73	3,3	1	-0,59	4,15	376,7	-9,03	-505,01	0,02
Сбербанк	0	-9,69	4,19	1	-1,89	18,47	7144,8	-7,97	-454,61	0,06
Аэрофлот	0	-5,5	4,11	1	0,1	4,82	470,8	-9,19	-421,81	0,03
Во время пандемии										
Лукойл	0	-8,7	6,15	1	-0,9	15,45	5010	-8,02	-520,92	0,07
Газпром	0	-5,25	3,62	1	-0,47	3,05	212	-7,25	-496,9	0,1
Магнит	0	-7,49	3,38	1	-1,05	8,87	1720	-7,59	-529,28	0,06
МТС	0	-6,43	5,42	1	-1,43	11,23	2782,4	-7,83	-521,95	0,03
Сбербанк	0	-4,93	5,97	1	-0,16	5,34	593,1	-7,29	-521,44	0,14
Аэрофлот	0	-6,15	4,59	1	-0,33	6,24	818	-5,95	-451,05	0,05

Из результатов тестов можно сделать вывод, что все ряды стационарны, не имеют трендов и не являются нормальными.

Далее для доходностей строятся графики Кендалла, основанные на двумерных копулах, с целью предварительного анализа зависимости между рядами. График Кендалла (Kendall Plot, или сокращенно K-Plot) – это аналог графика квантиль-квантиль для копул. Некоторые из графиков изображены на рис. 2.

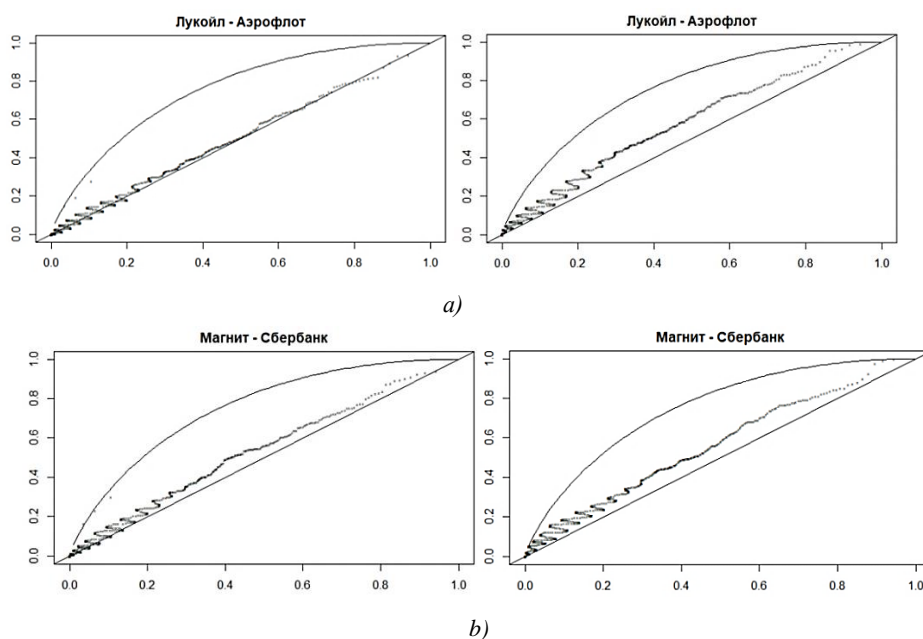


Рис. 2. Графики Кендалла для Лукойла-Аэрофлота до (слева) и во время (справа) пандемии (a) и для Магнита-Сбербанка до (слева) и во время (справа) пандемии (b)

Fig. 2. Kendall plots for Lukoil-Aeroflot before (left) and during (right) the pandemic (a) and for Magnit-Sberbank before (left) and during (right) the pandemic (b)

Как видно из графиков, зависимость после пандемии либо увеличивается по сравнению с зависимостью до пандемии, либо остается примерно такой же.

Применение модели ARMA-GJR-GARCH. Для доходностей вычисляются оптимальные параметры p и q для модели ARMA(p, q). Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2
Оптимальные параметры модели

Table 2
Optimal model parameters

Компания <i>Company</i>	Параметры <i>Options</i>			
	p	q	p	q
	До пандемии		Во время пандемии	
Лукойл	0	0	0	0
Газпром	0	0	0	0
Магнит	3	1	0	0
МТС	0	0	0	0
Сбербанк	2	4	0	0
Аэрофлот	2	2	2	1

Далее была построена модель ARMA(p, q)-GJR-GARCH(1, 1), основанная на формулах (2) и (3). На рис. 3 показаны некоторые графики стандартизированных остатков и исходных рядов для сравнения. Видно, что стандартизированные остатки отличаются от исходных рядов только результатом эффекта волатильности.

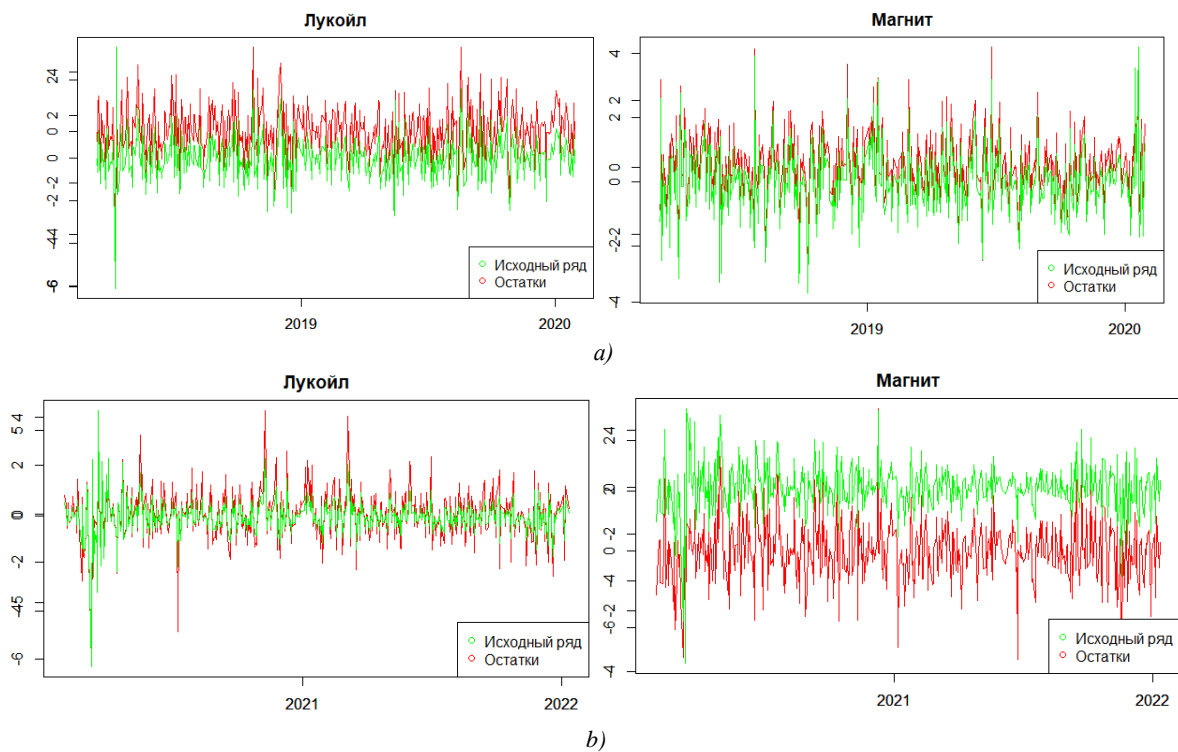


Рис. 3. Графики исходных рядов и стандартизированных остатков для Лукойла и Магнита до пандемии (a) и во время пандемии (b)

Fig. 3. Plots of initial series and standardized residuals for Lukoil and Magnit before the pandemic (a) and during the pandemic (b)

Волатильность, оцененная моделью, изображена на рис. 4. Видно, что эффект волатильности увеличивается после вспышки пандемии.

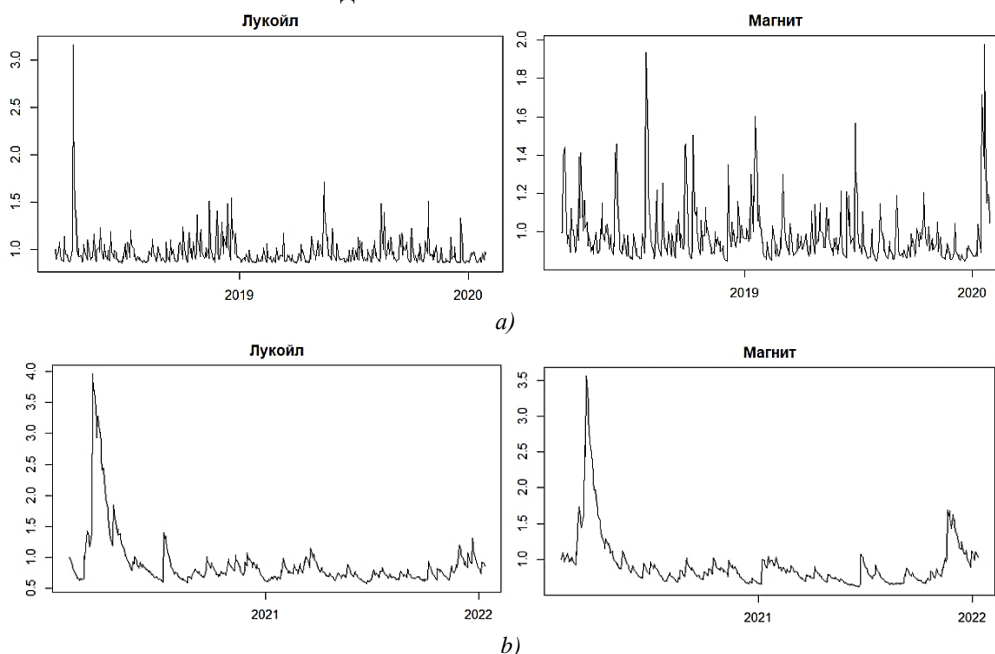


Рис. 4. Графики волатильности для Лукойла и Магнита до пандемии (a) и во время пандемии (b)

Fig. 4. Volatility plots for Lukoil and Magnit before the pandemic (a) and during the pandemic (b)

Для полученных стандартизированных остатков выведены графики квантиль-квантиль для проверки соответствия распределения оцененному скошенному распределению Стьюдента. На рис. 5 данные графики приведены для ряда МТС.

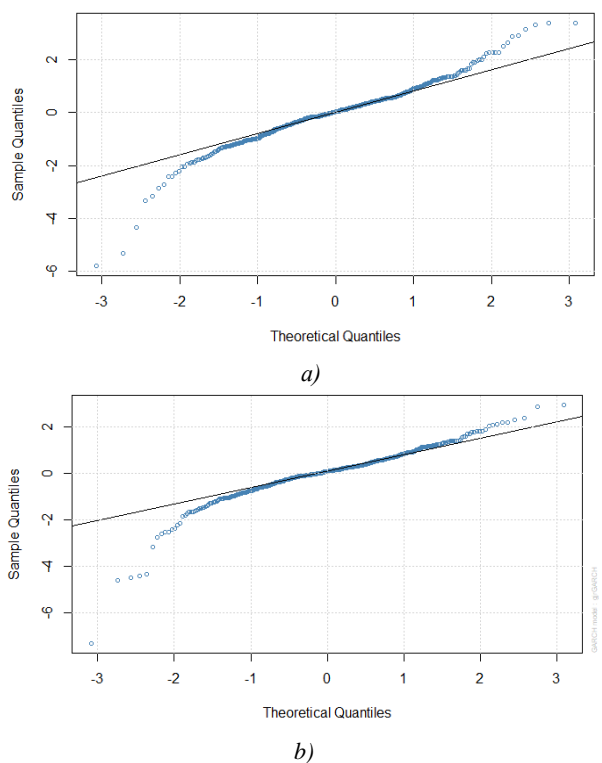


Рис. 5. График квантиль-квантиль для ряда МТС до пандемии (a) и во время пандемии (b)

Fig. 5. Quantile-quantile plot for the MTS series before the pandemic (a) and during the pandemic (b)

Представленные графики позволяют сделать вывод, что, хотя скошенное распределение Стьюдента отчасти соответствует данным, оно недостаточно точно описывает толстые хвосты реального распределения процесса. Соответственно, есть смысл использовать копулы для более точного описания совместного распределения данных и для более подробного анализа реальной зависимости между остатками рядов.

Подбор копул. Стандартизированные данные преобразуются в псевдонаблюдения и для преобразованных остатков подбираются подходящие копулы и их параметры. Для подбора наиболее подходящей копулы функция рассматривает целый ряд семейств, таких как t -копулы Стьюдента, копулы Гаусса, Клейтона, Франка, Тауна, Джо, а также BB1-, BB6-, BB7- и BB8-копулы [8]. В табл. 3 приведена вся информация о подобранных копулах, в том числе их параметры, название семейства, зависимость в нижних и правых хвостах (LTD и UTD соответственно), коэффициент корреляции Кендалла (Тао), критерий максимального логарифмического правдоподобия (LL, приведено значение критерия) и информационный критерий Акаике (AIC, приведено значение критерия). Критерии помогают понять, насколько хорошо копула аппроксимирует данные.

Таблица 3
Информация о копулах

Table 3
Copula information

Копула <i>Copula</i>	Параметр 1 <i>Parameter 1</i>	Параметр 2 <i>Parameter 2</i>	Семейство <i>Family</i>	Тао	LTD	UPD	LL	AIC
До пандемии								
Лукойл-Газпром	0,47	5,97	Student's t	0,31	0,16	0,16	59,07	-114,14
Лукойл-Магнит	1,12	–	Survival Gumbel	0,11	0,15	0	8,43	-14,85
Лукойл-МТС	0,27	8,48	Student's t	0,17	0,04	0,04	19,35	-34,69
Лукойл-Сбербанк	0,11	1,17	Survival BB1	0,19	0,19	0,01	24,05	-44,11
Лукойл-Аэрофлот	1,08	–	Survival Joe	0,05	0,1	0	3,4	-4,79
Газпром-Магнит	1,14	–	Survival Gumbel	0,12	0,16	0	10,63	-19,26
Газпром-МТС	2,83	0,7	Survival BB8	0,26	0	0	38,01	-72,01
Газпром-Сбербанк	5,36	0,5	Survival BB9	0,33	0	0	61,84	-119,68
Газпром-Аэрофлот	1,12	–	Survival Gumbel	0,11	0,15	0	10,93	-19,86
Магнит-МТС	1,21	–	Survival Gumbel	0,17	0,23	0	20,6	-39,2
Магнит-Сбербанк	1,35	0,35	Rotated Tawn type 1 180 degrees	0,14	0,18	0	16,42	-28,84
Магнит-Аэрофлот	0,1	4,16	Student's t	0,06	0,09	0,09	11,66	-19,33
МТС-Сбербанк	2,33	–	Frank	0,24	0	0	32,35	-62,69
МТС-Аэрофлот	1,12	–	Survival Gumbel	0,11	0,15	0	10,04	-18,08
Сбербанк-Аэрофлот	1,11	–	Survival Gumbel	0,1	0,13	0	8,73	-15,46
Во время пандемии								
Лукойл-Газпром	0,22	1,57	Survival BB1	0,43	0,45	0,13	122,57	-241,14
Лукойл-Магнит	1,39	–	Survival Joe	0,18	0,35	0	30,97	-59,95
Лукойл-МТС	1,35	0,25	Survival BB7	0,24	0,33	0,06	44,04	-84,08
Лукойл-Сбербанк	0,56	–	Gaussian	0,38	0	0	89,89	-177,79
Лукойл-Аэрофлот	1,37	–	Survival Gumbel	0,27	0,34	0	52,02	-102,05
Газпром-Магнит	1,73	0,94	Survival BB8	0,23	0	0	37,29	-70,57
Газпром-МТС	1,65	0,47	Rotated Tawn type 2 180 degrees	0,24	0,31	0	50,21	-96,41
Газпром-Сбербанк	1,66	–	Survival Gumbel	0,4	0,48	0	110,34	-218,67
Газпром-Аэрофлот	1,39	–	Survival Gumbel	0,28	0,36	0	54,65	-107,29
Магнит-МТС	1,44	–	Survival Joe	0,2	0,38	0	38,08	-74,16
Магнит-Сбербанк	1,68	0,44	Rotated Tawn type 2 180 degrees	0,24	0,3	0	48,72	-93,44
Магнит-Аэрофлот	0,48	–	Clayton	0,19	0,23	0	30,65	-59,3
МТС-Сбербанк	1,34	–	Survival Gumbel	0,25	0,32	0	43,63	-85,27
МТС-Аэрофлот	1,23	–	Survival Gumbel	0,19	0,25	0	26,25	-50,5
Сбербанк-Аэрофлот	3,03	0,78	Survival BB8	0,34	0	0	71,43	-138,87

Далее с помощью построенных копул генерируются новые данные и сравниваются с исходными. Некоторые результаты показаны на рис. 6.

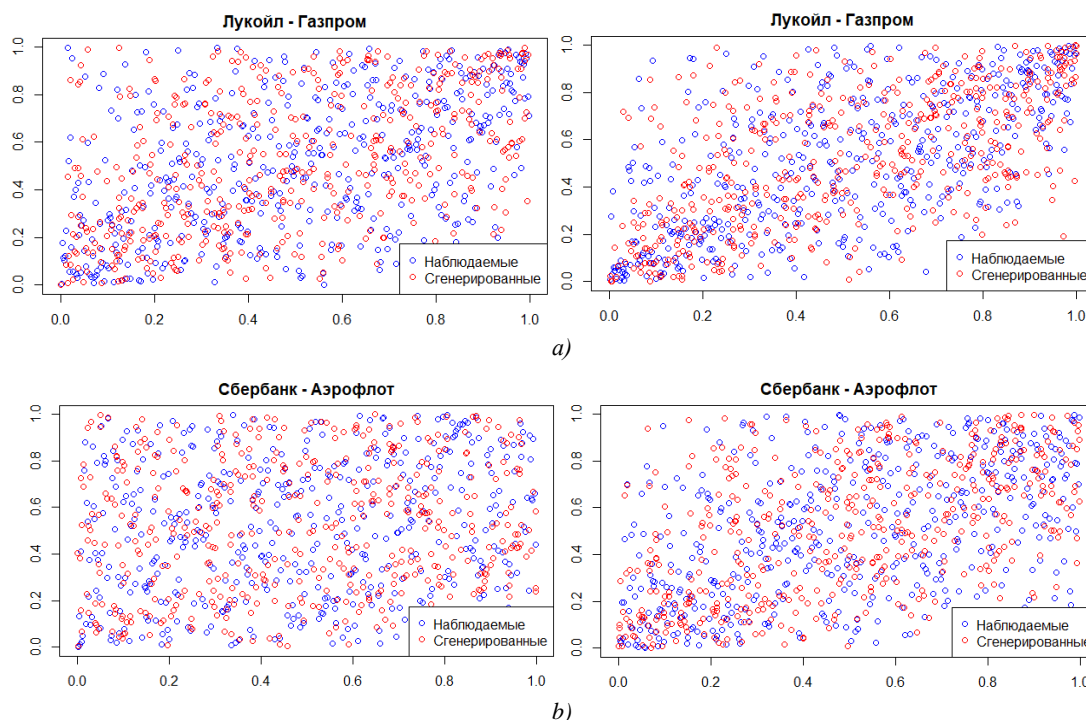


Рис. 6. Графики данных для Лукойла-Газпрома до (слева) и во время (справа) пандемии (a) и для Сбербанка-Аэрофлота до (слева) и во время (справа) пандемии (b)

Fig. 6. Data plots for Lukoil-Gazprom before (left) and during (right) the pandemic (a) and for Sberbank-Aeroflot before (left) and during (right) the pandemic (b)

На рис. 6 видно, что копулы адекватно описывают данные, так как наблюдаемые и сгенерированные наблюдения согласуются друг с другом. Также можно заметить, что зависимость после вспышки пандемии для исследуемых рядов увеличивается. Например, для Сбербанка-Аэрофлота данные до пандемии распределены по всей области равномерно, т. е. не имеют явной зависимости, а данные во время пандемии больше сконцентрированы посередине и направлены по диагонали вверх, что свидетельствует об умеренной положительной зависимости.

Анализ зависимости. На рис. 7 изображен график изменения зависимости до и после вспышки COVID-19 (на основании коэффициента корреляции Кендалла из табл. 3).

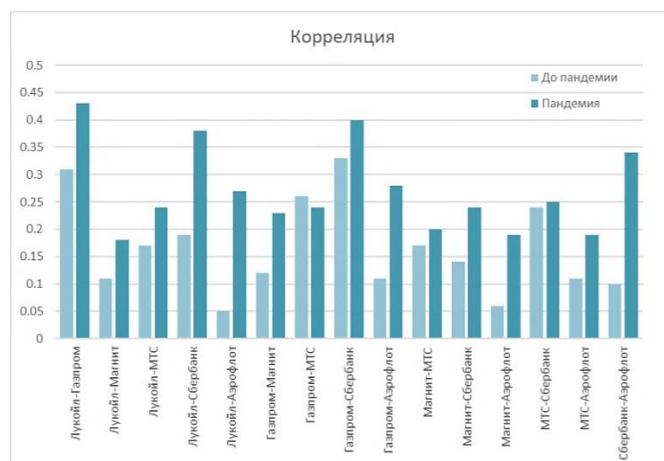


Рис. 7. Коэффициент корреляции в период до пандемии и во время пандемии

Fig. 7. Correlation coefficient before the pandemic and during the pandemic

Из графика видно, что почти для всех рядов зависимость увеличивается после вспышки COVID-19. Особенно это справедливо для компании Аэрофлот. Данный факт объясняется тем, что во время пандемии многие рейсы были отменены. Соответственно, акции авиалиний подверглись сильному изменению.

Заключение. В настоящей работе исследована зависимость между акциями некоторых российских компаний с помощью моделей копул. При моделировании финансовых рядов была применена модель ARMA-GJR-GARCH(1,1) и выявлено увеличение эффекта волатильности после коронавирусной инфекции. Выполнен оптимальный подбор семейств и параметров копул. При проверке адекватности модели осуществлена генерация значений на основе построенных моделей и получено детальное описание зависимости между акциями фондового рынка.

Из результатов проведенных исследований можно сделать вывод, что в период пандемии COVID-19 зависимость между различными акциями фондового рынка увеличивается. Полученный результат может быть связан с волнением на фондовом рынке, а также с негативным влиянием пандемии на инвестиции, поскольку многие страны, в том числе и Россия, столкнулись с экономическим спадом в этот период.

К похожему результату пришли и авторы других работ, например [4, 7]. Отсюда можно сделать вывод, что использованный алгоритм исследования показал свою целесообразность.

Предложенный подход может быть применен для дальнейшего исследования экономических последствий вспышек заболеваний, особенно актуальной на данный момент вспышки коронавируса, на фондовый рынок и крупные компании России и других стран.

Вклад авторов. *А. М. Кендысь* сформировал данные для исследования, разработал программное обеспечение, участвовал в анализе полученных результатов, подготовил текст статьи. *Н. Н. Труш* руководил проектом, анализировал полученные результаты, утвердил окончательный вариант статьи для публикации.

Список использованных источников

1. Cherubini, U. Copula Methods in Finance / U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato. – England : John Wiley & Sons, 2004. – 293 p. <https://doi.org/10.1002/9781118673331>
2. Щетинин, Е. Ю. О методах количественного анализа финансовых показателей компании в условиях высокой рискованности инвестиций / Е. Ю. Щетинин // Управление финансовыми рисками. – 2020. – Vol. 2, no. 2. – P. 108–119. <https://doi.org/10.36627/2221-7541-2020-2-2-108-119>
3. Dewick, P. R. Copula modelling to analyse financial data / P. R. Dewick, S. Liu // J. of Risk and Financial Management. – 2022. – Vol. 15, no. 3. – P. 104. <https://doi.org/10.3390/jrfm15030104>
4. Ghaemi, A. M. Sector-by-sector analysis of dependence dynamics between global large-cap companies and infectious diseases: A time-varying copula approach in EBOV and COVID-19 episodes / A. M. Ghaemi, H. R. Tavakkoli, M. M. Rashidi // PLOS ONE. – 2021. – Vol. 16, no. 11. – P. e0259282. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0259282>
5. Financial contagion intensity during the COVID-19 outbreak: A copula approach / R. Benkraiem [et al.] // Intern. Review of Financial Analysis. – 2022. – Vol. 81, no. 7. – P. 102136. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2022.102136>
6. Sahu, P. K. Gold price and exchange rate in pre and during Covid-19 period in India: Modelling dependence using copulas / P. K. Sahu, D. P. Bal, P. Kundu // Resources Policy. – 2022. – Vol. 79, no. 4. – P. 103126. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.103126>
7. Голованов, О. А. Ретроспективный анализ влияния пандемии COVID-19 на социально-экономическое развитие региона (на примере Свердловской области) / О. А. Голованов, А. Н. Тырсин // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 1. – С. 61–71. <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.04>
8. Nelsen, R. B. An Introduction to Copulas / R. B. Nelsen. – 2nd ed. – N. Y. : Springer-Verlag, 2006. – 272 p. <https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0>
9. Francq, C. GARCH Models Structure, Statistical Inference and Financial Applications / C. Francq, J. Zakoian. – England : John Wiley & Sons, 2010. – 504 p. <https://doi.org/10.1002/9780470670057>

10. Elements of Copula Modeling with R / M. Hofert [et al.]. – Switzerland : Springer, 2018. – 267 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-89635-9>

References

1. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. *Copula Methods in Finance*. England, John Wiley & Sons, 2004, 293 p. <https://doi.org/10.1002/9781118673331>
2. Shchetinin E. Yu. *On methods of quantitative analysis of the company's financial indicators under conditions of high risk of investments*. Upravlenie finansovymi riskami [*Financial Risk Management*], 2020, vol. 2, no. 2, pp. 108–119 (In Russ.). <https://doi.org/10.36627/2221-7541-2020-2-2-108-119>
3. Dewick P. R., Liu S. Copula modelling to analyse financial data. *Journal of Risk and Financial Management*, 2022, vol. 15, no. 3, p. 104. <https://doi.org/10.3390/jrfm15030104>
4. Ghaemi A. M., Tavakkoli H. R., Rashidi M. M. Sector-by-sector analysis of dependence dynamics between global large-cap companies and infectious diseases: A time-varying copula approach in EBOV and COVID-19 episodes. *PLOS ONE*, 2021, vol. 16, no. 11, p. e0259282. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0259282>
5. Benkraiem R., Garfatta R., Lakhel F., Zorgatid I. Financial contagion intensity during the COVID-19 outbreak: A copula approach. *International Review of Financial Analysis*, 2022, vol. 81, no. 7, p. 102136. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2022.102136>
6. Sahu P. K., Bal D. P., Kundu P. Gold price and exchange rate in pre and during Covid-19 period in India: Modelling dependence using copulas. *Resources Policy*, 2022, vol. 79, no. 4, p. 103126. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.103126>
7. Golovanov O. A., Tyrsin A. N. *Retrospective analysis of the impact of the COVID-19 pandemic on the socio-economic development of the region (on the example of the Sverdlovsk region)*. Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya [*Applied Mathematics and Control Sciences*], 2023, no. 1, pp. 61–71 (In Russ.). <https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.04>
8. Nelsen R. B. *An Introduction to Copulas*, 2nd edition. New York, Springer-Verlag, 2006, 272 p. <https://doi.org/10.1007/0-387-28678-0>
9. Francq C., Zakoian J. *GARCH Models Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. England, John Wiley & Sons, 2010, 504 p. <https://doi.org/10.1002/9780470670057>
10. Hofert M., Kojadinovic I., Mächler M., Yan J. *Elements of Copula Modeling with R*. Switzerland, Springer, 2018, 267 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-89635-9>

Информация об авторах

Кендысь Алексей Максимович, студент факультета прикладной математики и информатики БГУ.
E-mail: kendyslesha@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-0779-9156>

Труш Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики БГУ.
E-mail: troushnn@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-1473-0894>

Information about the authors

Alexey M. Kendys, Student of the Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University.
E-mail: kendyslesha@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0001-0779-9156>

Mikolai M. Troush, D. Sc. (Phys.-Math.), Prof.; Prof. at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University.
E-mail: troushnn@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-1473-0894>