



УДК 532.22:519.6  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-4-56-68>

Оригинальная статья  
Original Paper

## Вариационно-разностный метод численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей

Ю. Н. Горбачёва<sup>✉</sup>, В. К. Полевиков

Белорусский государственный университет,  
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь  
<sup>✉</sup>E-mail: [gorbachevayun@gmail.com](mailto:gorbachevayun@gmail.com)

### Аннотация

**Цели.** Предлагается вариационно-разностный метод численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей, базирующийся на минимизации энергетического функционала. В качестве тестовой рассматривается известная осесимметричная задача о равновесных формах капли, находящейся на горизонтальной вращающейся плоскости в поле силы тяжести. Математическая модель задачи строится на основании вариационного принципа: капля принимает такую форму, при которой она обладает минимумом полной энергии при заданном объеме. С помощью метода конечных элементов задача минимизации функционала сводится к системе нелинейных уравнений, решение которой ищется с помощью итерационного метода Ньютона.

**Методы.** Используется вариационно-разностный подход (метод конечных элементов), в котором в качестве базисных функций выбираются финитные линейные функции.

**Результаты.** С помощью метода конечных элементов построены равновесные формы капли на вращающейся плоскости в широком диапазоне определяющих параметров: числа Бонда, вращательного числа Вебера и угла смачивания. Определено влияние этих параметров на форму капли. Численные результаты согласуются с результатами, полученными с помощью итерационно-разностного метода во всем диапазоне физической устойчивости относительно осесимметричных возмущений.

**Заключение.** Метод конечных элементов реагирует на потерю устойчивости капли относительно осесимметричных возмущений, поэтому может применяться для исследования устойчивости равновесия осесимметричных капиллярных поверхностей.

**Ключевые слова:** равновесные формы капли, вращающаяся плоскость, число Бонда, число Вебера, угол смачивания, метод конечных элементов

**Для цитирования.** Горбачёва, Ю. Н. Вариационно-разностный метод численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей / Ю. Н. Горбачёва, В. К. Полевиков // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 4. – С. 56–68. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-4-56-68>

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

---

Поступила в редакцию | Received 08.08.2023  
Подписана в печать | Accepted 10.10.2023  
Опубликована | Published 29.12.2023

## A variational-difference method for numerical simulation of equilibrium capillary surfaces

Yuliya N. Gorbacheva<sup>✉</sup>, Viktor K. Polevikov

Belarusian State University,  
av. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220030, Belarus  
<sup>✉</sup>E-mail: gorbachevayun@gmail.com

### Abstract

**Objectives.** A variational-difference method for numerical simulation of equilibrium capillary surfaces based on the minimization of the energy functional is proposed. As a test task a well-known axisymmetric hydrostatic problem on equilibrium shapes of a drop adjacent to a horizontal rotating plane under gravity is considered. The mathematical model of the problem is built on the basis of the variational principle: the shape of the drop satisfies the minimum total energy for a given volume. The problem of the functional minimization is reduced to a system of nonlinear equations using the finite element method. To solve the system a Newton's iterative method is applied.

**Methods.** The variational-difference approach (the finite element method) is used. The finite linear functions are chosen as basic functions.

**Results.** Equilibrium shapes of a drop on a rotating plane are constructed by the finite element method in a wide range of defining parameters: Bond number, rotational Weber number and wetting angle. The influence of these parameters on the shape of a drop is investigated. The numerical results are matched with the results obtained using the iterative-difference approach over the entire range of physical stability with respect to axisymmetric perturbations.

**Conclusion.** The finite element method responds to the loss of stability of a drop with respect to axisymmetric perturbations. Therefore it can be used to study the stability of the equilibrium of axisymmetric capillary surfaces.

**Keywords:** equilibrium shapes of a drop, rotating plane, Bond number, Weber number, wetting angle, finite element method

**For citation.** Gorbacheva Yu. N., Polevikov V. K. *A variational-difference method for numerical simulation of equilibrium capillary surfaces*. *Informatika [Informatics]*, 2023, vol. 20, no. 4, pp. 56–68 (In Russ.).  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-4-56-68>

**Conflict of interest.** The authors declare of no conflict of interest.

**Введение.** Изучение капиллярных явлений имеет как теоретическое, так и практическое значение. Результаты исследований в этом направлении находят применение в микроэлектронике, газовой и нефтяной промышленности, медицине, биотехнологиях, космических технологиях, металлургии. Капиллярные поверхности являются непростым объектом исследования, так как в качестве математических моделей капиллярных поверхностей выступают нелинейные дифференциальные уравнения и системы [1].

В общем случае задача о равновесных формах капиллярной жидкости может быть решена лишь численными методами. Задачи гидростатики сводятся либо к минимизации функционала, описывающего полную энергию системы газ – жидкость – твердое тело [2–5], либо к решению соответствующей системы нелинейных дифференциальных уравнений Юнга – Лапласа, дополненных интегральным условием сохранения объема жидкости. Численное решение задачи во втором случае сводится либо к решению задачи Коши с применением метода стрельбы [6–8], либо к решению краевой задачи [9, 10].

Вариационные методы решения задачи о равновесии жидкости представляют интерес, так как основаны на непосредственной минимизации энергетического функционала, поэтому автоматически приводят к определению устойчивой формы равновесия, отвечающей минимуму полной энергии [11, 12].

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача о равновесных формах капли, расположенной на вращающейся горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Сформулирована вариационная постановка задачи. Для численного решения поставленной задачи приме-

няется метод конечных элементов. Такой подход использовался для численного решения задачи о капле, свисающей с кромки капилляра в поле силы тяжести [4]. Численные результаты, полученные с помощью метода конечных элементов, сравнивались с результатами, полученными с помощью итерационно-разностного метода второго порядка аппроксимации, который рассмотрен в работах [9, 10]. Проведенные исследования представляют интерес для нанесения тонких покрытий на твердых поверхностях методом центрифугирования [13].

**Вариационная постановка задачи.** Пусть на горизонтальной плоскости находится осесимметричная капля жидкости в поле силы тяжести с ускорением свободного падения  $g$ , направленным вниз, коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , плотностью  $\rho$ , заданным объемом  $V$  и углом смачивания  $\alpha$ . Принимая во внимание осевую симметрию капли, поместим начало координат в центр ее основания. Капля вместе с плоскостью вращается как одно твердое тело с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси симметрии  $OZ$ . В осесимметричной постановке задача численно решалась в работах [8–10]. Новизна этой работы заключается в использовании вариационно-разностного подхода, сама идея которого предполагает адекватное реагирование на начало кризиса равновесных состояний.

Интегро-дифференциальное уравнение равновесия осесимметричной капли, вращающейся на горизонтальной плоскости, получим из вариационного принципа минимума полной энергии капли  $\tilde{E}$ , которая складывается из четырех составляющих: поверхностной энергии, потенциальной энергии в поле силы тяжести, потенциальной энергии в поле центробежных сил и энергии смачивания [12, 14]:

$$\tilde{E} = \sigma \left( |\tilde{\Gamma}| + \frac{\rho g}{\sigma} \int_{\tilde{\Omega}} Z d\tilde{\Omega} - \frac{\omega^2 \rho}{2\sigma} \int_{\tilde{\Omega}} (X^2 + Y^2) d\tilde{\Omega} - \cos \alpha |\tilde{\Sigma}| \right), \quad (1)$$

где  $\tilde{\Gamma}$  – свободная поверхность капли (граница между жидкостью и воздухом);

$|\tilde{\Gamma}|$  – площадь свободной поверхности;

$\tilde{\Omega}$  – объем, заполненный жидкостью, т. е.  $|\tilde{\Omega}| = V$ ;

$\tilde{\Sigma}$  – смоченная область (граница между жидкостью и горизонтальной плоскостью);

$|\tilde{\Sigma}|$  – площадь смоченной области.

Условие сохранения объема жидкости

$$V = \int_{\tilde{\Omega}} 1 d\tilde{\Omega} \quad (2)$$

включается в энергетический функционал (1) на основе метода неопределенных множителей Лагранжа. Таким образом, задача условной минимизации (1), (2) сводится к задаче на безусловный экстремум функционала

$$\tilde{E}_\lambda = \tilde{E} + \lambda \left( \int_{\tilde{\Omega}} 1 d\tilde{\Omega} - V \right), \quad (3)$$

где  $\lambda$  – неопределенный множитель Лагранжа.

Перейдем к безразмерным переменным

$$E = \frac{\tilde{E}}{\sigma V^{2/3}}, \quad z = \frac{Z}{V^{1/3}}, \quad x = \frac{X}{V^{1/3}}, \quad y = \frac{Y}{V^{1/3}}, \quad (4)$$

где  $E$  – безразмерная полная энергия капли.

Функционал (3) в переменных (4) принимает вид

$$E_\lambda = \int_\Gamma 1d\Gamma + \text{Bo} \int_\Omega z d\Omega - \text{P} \int_\Omega (x^2 + y^2) d\Omega - \cos \alpha \int_\Sigma 1d\Sigma + \lambda \left( \int_\Omega 1d\Omega - 1 \right), \quad (5)$$

где  $\Gamma$  – безразмерная свободная поверхность;

$\text{Bo} = \rho g V^{2/3} / \sigma$  – число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к капиллярным силам;

$\Omega$  – безразмерная область, заполненная жидкостью;

$\text{P} = \rho \omega^2 V / (2\sigma)$  – вращательное число Вебера, характеризующее отношение между центробежными и капиллярными силами;

$\Sigma$  – безразмерная смоченная область.

Учитывая осевую симметрию задачи и следуя подходу в [3, 4], представим безразмерную осесимметричную свободную поверхность капли  $\Gamma$  в сферических координатах:

$$(x, y, z) = (u(\theta) \cos \varphi \sin \theta, u(\theta) \sin \varphi \sin \theta, u(\theta) \cos \theta), \quad \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (6)$$

где  $u(\theta)$  – расстояние от точки  $(x, y, z)$  на свободной поверхности  $\Gamma$  до начала координат;

$\theta$  – угол между осью симметрии  $OZ$  и отрезком, соединяющим начало координат с точкой  $(x, y, z)$ .

На рис. 1 показаны осевое сечение капли, связанная с ним система координат и принятые обозначения.

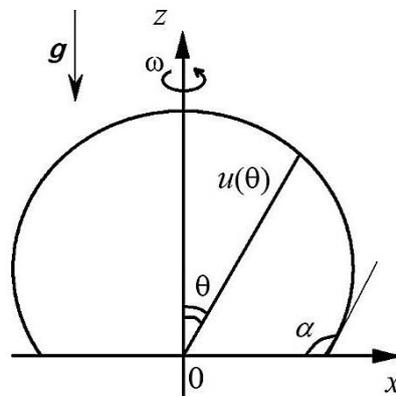


Рис. 1. Геометрия задачи  
 Fig. 1. Geometry of the problem

Запишем энергетический функционал (5) в переменных (6):

$$E_\lambda(u, \lambda) = 2\pi \int_0^{\pi/2} u \sqrt{(u')^2 + u^2} \sin \theta d\theta + \frac{\pi}{2} \text{Bo} \int_0^{\pi/2} u^4 \sin \theta \cos \theta d\theta - \frac{2\pi}{5} \text{P} \int_0^{\pi/2} u^5 \sin^3 \theta d\theta - \pi \cos \alpha u^2 \Big|_{\theta=\pi/2} + \lambda \left( \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} u^3 \sin \theta d\theta - 1 \right), \quad (7)$$

где  $' = d / d\theta$ .

Будем искать в пространстве Соболева  $W = H^1(0, \pi/2)$  функцию  $u : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbf{R}$ , минимизирующую функционал (7). Под необходимым условием минимума энергетического функционала (7) понимается равенство нулю первой вариации функционала. Выпишем первую вариацию функционала:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_\lambda(u + tv, \lambda + t\mu) \Big|_{t=0} &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{uu'v' + (2u^2 + (u')^2)v}{\sqrt{(u')^2 + u^2}} + \text{Bo}u^3v \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. - \text{Pu}^4v \sin^2 \theta + \lambda u^2v + \frac{\mu}{3}u^3 \right\} \sin \theta d\theta - 2\pi \cos \alpha uv \Big|_{\theta=\pi/2} - \mu, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $v = v(\theta)$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция;

$t$  – параметр;

$\mu$  – константа.

Приравняв (8) к нулю и разделив на  $2\pi$ , а затем подставив  $\mu = 0$ , получаем для всех  $v \in W$  равенство

$$\int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{uu'v' + (2u^2 + (u')^2)v}{\sqrt{(u')^2 + u^2}} + \text{Bo}u^3v \cos \theta - \text{Pu}^4v \sin^2 \theta + \lambda u^2v \right\} \sin \theta d\theta - \cos \alpha uv \Big|_{\theta=\pi/2} = 0. \quad (9)$$

Выражение (9) является уравнением равновесия жидкости, т. е. слабой формой нелинейного дифференциального уравнения Юнга – Лапласа с множителем Лагранжа  $\lambda$ . Отметим, что граничное условие с заданным углом смачивания  $\alpha$  удовлетворяется в уравнении (9). Для задач с фиксированной линией контакта и неизвестным углом смачивания дополнительно необходимо учитывать граничное условие [4].

Условие сохранения объема

$$\frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} u^3 \sin \theta d\theta = 1 \quad (10)$$

получим путем приравнивания (8) нулю и подстановки  $v = 0$ ,  $\mu = 1$ .

Таким образом, полную дифференциальную модель равновесного состояния жидкости составляют уравнение (9) и условие (10). Определяющими параметрами задачи (9), (10) являются число Бонда  $\text{Bo}$ , число Вебера  $\text{P}$  и угол смачивания  $\alpha$ .

**Метод конечных элементов.** Решение задачи (9), (10) будем находить с помощью метода конечных элементов на равномерной сетке  $\{\theta_i = ih \mid i = \overline{0, N}; h = \pi/(2N)\}$ . Пусть  $I_i = (\theta_{i-1}, \theta_i)$  обозначает сеточный элемент,  $\mathbf{P}_1$  – пространство многочленов степени 0 или 1. Рассмотрим конечномерное подпространство

$$W_h = \left\{ v_h \in H^1\left(0, \frac{\pi}{2}\right) : v_h|_{I_i} \in \mathbf{P}_1 \right\}.$$

Приближенное решение задачи (9), (10) будем искать в виде

$$u_h(\theta) = \sum_{i=0}^N u_i \Phi_i(\theta),$$

где  $\Phi_i(\theta) \in W_h$ ,  $i = \overline{0, N}$ :  $\Phi_i(\theta_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = \overline{0, N}$  – финитные функции, задаваемые формулами

$$\Phi_i(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta - \theta_{i-1}}{h}, & \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i], \\ \frac{\theta_{i+1} - \theta}{h}, & \theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}, \\ 0, & \theta \notin [\theta_{i-1}, \theta_{i+1}], \end{cases}$$

$$\Phi_0(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta}{h}, & \theta \in [\theta_0, \theta_1], \\ 0, & \theta \notin [\theta_0, \theta_1], \end{cases}$$

$$\Phi_N(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta - \theta_{N-1}}{h}, & \theta \in [\theta_{N-1}, \theta_N], \\ 0, & \theta \notin [\theta_{N-1}, \theta_N]. \end{cases}$$

Интегралы, входящие в (9), (10), разбиваются на сумму интегралов по элементам и на каждом элементе аппроксимируются квадратурной формулой трапеций, т. е.

$$\int_0^{\pi/2} F(\theta) d\theta = \sum_{i=1}^N \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} F(\theta) d\theta \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (F(\theta_{i-1}) + F(\theta_i)).$$

В результате вместо интегро-дифференциальной задачи (9), (10) получаем дискретную задачу. Подставляя в нее  $v_i = \Phi_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ , получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} F_0(u_0, u_1) \\ F_1(u_0, u_1, u_2, \lambda_h, \text{Bo}, \text{P}) \\ \vdots \\ F_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \lambda_h, \text{Bo}, \text{P}) \\ \vdots \\ F_{N-1}(u_{N-2}, u_{N-1}, u_N, \lambda_h, \text{Bo}, \text{P}) \\ F_N(u_{N-1}, u_N, \lambda_h, \text{P}, \alpha) \\ F_{N+1}(u_1, \dots, u_N) \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_N, \lambda_h)^T$  – вектор неизвестных;

$$F_0(u_0, u_1) = \frac{u_0 u_1 - u_1^2}{2\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + u_1^2 h^2}} \sin \theta_1;$$

$$F_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \lambda_h, \text{Bo}, P) = \frac{u_i u_{i-1} - u_{i-1}^2}{2\sqrt{(u_i - u_{i-1})^2 + u_{i-1}^2 h^2}} \sin \theta_{i-1} + \frac{2u_i^2 - 3u_i u_{i-1} + 2u_i^2 h^2 + u_{i-1}^2}{2\sqrt{(u_i - u_{i-1})^2 + u_i^2 h^2}} \sin \theta_i +$$

$$+ \frac{2u_i^2 - 3u_i u_{i+1} + 2u_i^2 h^2 + u_{i+1}^2}{2\sqrt{(u_{i+1} - u_i)^2 + u_i^2 h^2}} \sin \theta_i + \frac{u_i u_{i+1} - u_{i+1}^2}{2\sqrt{(u_{i+1} - u_i)^2 + u_{i+1}^2 h^2}} \sin \theta_{i+1} +$$

$$+ h \text{Bo} u_i^3 \sin \theta_i \cos \theta_i - h P u_i^4 \sin^3 \theta_i + h \lambda_h u_i^2 \sin \theta_i, \quad i = \overline{1, N-1};$$

$$F_N(u_{N-1}, u_N, \lambda_h, P, \alpha) = \frac{u_N u_{N-1} - u_{N-1}^2}{2\sqrt{(u_N - u_{N-1})^2 + u_{N-1}^2 h^2}} \sin \theta_{N-1} + \frac{2u_N^2 - 3u_N u_{N-1} + 2u_N^2 h^2 + u_{N-1}^2}{2\sqrt{(u_N - u_{N-1})^2 + u_N^2 h^2}} -$$

$$- \frac{h}{2} P u_N^4 + \frac{h}{2} \lambda_h u_N^2 - u_N \cos \alpha;$$

$$F_{N+1}(u_1, \dots, u_N) = \frac{2\pi h}{3} \left( \sum_{i=1}^{N-1} u_i^3 \sin \theta_i + \frac{u_N^3}{2} \right) - 1.$$

Таким образом, нахождение равновесной формы капли при заданном числе Бонда  $\text{Bo}$ , числе Вебера  $P$  и угле смачивания  $\alpha$  сводится к решению нелинейной системы уравнений (11) с помощью итерационного метода Ньютона. Реализация метода Ньютона на  $k$ -й итерации ( $k = 0, 1, \dots$ ) сводится к нахождению вектора поправок  $\Delta \mathbf{u}^k$  путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^k) \Delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{u}^k),$$

где  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^k)$  – матрица Якоби, которая является разреженной;

$$\mathbf{u}^k = (u_0^k, \dots, u_N^k, \lambda_h^k)^T.$$

Затем с помощью найденного вектора поправок  $\Delta \mathbf{u}^k$  вычисляется очередное приближение

$$\mathbf{u}^{k+1} = \Delta \mathbf{u}^k + \mathbf{u}^k.$$

Условием окончания итерационного процесса выбрали

$$\|\Delta \mathbf{u}^k\|_{\infty} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-7}.$$

В качестве начального приближения  $\mathbf{u}^0$  при заданном числе Бонда, числе Вебера и угле смачивания рассматривали сферический сегмент единичного объема с заданным углом смачивания  $\alpha$ , т. е. функцию  $u(\theta)$  вычисляли по формуле

$$u(\theta) = R \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \theta} - R \cos \alpha \cos \theta,$$

где  $R = \left( 3 / \left[ \pi (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \right] \right)^{1/3}$  – безразмерный радиус сферы.

Дискретная модель строилась с помощью непосредственной аппроксимации энергетического функционала, что обеспечивает консервативность полученной схемы, так как при таком подходе в выражении дискретного энергетического функционала не возникают нефизические слагаемые.

**Результаты и обсуждение.** Расчеты выполнялись на равномерной сетке с числом разбиений  $N = 500$  и проводились в широком диапазоне определяющих параметров. Для анализа полученных результатов использовали сеточные функции  $x_i = u_i \sin \theta_i$ ,  $z_i = u_i \cos \theta_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ . При расчетах выяснилось, что при фиксированном числе Бонда  $Bo$  и угле смачивания  $\alpha$  с увеличением числа Вебера  $P$  наступает момент, когда вычислительный процесс перестает сходиться. Чтобы стабилизировать вычислительный процесс, в качестве начального итерационного приближения для нового  $P$  выбиралось решение, полученное для предыдущего значения  $P$ , т. е. использовался метод продолжения по параметру. Считалось, что значение  $P$  превышает критическое  $P_{cr}$ , если при этом значении итерации расходились. Критические значения  $P_{cr}$  уточняли методом дихотомии, пока их погрешность не становилась менее  $10^{-4}$ .

На рис. 2 показана эволюция равновесных форм вращающейся капли, полученных с помощью метода конечных элементов при увеличении  $P$  для угла смачивания  $\alpha = \pi/2$  и некоторых чисел Бонда. Пунктирными линиями обозначены формы при  $P = P_{cr}$ . Видно, что равновесные формы капли сначала принимают выпуклые конфигурации, а с увеличением числа Вебера начинают прижиматься к центру горизонтальной плоскости. Это объясняется ростом центробежных сил. С увеличением числа Бонда потеря вычислительной устойчивости наступает при меньших значениях  $P_{cr}$ , при этом радиус области смачивания увеличивается, а высота поднятия капли уменьшается.

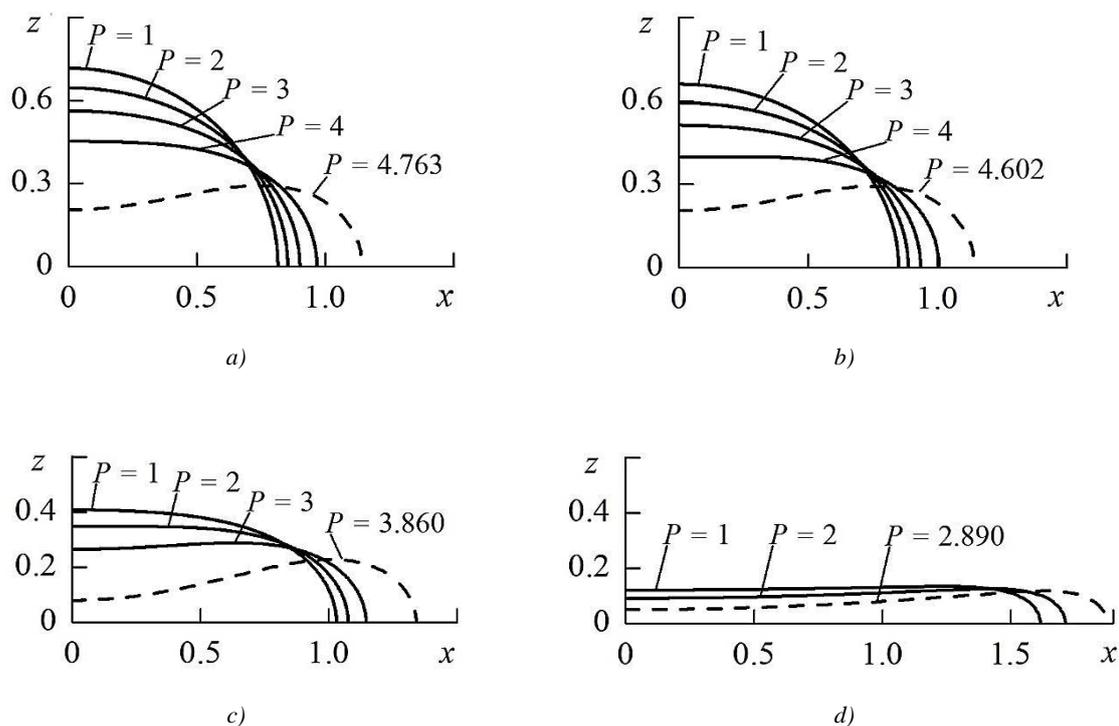


Рис. 2. Эволюция равновесных форм вращающейся капли с увеличением числа  $P$  при  $\alpha = \pi/2$ :  
 a)  $Bo = 0$ ; b)  $Bo = 1$ ; c)  $Bo = 10$ ; d)  $Bo = 100$

Fig. 2. Evolution of the equilibrium shapes of a rotating drop with increasing the number  $P$  for  $\alpha = \pi/2$ :  
 a)  $Bo = 0$ ; b)  $Bo = 1$ ; c)  $Bo = 10$ ; d)  $Bo = 100$

На рис. 3 продемонстрировано влияние изменения угла смачивания на равновесные формы капли. Видно, что с увеличением угла смачивания радиус области смачивания уменьшается, а высота поднятия капли увеличивается.

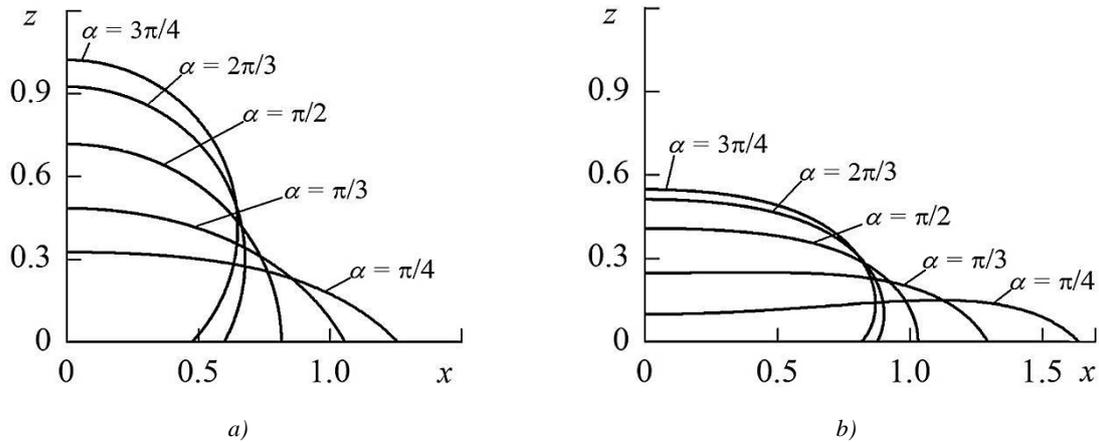


Рис. 3. Эволюция равновесных форм вращающейся капли с увеличением угла смачивания  $\alpha$ :  
а)  $Bo = 0, P = 1$ ; б)  $Bo = 10, P = 1$

Fig. 3. Evolution of the equilibrium shapes of a rotating drop with increasing the wetting angle  $\alpha$ :  
а)  $Bo = 0, P = 1$ ; б)  $Bo = 10, P = 1$

В табл. 1 приведены критические значения числа Вебера  $P_{cr}$ , полученные для некоторых чисел Бонда  $Bo$  и углов смачивания  $\alpha$  с помощью метода конечных элементов (метод 1) и итерационно-разностного метода второго порядка аппроксимации (метод 2). Итерационно-разностный метод численного решения задачи о капле, вращающейся на горизонтальной плоскости в гравитационном поле, рассматривается в статьях [9, 10]. Для итерационно-разностного метода расчеты осуществлялись на равномерной сетке с числом разбиений  $N = 500$ . Оба метода показали, что при фиксированном числе Бонда  $Bo$  и угле смачивания  $\alpha$  с увеличением числа Вебера  $P$  наступает момент, когда  $P$  достигает значения  $P \sim P_{cr}$ , при котором возникает вычислительная неустойчивость методов. Полученные результаты согласуются.

Таблица 1  
Критические значения числа Вебера

Table 1  
Critical values of the Weber number

$\alpha$	$P_{cr}$ при $Bo = 0$ $P_{cr}$ for $Bo = 0$		$P_{cr}$ при $Bo = 1$ $P_{cr}$ for $Bo = 1$		$P_{cr}$ при $Bo = 10$ $P_{cr}$ for $Bo = 10$		$P_{cr}$ при $Bo = 100$ $P_{cr}$ for $Bo = 100$	
	Метод 1 Method 1	Метод 2 Method 2	Метод 1 Method 1	Метод 2 Method 2	Метод 1 Method 1	Метод 2 Method 2	Метод 1 Method 1	Метод 2 Method 2
$\pi/6$	0,632	0,630	0,598	0,593	0,481	0,487	0,400	0,412
$\pi/4$	1,384	1,381	1,323	1,323	1,085	1,090	0,800	0,950
$\pi/3$	2,367	2,367	2,276	2,276	1,891	1,893	1,387	1,628
$\pi/2$	4,763	4,762	4,602	4,601	3,860	3,860	2,890	3,272
$2\pi/3$	7,206	7,206	6,963	6,963	5,839	5,838	4,400	4,916
$3\pi/4$	8,244	8,244	7,955	7,955	6,653	6,654	5,000	5,595
$5\pi/6$	9,061	9,061	8,727	8,727	7,272	7,272	5,593	6,114

В работе [12] показано, что для рассматриваемой задачи наиболее опасными являются неосесимметричные возмущения, т. е. потеря физической устойчивости вращающейся капли относительно неосесимметричных возмущений наступает раньше, чем относительно осесимметричных. Так, при  $Bo = 0$  и  $\alpha = \pi/2$  потеря устойчивости относительно осесимметричных возмущений наступает при  $P = 4,763$  [9, 10, 12]. Вычислительная неустойчивость для метода конечных элементов наступает при  $P_{cr} \sim 4,763$ , а для итерационно-разностного метода – при  $P_{cr} \sim 4,762$ . Следует предположить, что кризис вычислительного процесса для метода конечных элементов и итерационно-разностного метода возникает тогда, когда капля теряет физическую устойчивость относительно осесимметричных возмущений. Несмотря на то что кризис вычислительного процесса для метода конечных элементов и итерационно-разностного метода

наступает позже, чем потеря устойчивости капли относительно неосесимметричных возмущений, рассмотренные методы дают полезные оценки о влиянии параметров задачи на устойчивость равновесных форм относительно осесимметричных возмущений. Описанный в работе [8] метод также позволяет строить равновесные формы капли в широком диапазоне определяющих параметров, но не реагирует на кризис равновесного состояния.

Найдем экспериментальный порядок точности метода конечных элементов. Пусть равновесные формы определяются на равномерной сетке с шагом  $h$ . Зависимость погрешности  $u_h - u$  от шага сетки при  $N \rightarrow \infty$  рассмотрим в виде соотношения

$$\|u_h - u\|_\infty \sim a \cdot h^p = O(h^p),$$

где  $u$  – точное решение задачи;

$u_h$  – численное решение задачи с шагом  $h$ ;

$p$  – порядок точности метода.

Для численного решения  $u_{2h}$ , полученного с шагом  $2h$ , справедливо приближение

$$\|u_{2h} - u\|_\infty \sim a \cdot (2h)^p.$$

В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{\|u_{2h} - u\|_\infty}{\|u_h - u\|_\infty} \sim 2^p \Rightarrow p \sim \log_2 \left( \frac{\|u_{2h} - u\|_\infty}{\|u_h - u\|_\infty} \right).$$

Проведем вычислительный эксперимент на последовательности равномерных сеток с числом разбиений  $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$ . В роли точного решения  $u$  рассмотрим численное решение, полученное на сетке при  $N = 4096$ . Результаты численного эксперимента представлены в табл. 2–5. По полученным результатам можно сделать вывод, что сходимость метода носит квадратичный характер.

Таблица 2  
 Скорость сходимости в равномерной норме при  $Bo = 1, P = 1, \alpha = \pi/4$

Table 2  
 Convergence rate in uniform norm for  $Bo = 1, P = 1, \alpha = \pi/4$

$N$	32	64	128	256	512	1024	2048
$\ u_h - u\ _\infty$	$6,39 \cdot 10^{-3}$	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$3,85 \cdot 10^{-4}$	$9,57 \cdot 10^{-5}$	$2,36 \cdot 10^{-5}$	$5,63 \cdot 10^{-6}$	$1,13 \cdot 10^{-6}$
$p$	–	2,042	2,012	2,010	2,018	2,071	2,322

Таблица 3  
 Скорость сходимости в равномерной норме при  $Bo = 1, P = 1, \alpha = \pi/2$

Table 3  
 Convergence rate in uniform norm for  $Bo = 1, P = 1, \alpha = \pi/2$

$N$	32	64	128	256	512	1024	2048
$\ u_h - u\ _\infty$	$5,58 \cdot 10^{-4}$	$1,68 \cdot 10^{-4}$	$4,90 \cdot 10^{-5}$	$1,40 \cdot 10^{-5}$	$3,87 \cdot 10^{-6}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	$2,20 \cdot 10^{-7}$
$p$	–	1,733	1,776	1,811	1,850	1,929	2,211

Таблица 4  
 Скорость сходимости в равномерной норме при  $Bo = 1, P = 0, \alpha = 3\pi/4$

Table 4  
 Convergence rate in uniform norm for  $Bo = 1, P = 0, \alpha = 3\pi/4$

$N$	32	64	128	256	512	1024	2048
$\ u_h - u\ _\infty$	$5,61 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$5,07 \cdot 10^{-5}$	$1,46 \cdot 10^{-5}$	$4,07 \cdot 10^{-6}$	$1,07 \cdot 10^{-7}$	$2,32 \cdot 10^{-7}$
$p$	–	1,708	1,760	1,799	1,842	1,922	2,204

Таблица 5  
Скорость сходимости в равномерной норме при  $Bo = 10$ ,  $P = 2$ ,  $\alpha = \pi/2$

Table 5  
Convergence rate in uniform norm for  $Bo = 10$ ,  $P = 2$ ,  $\alpha = \pi/2$

$N$	32	64	128	256	512	1024	2048
$\ u_h - u\ _\infty$	$2,36 \cdot 10^{-3}$	$5,84 \cdot 10^{-4}$	$1,46 \cdot 10^{-4}$	$3,63 \cdot 10^{-5}$	$8,97 \cdot 10^{-6}$	$2,13 \cdot 10^{-6}$	$4,27 \cdot 10^{-7}$
$p$	–	2,01	2,00	2,00	2,02	2,07	2,32

**Заключение.** Построен алгоритм метода конечных элементов численного решения задачи о равновесных формах капли, вращающейся на горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Экспериментально исследован порядок точности метода. Построенный алгоритм реагирует на потерю устойчивости капли на вращающейся плоскости относительно осесимметричных возмущений. Полученные с его помощью численные результаты согласуются с результатами итерационно-разностного метода второго порядка аппроксимации во всем диапазоне физической устойчивости относительно осесимметричных возмущений. Таким образом, метод конечных элементов может применяться для исследования устойчивости равновесных форм капиллярных поверхностей относительно осесимметричных возмущений. Описанный метод может быть модифицирован и применен для нахождения равновесных форм капли на вращающемся диске с нерегулярными граничными условиями, т. е. когда известна линия контакта, а угол смачивания неизвестен.

**Вклад авторов.** Все этапы работы по подготовке статьи для публикации осуществлялись авторами совместно.

#### Список использованных источников

1. Сокуров, А. А. Численно-аналитическое исследование математических моделей капиллярных менисков / А. А. Сокуров // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2021. – Т. 36, № 3. – С. 80–93. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-36-3-80-93>
2. A finite element based algorithm for determining interfacial tension ( $\gamma$ ) from pendant drop profiles / N. M. Dingle [et al.] // J. of Colloid and Interface Science. – 2005. – Vol. 286, no. 2. – P. 647–660. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.01.052>
3. Dingle, N. M. A robust algorithm for the simultaneous parameter estimation of interfacial tension and contact angle from sessile drop profiles / N. M. Dingle, M. T. Harris // J. of Colloid and Interface Science. – 2005. – Vol. 286, no. 2. – P. 670–680. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.01.087>
4. Simulation of a pending drop at a capillary tip / M. Gille [et al.] // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2015. – Vol. 26. – P. 137–151. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.02.007>
5. Basaran, O. A. Axisymmetric shapes and stability of pendant and sessile drops in an electric field / O. A. Basaran, L. E. Scriven // J. of Colloid and Interface Science. – 1990. – Vol. 140, no. 1. – P. 10–30. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(90\)90316-G](https://doi.org/10.1016/0021-9797(90)90316-G)
6. Saad, S. M. I. Total Gaussian curvature, drop shapes and the range of applicability of drop shape techniques / S. M. I. Saad, A. W. Neumann // Advances in Colloid and Interface Science. – 2014. – Vol. 204. – P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.cis.2013.12.001>
7. Shape analysis of a rotating axisymmetric drop in gravitational field: Comparison of numerical schemes for real-time data processing / K. D. Danov [et al.] // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. – 2016. – Vol. 489. – P. 75–85. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2015.10.028>
8. Авдейчик, Е. В. Численное исследование относительного равновесия капли с односвязной свободной поверхностью на вращающейся плоскости / Е. В. Авдейчик, П. Н. Конон // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2022. – № 3. – С. 79–90. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-79-90>
9. Polevnikov, V. K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces / V. K. Polevnikov // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, no. 1. – P. 66–93. <https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0005>

10. Полевиков, В. К. Численное исследование равновесных форм капли, вращающейся в гравитационном поле / В. К. Полевиков, В. М. Денисенко // Вестник Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина. – 1985. – № 2. – С. 37–41.

11. Черноушко, Ф. Л. Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения / Ф. Л. Черноушко // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. – М. : ВЦ АН СССР, 1968. – С. 69–97.

12. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А. Д. Мышкис [и др.] ; под ред. А. Д. Мышкиса. – Киев : Наукова думка, 1992. – 592 с.

13. Investigation of the shape and stability of a liquid drop on a rotating substrate / P. V. Lebedev-Stepanov [et al.] // *Acoustical Physics*. – 2011. – Vol. 57, no. 3. – P. 320–325. <https://doi.org/10.1134/S1063771011030122>

14. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория : пер. с англ. / Р. Финн. – М. : Мир, 1989. – 312 с.

---

---

## References

1. Sokurov A. A. *An analytical and numerical study of capillary menisci*. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematičeskie nauki [*Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*], 2021, vol. 36, no. 3, pp. 80–93 (In Russ.). <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-36-3-80-93>

2. Dingle N. M., Tjptowidjojo K., Basaran O. A., Harris M. T. A finite element based algorithm for determining interfacial tension ( $\gamma$ ) from pendant drop profiles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2005, vol. 286, no. 2, pp. 647–660. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.01.052>

3. Dingle N. M., Harris M. T. A robust algorithm for the simultaneous parameter estimation of interfacial tension and contact angle from sessile drop profiles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2005, vol. 286, no. 2, pp. 670–680. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.01.087>

4. Gille M., Gorbacheva Yu., Hahn A., Polevnikov V., Tobiska L. Simulation of a pending drop at a capillary tip. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 26, pp. 137–151. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.02.007>

5. Basaran O. A., Scriven L. E. Axisymmetric shapes and stability of pendant and sessile drops in an electric field. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1990, vol. 140, no. 1, pp. 10–30. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(90\)90316-G](https://doi.org/10.1016/0021-9797(90)90316-G)

6. Saad S. M. I., Neumann A. W. Total Gaussian curvature, drop shapes and the range of applicability of drop shape techniques. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2014, vol. 204, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.cis.2013.12.001>

7. Danov K. D., Dimova S. N., Ivanov T. B., Novev J. K. Shape analysis of a rotating axisymmetric drop in gravitational field: Comparison of numerical schemes for real-time data processing. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2016, vol. 489, pp. 75–85. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2015.10.028>

8. Audzeichyk Ya. V., Konon P. N. *Numerical study of the relative equilibrium of a droplet with a simply connected free surface on a rotating plane*. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [*Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*], 2022, no. 3, pp. 79–90 (In Russ.). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-79-90>

9. Polevnikov V. K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2004, vol. 4, no. 1, pp. 66–93. <https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0005>

10. Polevnikov V. K., Denisenko V. M. *Numerical study of equilibrium shapes of a drop rotating in gravitational field*. Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta imeni V. I. Lenina [*Bulletin of the Belarusian State University named after V. I. Lenin*], 1985, no. 2, pp. 37–41 (In Russ.).

11. Chernous'ko F. L. *The problem of the equilibrium of a fluid subjected to the action of gravity and surface tension*. Vvedenie v dinamiku tela s zhidkost'ju v uslovijah nevesomosti [*Introduction to the Dynamics of a Body with Liquid in Weightlessness*]. Moscow, Vychislitel'nyj centr Akademii nauk Sojuza Sovetskikh Socialističeskikh Respublik, 1968, p. 69–97 (In Russ.).

12. Myshkis A. D., Babskij V. G., Zhukov M. Ju., Kopachevskij N. D., Slobozhanin L. A., Tjupcov A. D. Методы решения задач гидромеханики длтя условий невесомости. *Methods for Solving Problems in Hydromechanics in Zero Gravity Conditions*. In A. D. Myshkis (ed.). Kiev, Naukova dumka, 1992, 592 p. (In Russ.).

13. Lebedev-Stepanov P. V., Karabut T. A., Chernyshov N. A., Rybak S. A. Investigation of the shape and stability of a liquid drop on a rotating substrate. *Acoustical Physics*, 2011, vol. 57, no. 3, pp. 320–325. <https://doi.org/10.1134/S1063771011030122>
14. Finn R. *Equilibrium Capillary Surfaces*. New York, Springer, 1986, 245 p.

### Информация об авторах

*Горбачёва Юлия Николаевна*, старший преподаватель кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет.  
E-mail: [gorbachevayun@gmail.com](mailto:gorbachevayun@gmail.com)

*Полевиков Виктор Кузьмич*, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет.  
E-mail: [polevikov@bsu.by](mailto:polevikov@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0003-3846-7776>

### Information about the authors

*Yuliya N. Gorbacheva*, Senior Lecturer of the Department of Computational Mathematics of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Belarusian State University.  
E-mail: [gorbachevayun@gmail.com](mailto:gorbachevayun@gmail.com)

*Viktor K. Polevikov*, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Assoc. Prof. of the Department of Computational Mathematics of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Belarusian State University.  
E-mail: [polevikov@bsu.by](mailto:polevikov@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0003-3846-7776>