МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.872, 519.248, 519.21
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-4-48-55

Оригинальная статья
Original Paper

Замкнутая сеть Гордона – Ньюэлла с однолинейными полюсами и экспоненциально ограниченным временем ожидания запросов

Ю. В. Малинковский, В. А. Немилостивая✉

Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины,
ул. Кирова, 119, Гомель, 246019, Беларусь
✉*E-mail: vetta.i.am@gmail.com*

Аннотация

Цели. Рассмотрена экспоненциальная сеть массового обслуживания с однолинейными полюсами, отличающаяся от сети Гордона – Ньюэлла только тем, что время ожидания запросами обслуживания в полюсах сети является случайной величиной, условное распределение которой при фиксированном числе запросов в полюсе имеет экспоненциальное распределение. Запросы, обслуженные в полюсах, и запросы, не дождавшиеся обслуживания, движутся по сети в соответствии с разными матрицами маршрутизации. В работе поставлены цели исследовать сеть массового обслуживания, установить достаточные условия ее эргодичности, а также найти стационарное распределение данной сети.

Методы. Используются методы математического моделирования и аналитическое исследование сетей массового обслуживания.

Результаты. Доказана теорема, обобщающая теорему Гордона – Ньюэлла.

Заключение. Возможность варьирования матрицами маршрутизации обслуженных и не дождавшихся обслуживания запросов позволяет учитывать самые разнообразные практические ситуации и снижать необходимым образом нагрузку в узких местах исследуемой сети, что очень важно при проектировании и модернизации информационно-вычислительных сетей.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, ограниченное время ожидания, матрица маршрутизации, уравнения равновесия, эргодичность, стационарное распределение

Для цитирования. Малинковский, Ю. В. Замкнутая сеть Гордона – Ньюэлла с однолинейными полюсами и экспоненциально ограниченным временем ожидания запросов / Ю. В. Малинковский, В. А. Немилостивая // Информатика. – 2023. − Т. 20, № 4. – С. 48–55. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-4-48-55

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 18.09.2023
Подписана в печать | Accepted 17.10.2023
Опубликована | Published 29.12.2023

© Малинковский Ю. В., Немилостивая В. А., 2023

Closed Gordon – Newell network with single-line poles and exponentially limited request waiting time

Yuri V. Malinkovsky, Violetta A. Nemilostivaya✉

Francisk Skorina Gomel State University,
st. Kirova, 119, Gomel, 246019, Belarus
✉*E-mail: vetta.i.am@gmail.com*

Abstract

Objectives. An exponential queuing network with single-line poles is considered, which differs from the Gordon – Newell network only that the waiting time for service requests at the poles of the network is a random variable with conditional distribution for a fixed number of requests at the pole as an exponential distribution. Requests at poles and requests that did not get the service are moving through the network in accordance with different routing matrices. The objective was to investigate a queuing system and to establish sufficient conditions for its ergodicity, also to find stationary distribution of given network.

Methods. Methods of mathematical modeling and analytical research of queuing networks are used.

Results. A theorem generalizing the Gordon – Newell theorem is proved.

Conclusion. The possibility of varying the routing matrices of served and unserved requests makes it possible to take into account a wide variety of practical situations and reduce the load in the bottlenecks of the network under study. It is very important in the design and modernization of information and computer networks.

Keywords: queuing network, bounded waiting time, routing matrix, balance equations, ergodicity, stationary distribution

Keywords: queuing network, bounded waiting time, routing matrix, balance equations, ergodicity, stationary distribution

For citation. Malinkovsky Yu. V., Nemilostivaya V. A. *Closed Gordon – Newell network with single-line poles and exponentially limited request waiting time*. Informatika [*Informatics*], 2023, vol. 20, no. 4, pp. 48‒55 (In Russ.). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-4-48-55

Conflict of interest. The authors declare of no conflict of interest.

Введение. В связи с развитием информационной сферы в последнее время наметилась тенденция к проектированию информационно-вычислительных сетей самого различного назначения. Это выдвигает проблемы, от решения которых зависит эффективность их использования. Одной из них является проблема узких мест в сети, т. е. полюсов сети, в которых относительное использование полюса имеет максимальное значение. При большом числе запросов, циркулирующих в сети, в узком месте очередь неограниченно растет, в то время как в других узлах очереди незначительны либо вообще отсутствуют. Одним из способов преодоления этого недостатка является введение мгновенных обходов запросами полюсов [1, 2], что позволяет выравнивать нагрузку между полюсами. Другой способ уменьшения нагрузки в узких местах – размещение в соответствующих полюсах резервных каналов [3–5]. Еще одним способом выравнивания нагрузки является введенное Е. А. Ковалевым в статье [6] ограничение продолжительности ожидания обслуживания запросов в узлах случайными величинами, имеющими экспоненциальное распределение. Однако в этой работе предполагалось, что запросы, обслуженные в полюсах, и запросы, не дождавшиеся обслуживания, ведут себя одинаково, т. е. их движение по сети определяется одной и той же матрицей маршрутизации. В то же время в практических ситуациях, например, «недовольные клиенты», не дождавшиеся обслуживания, могут вообще покинуть сеть или как-то изменить свою маршрутизацию между полюсами. Если матрица маршрутизации одинакова для обслуженных запросов и запросов, не дождавшихся обслуживания, то уравнения Колмогорова и уравнения глобального равновесия оказываются точно такими же, как и соответствующие уравнения для сети Гордона – Ньюэлла, только с измененными интенсивностями обслуживания, к которым добавляется параметр экспоненциального распределения случайной величины, ограничивающей время ожидания. В этой связи математическое решение задачи определения стационарного распределения тривиально и может быть выполнено чисто автоматически. Случай ограничения на время пребывания и на время ожидания рассматривался в статье [7]. К сожалению, в случае ограничения на время ожидания при различающихся матрицах маршрутизации была допущена досадная ошибка. По-видимому, приведенные результаты действительно будут выполняться, если заменить уравнение трафика на более сложное уравнение. Для одного случая это утверждение будет доказано в настоящей работе. Сети Геленбе с экспоненциальными ограничениями на время пребывания положительных заявок исследовались в работе [8].

В настоящей статье рассматривается случай различных матриц маршрутизации для обслуженных и не дождавшихся обслуживания запросов для замкнутой сети с однолинейными полюсами. Доказан аналог теоремы Гордона – Ньюэлла [9], в котором используется более сложное уравнение трафика. При этом существенно усложняется матрица маршрутизации по сравнению с матрицей маршрутизации для случая ограничения на время пребывания, которая теперь специальным образом зависит от состояний полюсов.

1. Постановка задачи. Маршрутизация запросов. Сеть массового обслуживания состоит из N однолинейных полюсов (систем) с бесконечным числом мест для ожидания. Время обслуживания запроса единственным прибором i-го полюса имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Время ожидания начала обслуживания запроса в очереди i-го полюса является случайной величиной, условное распределение которой, если в i-м полюсе находится n_i запросов, экспоненциальное с параметром $\dfrac{\nu_i}{n_i-1}$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Другими словами, условная вероятность того, что длительность ожидания начала обслуживания каждого запроса в i-м полюсе закончится в промежутке времени $[t,t+h)$, если в момент t в полюсе находилось n_i запросов, равна $\dfrac{\nu_i}{n_i-1}h+o(h)$ при $h\to 0$, а условная вероятность завершения процесса ожидания хотя бы одного из этих запросов равна $\nu_i h+o(h)$. Если запрос поступает в полюс, свободный от запросов, он сразу начинает обслуживаться. Для определенности будем предполагать, что запросы обслуживаются в порядке поступления в полюсы (дисциплина FCFS). Предполагается, что промежутки времени между моментами поступления запросов, времена обслуживания запросов и времена ожидания запросов в узлах – независимые случайные величины. Запрос, обслуженный в i-м полюсе, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью p_{ij} переходит в j-й полюс $\left(i,j=\overline{1,N},\quad \sum_{j=1}^{N}p_{ij}=1\right)$. Запрос, время ожидания которого в i-м полюсе закончилось, мгновенно и независимо от других запросов с вероятностью r_{ij} направляется в j-й полюс $\left(i,j=\overline{1,N},\sum_{j=1}^{N}r_{ij}=1\right)$. Для упрощения выкладок предполагается, что для всех $i=\overline{1,N}$ выполняется $p_{ii}=r_{ii}=0$.

Введем две стохастические квадратные матрицы $P=\left(p_{ij}\right)$ и $R=\left(r_{ij}\right)$ порядка N $\left(i,j=\overline{1,N}\right)$, которые назовем матрицами маршрутизации соответственно обслуженных и не дождавшихся обслуживания запросов. Очевидно, что матричная функция

$$S(\tilde{n})=\left(s_{ij}(n_i),\, i,j=\overline{1,N}\right),$$

где $s_{ij}(n_i)=\dfrac{\mu_i p_{ij}+\nu_i r_{ij}\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}$; I_A – индикатор события A, равный 1, если A происходит, и равный 0 в противном случае, также является стохастической матрицей и по смыслу управляет движением запросов между полюсами $1,2,\ldots,N$ без учета того, за счет чего (окончания обслуживания или ожидания) запрос покидает полюс. Элементы i-й строки матрицы зависят от числа n_i запросов в i-м полюсе. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{N} s_{ij}(n_i) = \frac{1}{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i \neq 1\}}} \left(\mu_i \sum_{j=1}^{N} p_{ij} + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i \neq 1\}} \sum_{j=1}^{N} r_{ij} \right) = \frac{1}{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i \neq 1\}}} \left(\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i \neq 1\}} \right) = 1.$$

Будем называть $S(\tilde{n})$ матрицей маршрутизации. Заметим, что в отличие от сети Гордона – Ньюэлла, в которой матрица маршрутизации не зависит от $\mu_i, i = \overline{1,N},$ и в отличие от сети с ограничением на время пребывания, в которой матрица маршрутизации зависит от $\mu_i, \nu_i,\ i = \overline{1,N},$ и не зависит от чисел заявок в полюсах, матрица маршрутизации исследуемой сети зависит от $\mu_i, \nu_i,\quad i = \overline{1,N}$, а ее i-я строка достаточно простым образом зависит от числа запросов в i-м полюсе.

Обозначим через $\varepsilon_i(n_i)$ условную интенсивность потока запросов, выходящего из i-го полюса, который находится в состоянии $n_i\left(i = \overline{1,N}\right)$. Так как запросы не рождаются и не теряются при прохождении полюсов, в стационарном режиме выполняется следующий закон сохранения:

$$\varepsilon_j(n_j - 1) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(n_i) s_{ij}(n_i - 1), \quad j = \overline{1,N}. \tag{1}$$

Далее предполагается, что матрица $S(\tilde{n})$ неприводима. Для ее неприводимости достаточно (но не необходимо), чтобы неприводимой была хотя бы одна из матриц P или R. Тогда уравнение (1), которое будем называть уравнением трафика, при фиксированных $\mu_i, \nu_i, n_1, n_2, \ldots, n_N$, $i = \overline{1,N},$ будет иметь единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение. Если изменять эти параметры, то решения (1) будут функциями от них. Заметим, что в классической сети Гордона – Ньюэлла решение уравнения трафика определяется матрицей P и не зависит от параметров $\mu_i, i = \overline{1,N}$.

2. Уравнения глобального и локального равновесия. Состояния сети в момент t будем описывать марковским процессом или цепью Маркова с непрерывным временем $\tilde{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число заявок в i-м полюсе в момент времени t. Пространство состояний этого процесса представляет собой симплекс $\mathrm{X} = \{\tilde{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N) : n_1 + n_2 + \ldots + n_N = K,\quad n_1, n_2, \ldots, n_N \in \mathrm{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}\}$. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и положительности интенсивностей выхода из состояний в моменты скачков $\tilde{n}(t)$ – неприводимая цепь Маркова. Так как число ее состояний конечно, то по эргодической теореме Маркова цепь эргодична. Пусть $\{p(\tilde{n}), \tilde{n} \in \mathrm{X}\}$ – ее предельное эргодическое распределение, которое в этом случае будет единственным решением глобальных уравнений равновесия

$$p(\tilde{n}) \sum_{i=1}^{N} \left(\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i \neq 1\}} \right) \mathrm{I}_{\{n_i \neq 0\}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p\left(\tilde{n} + e_j - e_i\right) \left(\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji} \mathrm{I}_{\{n_j \neq 0\}} \right), \quad \tilde{n} \in \mathrm{X}, \tag{2}$$

удовлетворяющим условию нормировки $\sum_{\tilde{n} \in \mathrm{X}} p(\tilde{n}) = 1.$ Здесь e_i – единичный вектор i-го направления, причем предполагается, что $p(\tilde{n}) = 0$ при $\tilde{n} \notin \mathrm{X}.$ Разобьем равенство (2) на уравнения локального равновесия, которые получаются, если для каждого полюса приравнять интенсивность потока вероятности из состояния $\tilde{n}$ за счет ухода запросов из этого полюса интенсивности потока вероятности в состояние $\tilde{n}$ за счет поступления запросов в данный полюс из других полюсов:

$$p(\tilde{n})\left(\mu_i+\nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right)\mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}=\sum_{j=1}^{N} p\left(\tilde{n}+e_j-e_i\right)\left(\mu_j p_{ji}+\nu_j r_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}\right),\ \tilde{n}\in \mathrm{X},\ i=\overline{1,N}. \quad (3)$$

Так как равенство (2) получается суммированием (3) по $i=\overline{1,N}$, то всякое решение локальных уравнений равновесия (3) будет являться решением глобального уравнения равновесия (2).

3. Изолированный полюс в искусственной случайной среде. Изолируем i-й полюс от сети, помещая его в фиктивную случайную среду, отличающуюся от условий функционирования полюса в сети только тем, что в него поступает поток моментов последовательных скачков процесса чистого размножения с интенсивностью рождения $\varepsilon_i(n_i)$, зависящей от числа запросов n_i в этом полюсе. Получается процесс размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$ с интенсивностями рождения $\varepsilon_i(n_i)$ $(n_i=0,1,\ldots)$ и интенсивностями гибели $\mu_i+\nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}$ $(n_i=1,2,\ldots)$. При этом стационарные вероятности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$, если они существуют, удовлетворяют следующим уравнениям равновесия для вертикальных сечений в графе переходов процесса размножения и гибели:

$$\varepsilon_i(n_i-1)\,p_i(n_i-1)=\left(\mu_i+\nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right)p_i(n_i) \quad (n_i=1,2,\ldots). \quad (4)$$

Система уравнений (4) может быть записана в виде

$$\varepsilon_i(0)\,p_i(0)=\mu_i p_i(1), \quad (5)$$

$$\varepsilon_i(n_i-1)\,p_i(n_i-1)=(\mu_i+\nu_i)\,p_i(n_i), \quad (n_i=2,3,\ldots). \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) находим

$$p_i(n_i)=p_i(0)\frac{1}{\mu_i(\mu_i+\nu_i)^{n_i-1}}\prod_{l=0}^{n_i-1}\varepsilon_i(l). \quad (7)$$

Из условия нормировки следует равенство

$$p_i(0)=\left(1+\frac{\mu_i+\nu_i}{\mu_i}\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{n_i-1}\frac{\varepsilon_i(l)}{\mu_i+\nu_i}\right)^{-1} \quad (8)$$

и то, что условие

$$\sum_{n_i}^{\infty}\prod_{l=0}^{n_i-1}\frac{\varepsilon_i(l)}{\mu_i+\nu_i}<\infty \quad (9)$$

является необходимым и достаточным для существования стационарного распределения, а значит, необходимым для эргодичности процесса размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$. Для доказательства достаточности этого условия для эргодичности остается показать, что при выполнении условия (9) процесс $\tilde{n}_i(t)$ является регулярным. Из сходимости ряда в условии (9) следует, что его общий член $\prod_{l=0}^{n_i-1}\frac{\varepsilon_i(l)}{\mu_i+\nu_i}$ стремится к нулю при $n_i\to\infty$. Тогда $\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\mu_i+\nu_i}{\varepsilon_i(l)}\to\infty$, т. е. ряд

$$\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\mu_i+\nu_i}{\varepsilon_i(l)}$$

расходится к $+\infty$, что является достаточным условием регулярности процесса размножения и гибели. Итак, для эргодичности процесса $\tilde{n}_i(t)$, описывающего изолированный полюс, необходимо и достаточно выполнения условия (9). При этом эргодическое распределение определяется соотношениями (7), (8) и удовлетворяет равенствам (4).

4. Стационарное распределение процесса состояний сети. Докажем, что вероятности

$$p(n)=\left[C(N,K)\right]^{-1}p_1(n_1)p_2(n_2)\ldots p_N(n_N) \tag{10}$$

с множителями, определенными с помощью (7), удовлетворяют уравнениям локального равновесия (3), а значит, и уравнениям глобального равновесия (2). Здесь $C(N,K)$ является нормирующей постоянной. В силу однородности уравнений локального равновесия (3) при подстановке вероятностей (10) в (3) можно не учитывать нормирующий множитель $[C(N,K)]^{-1}$. Прежде всего отметим, что из уравнений (4) и (10) следует равенство

$$\frac{p(n+e_j-e_i)}{p(n)}=\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}=\frac{\varepsilon_j(n_j)}{\varepsilon_i(n_i-1)}\frac{\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq1\}}}{\mu_j+\nu_j\mathrm{I}_{\{n_j\neq0\}}}, \tag{11}$$

если $n_i\neq0$.

Проверим, что произведение (10) удовлетворяет уравнениям (3). Если $n_i=0$, то (3) превращается в тождество $0=0$. Если же $n_i\neq0$, то, разделив (3) на $p(n)$, подставив в полученное равенство уравнения (10), (11) и использовав уравнение трафика (1), запишем

$$\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq1\}}=\sum_{j=1}^{N}\frac{p(n+e_j-e_i)}{p(n)}\left(\mu_jp_{ji}+\nu_jr_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq0\}}\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon_j(n_j)}{\varepsilon_i(n_i-1)}\frac{\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq1\}}}{\mu_j+\nu_j\mathrm{I}_{\{n_j\neq0\}}}\left(\mu_jp_{ji}+\nu_jr_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq0\}}\right)=$$

$$=\frac{\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq1\}}}{\varepsilon_i(n_i-1)}\sum_{j=1,\,j\neq1}^{N}\varepsilon_j(n_j)\frac{\mu_jp_{ji}+\nu_jr_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq0\}}}{\mu_j+\nu_j\mathrm{I}_{\{n_j\neq0\}}}=\frac{\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq1\}}}{\varepsilon_i(n_i-1)}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(n_j)s_{ji}(n_j-1)=\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq1\}},$$

т. е. уравнения (3) превращаются в тождество.

По эргодической теореме Маркова цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний эргодична тогда и только тогда, когда она неприводима. Пространство состояний цепи Маркова $n(t)$ конечно в силу выполнения условия $n_1(t)+n_2(t)+\ldots+n_N(t)=K$, а ее неприводимость эквивалентна неприводимости матрицы маршрутизации при каждых фиксированных n_i.

Из условия нормировки $\sum_{n\in X} p(n)=1$ находим нормирующую постоянную

$$C(N,K)=\sum_{n\in Z_+^N:\,n_1+n_2+\ldots+n_N=K} p_1(n_1)\,p_2(n_2)\ldots p_N(n_N). \tag{12}$$

Теорема. *Если матрица маршрутизации неприводима, то цепь Маркова* $n(t)$ *эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения* (10) *с множителями* (7)*, где* $\left\{\varepsilon_i(n_i),\, i=\overline{1,N}\right\}$ *– решение уравнения трафика* (1)*,* $C(N,K)$ *– нормирующая постоянная, определенная с помощью равенства* (12).

В силу однородности функции (10) при использовании теоремы можно не находить $p_i(0)$ по формуле (8), а считать, что $p_i(0)=1$. Таким образом, как и в обычной сети Гордона – Ньюэлла, в стационарном режиме в каждый фиксированный момент времени t состояния полюсов $n_1(t), n_2(t),\ldots,n_N(t)$ зависимы. Это является очевидным следствием линейной зависимости $n_1(t)+n_2(t)+\ldots n_N(t)=K$ координат случайного вектора $n(t)$.

Заключение. В настоящей работе исследовались только замкнутые сети с однолинейными полюсами, что ограничивает возможность применения полученных результатов. Само уравнение трафика, конечно, проще уравнений глобального равновесия для стационарных вероятностей состояний сети. Однако возникают определенные трудности, связанные с тем, что для каждого полюса i, полагая, например, $\varepsilon_i(0)=1$, придется решать систему $K-1$ линейных уравнений трафика. Таким образом, для применения теоремы предварительно необходимо решить $N(K-1)$ систем линейных уравнений. Хорошо, однако, что эти уравнения линейные.

Отметим, что возможность варьирования матрицами маршрутизации обслуженных и не дождавшихся обслуживания запросов позволяет учитывать самые разнообразные практические ситуации и снижать необходимым образом нагрузку в узких местах исследуемой сети, а это очень важно при проектировании и модернизации информационно-вычислительных сетей.

Вклад авторов. *Ю. В. Малинковский* внес существенный вклад в концепцию работы и утвердил окончательный вариант статьи для публикации, *В. А. Немилостивая* провела аналитическое исследование и изложила результаты в тексте статьи.

Список использованных источников

1. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками / Ю. В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 2. – С. 102–110.

2. Копать, Д. Я. Анализ в нестационарном режиме экспоненциальной G-сети с обходами систем обслуживания положительными заявками / Д. Я. Копать, М. А. Матальцкий // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 52. – С. 66–72.

3. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с симметричными резервными каналами / Ю. В. Малинковский // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1986. – № 4 . – С. 69–77.

4. Ковалев, Е. А. Сети массового обслуживания с резервными приборами / Е. А. Ковалев, Ю. В. Малинковский // Автоматика и вычислительная техника. – 1987. – № 2. – С. 64–70.

5. Самочернова, Л. И. Оптимизация системы массового обслуживания с резервным прибором с управлением, зависящим от времени ожидания / Л. И. Самочернова // Известия Томского политехн. ун-та. – 2010. – Т. 316, № 5. – С. 94–97.

6. Ковалев, Е. А. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях / Е. А. Ковалев // Автоматика и вычислительная техника. – 1985. – № 2. – С. 50–55.

7. Malinkovskii, Yu. V. Jackson networks with single-line nodes and limited sojourn or waiting times / Yu. V. Malinkovsky // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, no. 4. – P. 67–79.

8. Malinkovskii, Yu. V. Stationary probability distribution for states of G-networks with constrained sojourn waiting time / Yu. V. Malinkovsky // Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. 564, no. 4. – P. 155–167.

9. Gordon, W. J. Closed queueing systems with exponential servers / W. J. Gordon, G. F. Newell // Operations Research. – 1967. – Vol. 15, no. 2. – P. 254–265.

10. Boyarovich, Yu. S Stationary distribution of the closed queuing network with batch transitions of customers / Yu. S. Boyarovich // Automation and Remote Control. – 2009. – Vol. 70, no. 11. – P. 1836–1842.

References

1. Malinkovskii Yu. V. *Queueing network with customer bypass*. Avtomatika i telemehanika [*Automation and Remote Control*], 1991, no. 2, pp. 102–110 (In Russ.).

2. Kopats D. Ya., Matalytski M. A. A*nalysis in non-stationary regime of exponential G-network with bypass of queueing systems positive customers.* Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika [*Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*], 2020, no. 52. pp. 66–72 (In Russ.)

3. Malinkovskii Yu. V. *Queueing network with symmetrical backup channels*. Izvestija Akademii nauk Sojuza Sovetskih Socialisticheskih Respublik. Tehnicheskaja kibernetika [*News of the Academy of Sciences of the Union of Soviet Socialist Republics. Technical Cybernetics*], 1986, no. 4, pp. 69–77 (In Russ.).

4. Kovalev E. A., Malinkovskii Yu. V. *Queuing networks with backup devices*. Avtomatika i vychislitel'naja tehnika [*Automatic Control and Computer Sciences*], 1987, no. 2, pp. 64–70 (In Russ.).

5. Samochernova L. I. *Optimization of a queuing system with a backup device with control depending on the waiting time.* Izvestija Tomskogo politekhnicheskogo universiteta [*News of Tomsk Polytechnic University*], 2010, vol. 316, no. 5, pp. 94–97 (In Russ.).

6. Kovalev E. A. *Queuing networks with limited waiting time in queues*. Avtomatika i vychislitel'naja tehnika [*Automatic Control and Computer Sciences*], 1985, no. 2, pp. 50–55 (In Russ.).

7. Malinkovskii Yu. V. Jackson networks with single-line nodes and limited sojourn or waiting times. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 4. pp. 67–79.

8. Malinkovskii Yu. V. Stationary probability distribution for states of G-networks with constrained sojourn waiting time. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 564, no. 4, pp. 155–167.

9. Gordon W. J., Newell G. F. Closed queueing systems with exponential servers. *Operations Research*, 1967, vol. 15, no. 2, pp. 254–265.

10. Boyarovich Yu. S. Stationary distribution of the closed queuing network with batch transitions of customers. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 11, pp. 1836–1842.

Информация об авторах

Малинковский Юрий Владимирович, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины.
E-mail: malinkovsky@gsu.by

Немилостивая Виолетта Анатольевна, ассистент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины.
E-mail: vetta.i.am@gmail.com

Information about the authors

Yuri V. Malinkovsky, Prof., D. Sc. (Phys.-Math.), Prof. of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Francisk Skorina Gomel State University.
E-mail: malinkovsky@gsu.by

Violetta A. Nemilostivaya, Assistant at the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Francisk Skorina Gomel State University.
E-mail: vetta.i.am@gmail.com