



УДК: 519.6:537.2  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-3-61-73>

Оригинальная статья  
Original Paper

## Моделирование электростатического поля заряженного кольца, расположенного внутри бесконечного цилиндра в присутствии тора

Г. Ч. Шушкевич

УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы»,  
ул. Ожешко, 22, Гродно, 230023, Беларусь  
E-mail: [gsys@grsu.by](mailto:gsys@grsu.by)

### Аннотация

**Цели.** Аналитическое решение граничной задачи электростатики для моделирования электростатического поля заряженного кольца, расположенного внутри заземленного бесконечного кругового цилиндра в присутствии идеально проводящего тора. Источник поля – тонкое заряженное кольцо, расположенное на плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического экрана.

**Методы.** Для решения поставленной задачи используется метод теорем сложения. Потенциал исходного электростатического поля представлен в виде сферических гармонических функций, затем с помощью теорем сложения, связывающих сферические, цилиндрические и тороидальные гармонические функции, – в виде суперпозиции цилиндрических и тороидальных гармонических функций. Вторичный потенциал электростатического поля также представлен в виде суперпозиции цилиндрических и тороидальных гармонических функций.

**Результаты.** Решение поставленной граничной задачи сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов, входящих в представление вторичного поля. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение электростатического потенциала внутри заземленного цилиндрического экрана в присутствии тороидального включения. Результаты вычислений представлены в виде графиков.

**Заключение.** Предложенная методика и разработанное программное обеспечение могут найти практическое применение при разработке и конструировании экранов в различных областях техники.

**Ключевые слова:** граничная задача, электростатическое поле, потенциал, теоремы сложения, гармонические функции

**Благодарность.** Работа выполнялась в рамках подпрограммы «Математические модели и методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция 2025».

**Для цитирования.** Шушкевич, Г. Ч. Моделирование электростатического поля заряженного кольца, расположенного внутри бесконечного цилиндра в присутствии тора / Г. Ч. Шушкевич // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 3. – С. 61–73. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-3-61-73>

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 24.05.2023

Подписана в печать | Accepted 08.06.2023

Опубликована | Published 29.09.2023

# Modeling the electrostatic field of a charged ring located inside an infinite cylinder in the presence of a torus

Gennady Ch. Shushkevich

*Yanka Kupala State University of Grodno,  
st. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus  
E-mail: gsys@grsu.by*

## Abstract

**Objectives.** Analytical solution of the boundary value problem of electrostatics for modeling the electrostatic field of a charged ring located inside a grounded infinite circular cylinder in the presence of a perfectly conducting torus is considered. The field source is a thin charged ring located on a plane perpendicular to the axis of the cylindrical screen. **Methods.** To solve the problem, the method of addition theorems is used. The potential of the initial electrostatic field is presented in the form of spherical harmonic functions and in the form of a superposition of cylindrical and toroidal harmonic functions, using addition theorems relating spherical, cylindrical and toroidal harmonic functions. The secondary potential of the electrostatic field is also represented as a superposition of cylindrical and toroidal harmonic functions.

**Results.** The solution of the formulated boundary problem is reduced to the solution of an infinite system of linear algebraic equations of the second kind with respect to the coefficients included in the representation of the secondary field. The influence of some parameters of the problem on the value of the electrostatic potential inside a grounded cylindrical shield in the presence of a toroidal inclusion is numerically studied. The calculation results are presented in the form of graphs.

**Conclusion.** The proposed technique and the developed software can find practical application in the development and design of screens in various fields of technology.

**Keywords:** boundary value problem, electrostatic field, potential, addition theorems, harmonic functions

**Acknowledgements.** The work was carried out within the framework of the "Mathematical Models and Methods" of the State Program for Scientific Research "Convergence 2025".

**For citation.** Shushkevich G. Ch. *Modeling the electrostatic field of a charged ring located inside an infinite cylinder in the presence of a torus*. Informatika [Informatics], 2023, vol. 20, no. 3, pp. 61–73 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-3-61-73>

**Conflict of interest.** The author declares of no conflict of interest.

**Введение.** Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод интегральных уравнений [1–3]. Однако актуальность разработки новых аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Эти методы по-прежнему остаются основными средствами решения фундаментальных проблем, создают основу для тестирования решения краевых задач, полученных численными методами. Метод разделения переменных и аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики [4, 5]. Обобщением метода разделения переменных для решения граничных задач со смешанными граничными условиями является метод парных (тройных) уравнений, который позволяет свести решение поставленной граничной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое обычно не имеет аналитического решения в замкнутой форме, либо к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. Этот метод применялся для решения электростатических задач для одиночных тонких незамкнутых оболочек<sup>1</sup> [6–12]. При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применялся метод теорем сложения<sup>2</sup> [13–15]. Совместное

<sup>1</sup>Кадников, С. Н. Методы расчета электростатического поля тонких оболочек и их применение в технике высоких напряжений : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.09.05 / С. Н. Кадников ; НИИ. – Новочеркасск, 1990. – 42 с.

<sup>2</sup>Ерофеевко, В. Т. Метод теорем сложения и теория усредненных граничных условий в краевых задачах электродинамики : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.03 / В. Т. Ерофеевко ; БГУ. – Минск, 1993. – 29 с.

использование теорем сложения и парных (тройных) уравнений позволило найти аналитическое решение поставленных задач в виде ряда по малому параметру для двух и более проводников, представляющих собой как полные, так и неполные координатные поверхности [16–24]. Отметим, что для решения некоторых электростатических задач использовались функции Грина, метод зеркальных изображений [25, 26] и метод Т-матриц [27]. Численное решение задачи проникновения электростатического поля через прямоугольное отверстие внутрь параллелепипеда с идеально тонкими стенками приведено в работе [28].

В настоящей статье разработана методика аналитико-численного решения задачи Дирихле для системы двух тел (экранов) в присутствии источника электростатического поля с применением теории сферических, тороидальных и цилиндрических гармонических функций. Система компьютерной математики Mathcad [29] использована для проведения вычислительных экспериментов.

**Постановка и представление решения задачи.** Пусть однородное, изотропное пространство  $R^3$  с диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon$  разделено бесконечным круговым цилиндрическим экраном  $\Gamma$  радиуса  $b$  на два полупространства  $D_1$  и  $D_2$ . В полупространстве  $D_1$  на оси цилиндрического экрана  $\Gamma$  расположен тороидальный экран  $T$  с малым радиусом  $r$  и большим  $R$ . Осевое сечение экранов показано на рис. 1.

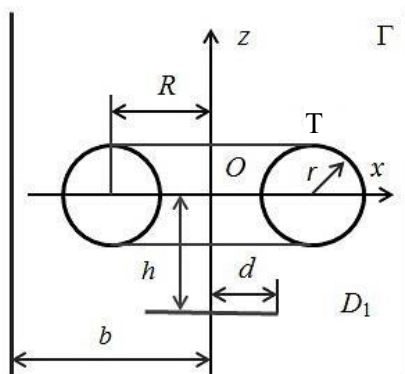


Рис. 1. Осевое сечение экранов  
 Fig. 1. Axial cross-section of shields

Для постановки граничной задачи в точке  $O$  введем декартовы координаты  $Oxyz$ . Декартовы координаты  $Oxyz$  связаны со сферическими координатами  $Or\theta\varphi$  соотношениями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

где  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,

с цилиндрическими координатами  $Or\varphi z$  – соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

где  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,

и тороидальными координатами  $O\alpha\beta\varphi$  – соотношениями

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{c \operatorname{ch} \alpha - \cos \varphi}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{c \operatorname{ch} \alpha - \cos \varphi}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{c \operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

где  $0 \leq \alpha < \infty$ ,  $-\pi \leq \beta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $c = \sqrt{R^2 - r^2}$ .

Тогда поверхности тороидального  $T$  и цилиндрического экранов  $\Gamma$  описываются равенствами

$$T = \left\{ \alpha = \alpha_0 = \ln \left( \frac{R}{r} + \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1} \right), -\pi \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\},$$

$$\Gamma = \{ \rho = b, -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty < z < \infty \}.$$

В области  $D_1$  на плоскости  $z = -h$  находится заряженная нить, расположенная на окружности радиуса  $d$ . Полагаем, что заряд  $q$  равномерно распределен по окружности, тогда линейная плотность зарядов  $\tau = q / 2\pi d$ . В результате взаимодействия первичного электростатического поля с экранами  $\Gamma$  и  $T$  образуется вторичное поле. Обозначим потенциал вторичного поля в области  $D_1$  через  $U_1$ , а исходного электростатического поля – через  $U_0$ .

**Постановка задачи.** Требуется найти вторичный потенциал  $U_1$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_1 = 0, \quad (1)$$

граничным условиям

$$(U_1(M) + U_0(M))|_{M \in T} = V - const, \quad (2)$$

$$(U_1(M) + U_0(M))|_{M \in \Gamma} = 0 \quad (3)$$

и условию на бесконечности

$$U_1(M) \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где  $V$  – заданный потенциал на поверхности тора,  $M$  – произвольная точка области  $D_1$ .

Потенциал  $U_0$  исходного электростатического поля можно представить через сферические гармонические функции [4]

$$U_0(r, \theta) = Q \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{\ell}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r > \ell, \quad (5)$$

где  $Q = \frac{q}{4\pi\epsilon\ell}$ ,  $a_n = (-1)^n P_n(\cos \theta_0)$ ,  $\ell = \sqrt{h^2 + d^2}$ ,  $\cos \theta_0 = h / \ell$ ,  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра [30], физическая размерность коэффициента  $Q$  [В] =  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^3}$  (система единиц СИ).

Вторичный потенциал представим в виде суперпозиции цилиндрических и тороидальных гармонических функций

$$U_1 = U_t(\alpha, \beta) + U_c(\rho, z),$$

$$U_t(\alpha, \beta) = \sqrt{2(ch\alpha - \cos \beta)} Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{in\beta}, \quad (6)$$

$$U_c(\rho, z) = Q \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda) I_0(\lambda\rho) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad (7)$$

где  $P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha)$  – функция тора,  $I_0(\lambda\rho)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода [30].

Неизвестные коэффициенты  $X_n$  и функция  $Z(\lambda)$  подлежат определению из граничных условий (2), (3).

**Решение задачи.** Для выполнения граничного условия (2) на поверхности тора Т представим потенциалы  $U_0(r, \theta)$ ,  $U_c(\rho, z)$  через тороидальные гармонические функции.

Воспользуемся следующими теоремами сложения (формулами переразложения), которые связывают сферические и тороидальные гармонические функции [31]:

$$r^{-n-1} P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi c^{n+1}} \sqrt{2(ch\alpha - \cos \beta)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_n^s Q_{s-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{is\beta}, \quad \alpha > 0,$$

где

$$D_n^s = \left\{ 2P_n(0) + \sum_{k=1}^s f_k^s \left[ sP_{n+k}^k(0) + ik(n+1)P_{n+k}^{k-1}(0) \right] \right\}, \quad D_n^{-s} = \overline{D_n^s}, \quad s \geq 0,$$

$$f_k^s = \frac{2^{3k+1} k!(s+k-1)!}{((2k)!)^2 (s-k)!}, \quad P_n^m(0) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{(n+m)\pi}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n-m}{2}\right)},$$

и цилиндрические и тороидальные гармонические функции:

$$I_0(\lambda\rho) e^{i\lambda z} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2(ch\alpha - \cos \beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(\lambda c) Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{in\beta},$$

где

$$B_n(\lambda c) = \left\{ 2J_0(i\lambda c) + \sum_{k=1}^n (-1)^k f_k^n \left[ nJ_k(i\lambda c) + ikJ_{k-1}(i\lambda c) \right] (i\lambda c)^k \right\}, \quad B_{-n}(\lambda c) = \overline{B_n(\lambda c)},$$

$Q_{s-\frac{1}{2}}(ch\alpha)$  – функция тора,  $P_n^m(0)$  – присоединенная функция Лежандра первого рода,  $J_k(x)$  – функция Бесселя первого рода,  $\Gamma(n)$  – гамма-функция [30].

Используя вышеприведенные формулы, связывающие гармонические функции, представим потенциалы  $U_0(r, \theta)$ ,  $U_c(\rho, z)$  через тороидальные гармонические функции:

$$U_0(\alpha, \beta) = Q \sqrt{2(ch\alpha - \cos \beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_n(c) Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{in\beta}, \quad (8)$$

$$U_c(\alpha, \beta) = Q \frac{1}{2\pi} \sqrt{2(ch\alpha - \cos \beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda) B_n(\lambda c) d\lambda \right) Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{in\beta}, \quad (9)$$

где

$$\mathbb{F}_n\left(\frac{\ell}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} a_p \left(\frac{\ell}{c}\right)^{p+1} D_p^n.$$

С учетом представлений для потенциалов (6), (8), (9) граничное условие (2) на поверхности тора принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( X_n P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha_0) + \mathbb{F}_n \left( \frac{c}{\ell} \right) Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha_0) + \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda) B_n(\lambda c) d\lambda \right) Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha_0) \right) e^{in\beta} = \frac{V}{Q \sqrt{2(ch\alpha_0 - \cos\beta)}}. \quad (10)$$

На основании формулы [30]

$$\frac{1}{\sqrt{2(ch\alpha_0 - \cos\beta)}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha_0) e^{in\beta}$$

и в силу единственности разложения в ряд Фурье из равенства (10) получим

$$X_n + \mathbb{F}_n \left( \frac{\ell}{c} \right) \mathfrak{R}_n(ch\alpha_0) + \frac{1}{2\pi} \mathfrak{R}_n(ch\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda) B_n(\lambda c) d\lambda = \frac{V}{\pi Q} \mathfrak{R}_n(ch\alpha_0), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

где

$$\mathfrak{R}_n(ch\alpha_0) = \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha_0)}{P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha_0)}.$$

Для выполнения граничного условия (3) на поверхности цилиндра представим потенциалы  $U_0(r, \theta)$ ,  $U_t(\alpha, \beta)$  через цилиндрические гармонические функции, используя следующие теоремы сложения [31]:

$$r^{-n-1} P_n(\cos\theta) = \frac{(-i)^n}{\pi n!} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n K_0(|\lambda\rho|) e^{i\lambda z} d\lambda,$$

$$\sqrt{2(ch\alpha - \cos\beta)} P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{in\beta} = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\lambda c) K_0(|\lambda\rho|) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad \rho > c,$$

где  $K_0(\lambda\rho)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) [30].

С учетом приведенных теорем сложения получим представления потенциалов  $U_t(\alpha, \beta)$ ,  $U_0(r, \theta)$  через цилиндрические гармонические функции:

$$U_0(\rho, z) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ell^{n+1} \frac{(-i)^n}{n!} \lambda^n \right) K_0(|\lambda\rho|) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad (12)$$

$$U_t(\rho, z) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n B_n(\lambda c) \right) K_0(|\lambda\rho|) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad \rho > c. \quad (13)$$

На основании преобразования Фурье и представлений (7), (12), (13) граничное условие (3) принимает вид

$$Z(\lambda) I_0(\lambda b) + \frac{c}{\pi} K_0(|\lambda b|) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n B_n(\lambda c) + K_0(|\lambda b|) \left( \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ell^{n+1} \frac{(-i)^n}{n!} \lambda^n \right) = 0. \quad (14)$$

Исключим из уравнения (11) функцию  $Z(\lambda)$ , используя представление (14), и получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $X_n$  с безразмерными параметрами  $\tau = \frac{r}{R}$ ,  $ch\alpha_0 = \frac{1}{\tau}$ ,  $\frac{c}{b} = \frac{R}{b} \sqrt{1-\tau^2}$ :

$$X_n - \sum_{p=-\infty}^{\infty} L_{n,p} X_p = \frac{V}{\pi Q} \mathfrak{R}_n(\tau) - \mathbb{F}_n\left(\frac{\ell}{c}\right) \mathfrak{R}_n(\tau) + N_n, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

где

$$L_{n,p} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{c}{b} \mathfrak{R}_n(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(|t|)}{I_0(t)} B_n\left(\frac{c}{b}t\right) B_p\left(\frac{c}{b}t\right) dt,$$

$$N_n = \frac{1}{2\pi^2} \mathfrak{R}_n(\tau) \sum_{p=0}^{\infty} a_p \left(\frac{\ell}{b}\right)^{p+1} \frac{(-i)^p}{p!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(|t|)}{I_0(t)} B_n\left(\frac{c}{b}t\right) t^p dt.$$

Представив потенциалы  $U_i(\rho, z)$ ,  $U_c(\rho, z)$  через решение системы (15) и учитывая (14), запишем равенства

$$U_i(\rho, z) = Q \frac{1}{\pi} \frac{c}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left( \int_{-\infty}^{\infty} B_n\left(\frac{c}{b}t\right) K_0\left(\frac{\rho}{b}|t|\right) e^{i\frac{z}{b}t} dt \right), \quad \rho > c; \quad (16)$$

$$U_c(\rho, z) = -Q \frac{1}{\pi} \frac{c}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(|t|)}{I_0(t)} B_n\left(\frac{c}{b}t\right) I_0\left(\frac{\rho}{b}t\right) e^{i\frac{z}{b}t} dt \right) - Q \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\ell}{b}\right)^{n+1} \frac{(-i)^n}{n!} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(|t|)}{I_0(t)} t^n I_0\left(\frac{\rho}{b}t\right) e^{i\frac{z}{b}t} dt \right). \quad (17)$$

Для вычисления потенциала  $U_i(\alpha, \beta)$  через цилиндрические гармонические функции при  $\rho < c$  воспользуемся следующей теоремой сложения:

$$\sqrt{2(ch\alpha - \cos\beta)} P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{in\beta} = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\lambda c) I_0(\lambda \rho) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad \rho < c,$$

где

$$C_n(\lambda c) = 2\tilde{K}_0(\lambda c) + \sum_{s=1}^{|n|} (-1)^s \tilde{f}_s^{|n|} \left[ |n| \tilde{K}_s(\lambda c) - s \frac{|n|}{n} \tilde{K}_{s-1}(\lambda c) \right] (\lambda c)^s,$$

$$\tilde{f}_s^{|n|} = \frac{2^{3s+1} s! (|n| + s - 1)!}{((2s)!)^2 (|n| - s)!}, \quad \tilde{K}_s(x) = (\operatorname{sgn} x)^s K_s(|x|).$$

Тогда потенциал  $U_i(\alpha, \beta)$  примет вид

$$U_i(\rho, z) = Q \frac{1}{\pi b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left( \int_{-\infty}^{\infty} C_n \left( \frac{c}{b} t \right) I_0 \left( \frac{\rho}{b} t \right) e^{i \frac{z}{b} t} dt \right), \quad \rho < c. \quad (18)$$

**Вычислительный эксперимент.** Используя систему компьютерной математики Mathcad [29], вычислим вторичный потенциал электростатического поля  $U_1(\rho, z) = U_i(\rho, z) + U_c(\rho, z)$  по формулам (16)–(18) в области  $D_1$  для некоторых параметров задачи. Бесконечная система (15) решена методом усечения [32]. Для получения достоверного решения конечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы меньше 300 [33, с. 150]. Для вычисления числа обусловленности матрицы использовались встроенные функции  $\text{cond1}$  (число обусловленности в норме  $L_1$ ),  $\text{cond2}$  (в норме  $L_2$ ) и  $\text{conde}$  (в евклидовой норме). Вычислительный эксперимент показал, что для рассмотренных параметров задачи порядок усечения матрицы можно взять равным 21. Все сходящиеся бесконечные суммы вычислены с точностью  $10^{-5}$ . Несобственные интегралы вычислены по методике, предложенной в работе [32, с. 503].

Приведем некоторые результаты расчетов. Возьмем геометрические параметры задачи:

$$\tau = \frac{r}{R} = \frac{1}{10}, \quad \frac{R}{b} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c}{b} = \frac{R}{b} \sqrt{1 - \tau^2}, \quad \frac{h}{b} = \frac{1}{4}, \quad \frac{d}{b} = \frac{1}{5}, \quad \frac{\ell}{b} = \sqrt{\left(\frac{h}{b}\right)^2 + \left(\frac{d}{b}\right)^2}, \quad \frac{\ell}{c} = \frac{\ell}{b} \left(\frac{c}{b}\right)^{-1}.$$

На рис. 2, *a* изображены графики нормированного вторичного потенциала  $|U_1(1,5R, z)|/Q$  ( $\rho > c$ ),  $-3 \leq z/R \leq 3$ , в области  $D_1$  при некоторых значениях  $V/Q$  (значения приведены в правом углу рисунка), а на рис. 2, *b* – при  $r = 0,4R$  (малый радиус тора увеличен в четыре раза).

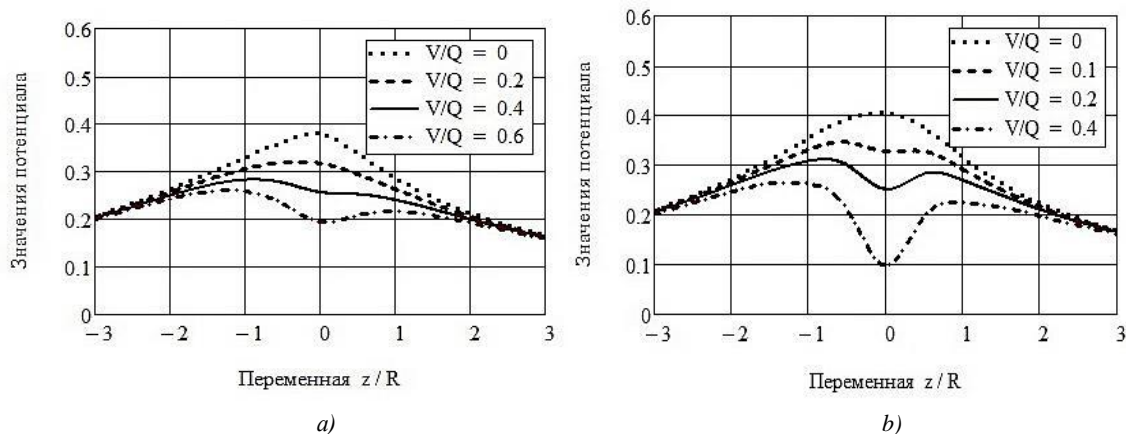


Рис. 2. Графики нормированного вторичного потенциала  $U_1(1,5R, z)/Q$ :  $r = 0,1R$  (*a*) и  $r = 0,4R$  (*b*)

*Fig. 2. Plots of the normalized secondary potential  $U_1(1,5R, z)/Q$ :  $r = 0,1R$  (*a*) and  $r = 0,4R$  (*b*)*

При увеличении величины  $V/Q$  значение нормированного вторичного потенциала  $|U_1(1,5R, z)|/Q$  ( $\rho > c$ ) уменьшается при  $z \rightarrow 0$ , когда малый радиус тора увеличивается. Значение  $|U_1(1,5R, z)|/Q$  не изменяется при изменении малого радиуса тора и увеличении  $V/Q$  для  $|z| > 1$ .

На рис. 3, *a* показаны графики нормированного вторичного потенциала  $|U_1(0,5R, z)|/Q$  ( $\rho < c$ ),  $-3 \leq z/R \leq 3$ ,  $r = 0,1R$ , при некоторых значениях  $V/Q$  (значения приведены в правом



углу рисунка), а на рис. 3,  $b$  – при  $r=0,4R$  (малый радиус тора увеличен в четыре раза). Остальные параметры не изменены.

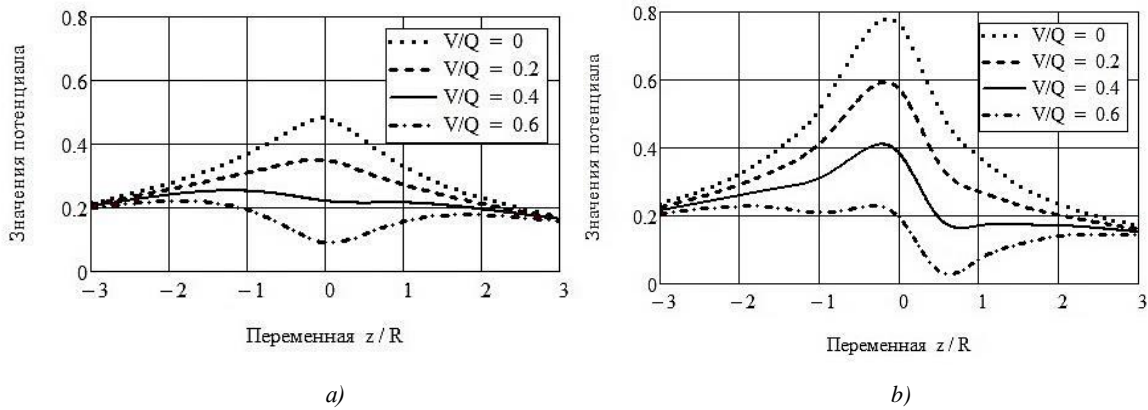


Рис. 3. Графики нормированного вторичного потенциала  $|U_1(0,5R,z)|/Q$ :  $r=0,1R$  (a) и  $r=0,4R$  (b)

Fig. 3. Plots of the normalized secondary potential  $|U_1(0,5R,z)|/Q$ :  $r=0,1R$  (a) and  $r=0,4R$  (b)

При увеличении величины  $V/Q$  значение нормированного вторичного потенциала  $|U_1(0,5R,z)|/Q$  ( $\rho < c$ ) уменьшается при  $r=0,1R$  (диапазон изменения потенциала от 0,5 до 0,1) и при  $r=0,4R$  (диапазон изменения потенциала от 0,8 до 0).

На рис. 4,  $a$  изображены графики нормированного вторичного потенциала  $|U_1(\rho,0,5R)|/Q$ ,  $0 \leq \rho/R \leq 2$ , при  $\tau = \frac{r}{R} = \frac{2}{5}$ ,  $\frac{R}{b} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{h}{b} = \frac{1}{200}$ ,  $\frac{d}{b} = \frac{1}{4}$  и некоторых значениях  $V/Q$  (значения приведены в правом углу рисунка), а на рис. 4,  $b$  – графики нормированного вторичного потенциала  $|U_1(\rho,0,2R)|/Q$ ,  $0 \leq \rho/R \leq 2$ , при  $r=0,1R$  (малый радиус тора уменьшен в четыре раза). В данном случае источник поля (заряженная нить) расположен на плоскости  $Oxy$ .

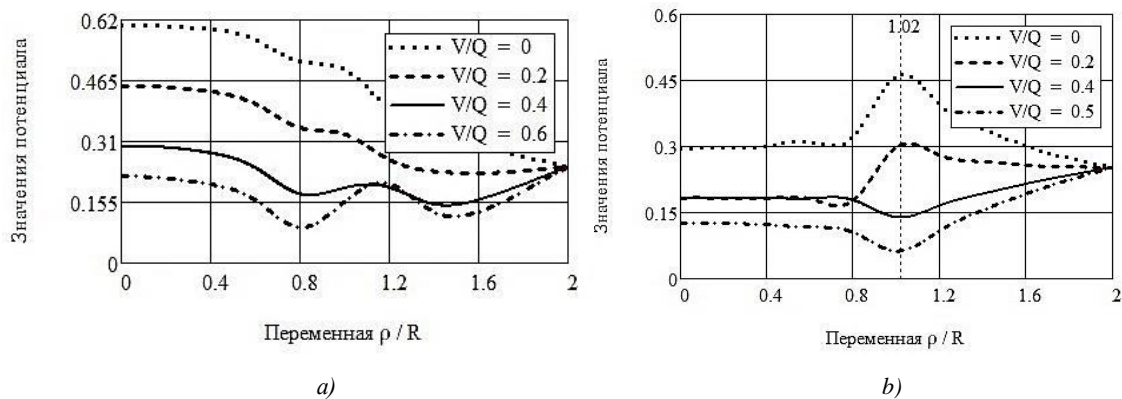


Рис. 4. Графики нормированного вторичного потенциала:  $|U_1(\rho,0,5R)|/Q$ ,  $r=0,4R$  (a) и  $|U_1(\rho,0,2R)|/Q$ ,  $r=0,1R$  (b)

Fig. 4. Plots of the normalized secondary potential:  $|U_1(\rho,0,5R)|/Q$ ,  $r=0,4R$  (a) and  $|U_1(\rho,0,2R)|/Q$ ,  $r=0,1R$  (b)

Значение нормированного потенциала  $|U_1(\rho,0,5R)|/Q$  при  $r=0,4R$  и увеличении  $V/Q$  монотонно убывает (рис. 4,  $a$ ). При уменьшении малого радиуса тора значение нормированного потенциала  $|U_1(\rho,0,2R)|/Q$  при  $r=0,1R$  и увеличении  $V/Q$  монотонно возрастает до  $\rho=1,02R$ , а затем убывает (рис. 4,  $b$ ).

**Заключение.** В статье разработана методика аналитико-численного решения поставленной задачи Дирихле для системы двух тел (экранов). Источником поля является тонкое заряженное кольцо, расположенное на плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического экрана. С использованием соответствующих теорем сложения для гармонических функций решение поставленной задачи сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов, входящих в представление вторичного поля. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение вторичного потенциала электростатического поля внутри заземленного цилиндрического экрана в присутствии тороидального включения. Результаты вычислений даны в виде графиков. Представленные методика и программное обеспечение могут найти практическое применение при разработке и конструировании экранов в различных областях техники.

### Список использованных источников

1. Дмитриев, В. И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
2. Ильин, В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В. П. Ильин. – Новосибирск : Ин-т математики, 2000. – 345 с.
3. Исаев, Ю. Н. Методы расчета электромагнитных полей. Практика использования MathCAD, COMSOL Multiphysics / Ю. Н. Исаев, О. В. Васильева. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 162 с.
4. Pierrus, J. Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments / J. Pierrus. – Oxford : Oxford University Press, 2018. – 638 p. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198821915.001.0001>
5. Ташаев, Ю. Н. Моделирование электростатического поля тороид / Ю. Н. Ташаев // Успехи прикладной физики. – 2015. – Т. 3, № 2. – С. 126–132.
6. Duffy, D. G. Mixed Boundary Value Problems / D. G. Duffy. – N. Y. : Chapman & Hall/CRC, 2008. – 488 p. <https://doi.org/10.1201/9781420010947>
7. Лебедев, Н. Н. Распределение электричества на тонком сферическом кольце / Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская // ЖТФ. – 1982. – Т. 52, № 12. – С. 2325–2331.
8. Виноградов, С. С. К решению краевых задач теории потенциала для незамкнутых эллипсоидов вращения / С. С. Виноградов, Ю. А. Тучкин, В. П. Шестапалов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 12. – С. 47–51.
9. Занадворов, Н. П. Электростатическая задача для полого усеченного конуса / Н. П. Занадворов // ЖТФ. – 1987. – Т. 57, № 4. – С. 634–638.
10. Виноградов, С. С. Расчет электростатических полей проводников в форме сфероидальных оболочек с двумя круглыми отверстиями / С. С. Виноградов, Е. Д. Луценко // Электричество. – 1988. – № 2. – С. 52–55.
11. Шушкевич, Г. Ч. Методика решения электростатической задачи для тонкой незамкнутой сферической оболочки / Г. Ч. Шушкевич // Электричество. – 2010. – № 6. – С. 63–68.
12. Collins, W. D. On some triple series equations and their application / W. D. Collins // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1962. – Vol. 11, no. 2. – P. 122–137.
13. Ерофеев, В. Т. Задача электростатики для двух тороидальных проводников / В. Т. Ерофеев // ЖТФ. – 1986. – Т. 56, № 8. – С. 1641–1643.
14. Sampath, C. Some electrostatic problems of two equal co-axial circular strips / C. Sampath, D. Jain // J. Math. and Phys. Sci. – 1991. – Vol. 25, no. 3. – P. 217–230.
15. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic problem for a torus placed in an infinite cylinder / G. Ch. Shushkevich // Technical Physics. – 2004. – Vol. 49, no. 5. – P. 540–544. <https://doi.org/10.1134/1.1758325>
16. Шушкевич, Г. Ч. Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г. Ч. Шушкевич. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.
17. Шушкевич, Г. Ч. Расчет емкости двух тонких сферических оболочек / Г. Ч. Шушкевич // Электричество. – 1984. – № 10. – С. 62–64.
18. Шушкевич, Г. Ч. Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической оболочки и двух дисков / Г. Ч. Шушкевич // Электричество. – 1999. – № 6. – С. 28–34.
19. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic field of a flattened ellipsoid and disc between two thin open spherical shells / G. Ch. Shushkevich, S. V. Shushkevich // Electrical Technology. – 1996. – No. 1. – P. 89–99.

20. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic problem for a torus and a disk / G. Ch. Shushkevich // *Technical Physics*. – 1997. – Vol. 42, no. 4. – P. 436–438. <https://doi.org/10.1134/1.1258698>
21. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic field of a thin unclosed spherical shell and a torus / G. Ch. Shushkevich // *Technical Physics*. – 1998. – Vol. 43, no. 7. – P. 743–748. <https://doi.org/10.1134/1.1259067>
22. Shushkevich, G. Ch. Electrostatic problem for a thin unclosed ellipsoidal shell and disk / G. Ch. Shushkevich // *Technical Physics*. – 1999. – Vol. 44, no. 2. – P. 133–136. <https://doi.org/10.1134/1.1259271>
23. Шушкевич, Г. Ч. Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической и сфероидальной оболочек / Г. Ч. Шушкевич // *Электричество*. – 1997. – № 3. – С. 59–64.
24. Шушкевич, Г. Ч. Моделирование поля электростатического диполя в присутствии тонкой сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и плоскости / Г. Ч. Шушкевич // *Информатика*. – 2017. – № 2. – С. 14–23. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-3-48-58>
25. Nikolaev, O. Green's functions of the first and second boundary value problems for the Laplace equation in the nonclassical domain / O. Nikolaev, O. Holovchenko, N. Savchenko // *Radioelectronic and Computer Systems*. – 2022. – No. 4. – P. 30–49. <https://doi.org/10.32620/reks.2022.4.03>
26. Лоскутников, В. С. Функция Грина и метод изображений в задачах электростатики / В. С. Лоскутников // *Проблемы современной науки и образования*. – 2021. – № 10(167). – С. 6–10.
27. Majlic, M. Electrostatic T-matrix for a torus on bases of toroidal and spherical harmonics / M. Majlic // *J. of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*. – 2019. – Vol. 235. – P. 287–299. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2019.07.010>
28. Ерофеенко, В. Т. Расчет электростатических полей в корпусе с отверстием методом граничных элементов / В. Т. Ерофеенко, Д. В. Комнатный // *Информатика*. – 2011. – № 2(30). – С. 48–55.
29. Шушкевич, Г. Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 2 / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2012. – 256 с.
30. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами : пер. с англ. / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
31. Ерофеенко, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.
32. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 848 с.
33. Петров, Ю. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю. Петров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 160 с.

---

---

## References

1. Dmitriev V. I., Zakharov E. V. *Metod integral'nykh uravnenii v vychislitel'noi elektrodinamike. The Method of Integral Equations in Computational Electrodynamics*. Moscow, MAKS Press, 2008, 316 p. (In Russ.).
2. Ilyin V. P. *Metody konechnykh raznostei i konechnykh ob'emov dlia ellipticheskikh uravnenii. Finite Difference and Finite Volume Methods for Elliptic Equations*. Novosibirsk, Institut matematiki, 2000, 345 p. (In Russ.).
3. Isaev Yu. N., Vasilyeva O. V. *Metody rascheta elektromagnitnykh poley. Praktika ispol'zovaniya MathCAD, COMSOL Multiphysics. Methods for the Calculation of Electromagnetic Fields. Practice Using MathCAD, COMSOL Multiphysics*. Saarbruchen, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, 162 p. (In Russ.).
4. Pierrus J. *Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments*. Oxford, Oxford University Press, 2018, 638 p. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198821915.001.0001>
5. Tashaev Yu. N. *Modeling the electrostatic field of a toroid. Uspekhi prikladnoy fiziki [Advances in Applied Physics]*, 2015, vol. 3, no. 2, pp. 126–132 (In Russ.).
6. Duffy D. G. *Mixed Boundary Value Problems*. New York, Chapman & Hall/CRC, 2008, 488 p. <https://doi.org/10.1201/9781420010947>
7. Lebedev N. N., Skalskaya I. P. *Distribution of electricity on a thin spherical ring. Zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Journal of Technical Physics]*, 1982, vol. 52, no. 12, pp. 2325–2331 (In Russ.).
8. Vinogradov S. S., Tuchkin Yu. A., Shestapalov V. P. *On the solution of boundary value problems of potential theory for non-closed ellipsoids of revolution. Doklady Akademii nauk Ukrainskoj Sovetskoj Socialisticheskoy Respubliki. Serija A [Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian Soviet Socialist Republic. Serie A]*, 1981, no. 12, pp. 47–51 (In Russ.).

9. Zanadvorov N. P. *Electrostatic problem for a hollow truncated cone*. Zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Journal of Technical Physics], 1987, vol. 57, no. 4, pp. 634–638 (In Russ.).
10. Vinogradov S. S., Lutsenko E. D. *Calculation of electrostatic fields of conductors in the form of spheroidal shells with two round holes*. Elektrichestvo [Electricity], 1988, no. 2, pp. 52–55 (In Russ.).
11. Shushkevich G. Ch. *A technique for solving an electrostatic problem for a thin non-closed spherical shell*. Elektrichestvo [Electricity], 2010, no. 6, pp. 63–68 (In Russ.).
12. Collins W. D. *On some triple series equations and their application*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, vol. 11, no. 2, pp. 122–137. <https://doi.org/10.1007/BF00253935>
13. Erofeenko V. T. *Electrostatic problem for two toroidal conductors*. Zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Journal of Technical Physics], 1986, vol. 56, no. 8, pp. 1641–1643 (In Russ.).
14. Sampath C., Jain D. *Some electrostatic problems of two equal co-axial circular strips*. Journal of Mathematical and Physical Sciences, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 217–230.
15. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic problem for a torus placed in an infinite cylinder*. Technical Physics, 2004, vol. 49, no. 5, pp. 540–544. <https://doi.org/10.1134/1.1758325>
16. Shushkevich G. Ch. *Modelirovaniye poley v mnogovyaznykh oblastiakh v zadachakh elektrostati*. Modeling Fields in Multiply Connected Regions in Electrostatic Problems. Saarbruchen, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015, 228 p. (In Russ.).
17. Shushkevich G. Ch. *Calculation of the capacitance of two thin spherical shells*. Elektrichestvo [Electricity], 1984, no. 10, pp. 62–64 (In Russ.).
18. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic field of a thin open spherical shell and two disks*. Elektrichestvo [Electricity], 1999, no. 6, pp. 28–34 (In Russ.).
19. Shushkevich G. Ch., Shushkevich S. V. *Electrostatic field of a flattened ellipsoid and disc between two thin open spherical shells*. Electrical Technology, 1996, no. 1, pp. 89–99.
20. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic problem for a torus and a disk*. Technical Physics, 1997, vol. 42, no. 4, pp. 436–438. <https://doi.org/10.1134/1.1258698>
21. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic field of a thin unclosed spherical shell and a torus*. Technical Physics, 1998, vol. 43, no. 7, pp. 743–748. <https://doi.org/10.1134/1.1259067>
22. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic problem for a thin unclosed ellipsoidal shell and disk*. Technical Physics, 1999, vol. 44, no. 2, pp. 133–136. <https://doi.org/10.1134/1.1259271>
23. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic field of thin non-closed spherical and spheroidal shells*. Elektrichestvo [Electricity], 1997, no. 3, pp. 59–64 (In Russ.).
24. Shushkevich G. Ch. *Modeling the field of an electrostatic dipole in the presence of a thin oblate open ellipsoidal shell and plane*. Informatika [Informatics], 2017, no. 2, pp. 14–23 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-3-48-58>
25. Nikolaev O., Holovchenko O., Savchenko N. *Green's functions of the first and second boundary value problems for the Laplace equation in the nonclassical domain*. Radioelectronic and Computer Systems, 2022, no. 4, pp. 30–49. <https://doi.org/10.32620/reks.2022.4.03>
26. Loskutnikov V. S. *Green's function and the image method in problems of electrostatics*. Problemy sovremennoy nauki i obrazovaniya [Problems of Modern Science and Education], 2021, no. 10(167), pp. 6–10 (In Russ.).
27. Majlic M. *Electrostatic T-matrix for a torus on bases of toroidal and spherical harmonics*. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2019, vol. 235, pp. 287–299. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2019.07.010>
28. Erofeenko V. T., Komnatnyy D. V. *Calculation of electrostatic fields in a housing with a hole by the boundary element method*. Informatika [Informatics], 2011, no. 2(30), pp. 48–55 (In Russ.).
29. Shushkevich G. Ch., Shushkevich S. V. *Komp'yuternyye tekhnologii v matematike. Sistema Mathcad 14. Chast' 2. Computer Technologies in Mathematics. Mathcad 14. Part 2*. Minsk, Izdatel'stvo Grevcova, 2012, 256 p. (In Russ.).
30. In Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965, 1046 p.
31. Erofeenko V. T. *Teoremy slozheniya. Addition Theorems*. Minsk, Nauka i tekhnika, 1989, 240 p. (In Russ.).
32. Verzhbitsky V. M. *Osnovy chislennykh metodov. Fundamentals of Numerical Methods*. Moscow, Vysshaya shkola, 2002, 848 p. (In Russ.).
33. Petrov Yu. *Obespecheniye dostovernosti i nadezhnosti komp'yuternykh raschetov. Ensuring the Reliability and Reliability of Computer Calculations*. Saint Petersburg, BHV-Petersburg, 2012, 160 p. (In Russ.).

**Информация об авторе**

*Шушкевич Геннадий Чеславович*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры современных технологий программирования, УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы».

E-mail: gsys@grsu.by

**Information about the author**

*Gennady Ch. Shushkevich*, D. Sc. (Phys.-Math.), Prof. of Modern Programming Technologies Department, Yanka Kupala State University of Grodno.

E-mail: gsys@grsu.by