МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.872
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-3-50-60

Оригинальная статья
Original Paper

Характеристики производительности системы массового обслуживания с расщеплением запросов

В. И. Клименок

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь
E-mail: klimenok@bsu.by

Аннотация

Цели. Рассматривается задача построения и исследования математической модели стохастической системы с расщеплением и сборкой запросов. Требуется построить процесс функционирования системы, найти условие существования стационарного распределения, предложить алгоритмы его вычисления и основных стационарных характеристик производительности системы. Особый интерес вызывает задача получения нижней и верхней границ математического ожидания времени пребывания запроса в системе.

Методы. Используются методы теории вероятностей, теории массового обслуживания и теории матриц.

Результаты. Функционирование системы описано в терминах многомерной цепи Маркова. Найдено конструктивное условие существования стационарного распределения, предложены алгоритмы его вычисления и стационарных характеристик производительности системы. Получены аналитические выражения для нижней и верхней границ математического ожидания времени пребывания запросов в системе.

Заключение. Исследован стационарный режим функционирования системы массового обслуживания с расщеплением и сборкой запросов, поступающих в систему в стационарном пуассоновском потоке. Каждый из поступающих запросов расщепляется на два задания, которые идут в две подсистемы, состоящие из обслуживающего прибора и буфера. Времена обслуживания заданий имеют разные фазовые распределения (*PH*-Phase type distributions). Для данной системы найдено условие существования стационарного распределения, предложены алгоритмы вычисления стационарного распределения и ряда стационарных характеристик производительности системы. Получены аналитические выражения для нижней и верхней границ математического ожидания времени пребывания запроса в системе от момента его поступления в систему до момента синхронизации, которое является критическим показателем производительности системы с расщеплением и сборкой запросов.

Ключевые слова: система массового обслуживания с расщеплением и сборкой запросов (англ. fork-join queue), стационарный пуассоновский поток, фазовое распределение времени обслуживания, стационарные характеристики производительности, границы для среднего времени пребывания

Для цитирования. Клименок, В. И. Характеристики производительности системы массового обслуживания с расщеплением запросов / В. И. Клименок // Информатика. – 2023. − Т. 20, № 3. – С. 50–60. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-3-50-60

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 17.03.2023
Подписана в печать | Accepted 15.05.2023
Опубликована | Published 29.09.2023

Performance characteristics of the fork-join queuing system

Valentina I. Klimenok

Belarusian State University,
av. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220030, Belarus
E-mail: klimenok@bsu.by

Abstract

Objectives. The problem of investigating a fork-join queuing system is considered. It is required to build the process of the system functioning, to find the condition for the existence of a stationary distribution, and propose algorithms for calculating the stationary distribution and the main stationary performance characteristics. The special interest of the study is to obtain the lower and upper bounds of the mean sojourn time of a customer in the system.

Methods. Methods of probability theory, queuing theory and matrix theory are used.

Results. The functioning of the system is described in terms of a multidimensional Markov chain. A constructive condition for the existence of a stationary distribution is found, and algorithms for calculating the stationary distribution and stationary performance characteristics of the system are proposed. Analytical expressions are obtained for the lower and upper bounds of the mean sojourn time of customers in the system.

Conclusion. The functioning of the fork-join queuing system with a stationary Poisson flow has been studied. Each of the arriving customers forks into two tasks that go to two subsystems, each of which consists of a server and a buffer. We assume that the buffer to one of the servers is unlimited, and to the second server has a finite volume. Service times have, generally speaking, different phase distributions (PH-Phase type distributions). For this system, a condition for the existence of a stationary distribution is obtained, algorithms for calculating the stationary distribution and a number of stationary performance measures of the system are proposed. Analytical expressions for the lower and upper bounds of the mean sojourn time of a customer in the system from the moment it enters the system to the moment of synchronization, which is a critical performance indicator of the fork-join queues, are obtained. The results of the study can be used for modeling various computer and communication systems, in particular, systems that perform parallel computing, customer processing in distributed databases, and parallel disk access.

Keywords: fork-join queuing system, stationary Poisson flow, phase-type distribution of service times, stationary performance measures, bounds for the mean sojourn time

For citation. Klimenok V. I. *Performance characteristics of the fork-join queuing system*. Informatika [*Informatics*], 2023, vol. 20, no. 3, pp. 50–60 (In Russ.). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-3-50-60

Conflict of interest. The author declares of no conflict of interest.

Введение. Системы массового обслуживания с разделением и повторной синхронизацией данных (общепринятое в мировой литературе название fork-join-системы) являются естественными моделями различных компьютерных и коммуникационных систем, в частности систем, в которых выполняются параллельные вычисления, обработка запросов в распределенных базах данных и параллельный доступ к диску. Ключевая особенность этих систем заключается в том, что после поступления запроса в систему он разделяется на K заданий, которые выполняются K параллельными обслуживающими приборами. Запрос считается обслуженным, когда все его задания выполнены. В этот момент (момент синхронизации) осуществляется сборка запроса из заданий и уход из системы.

Критическим показателем производительности fork-join-системы является время пребывания запроса в системе от момента его поступления до момента синхронизации. Точный анализ этого времени является сложной задачей из-за зависимости очередей от различных обслуживающих приборов. В случае бесконечных очередей очевидные трудности возникают и при вычислении совместного стационарного распределения длин очередей даже при простейших предположениях о характере входного потока и времен обслуживания. Нахождению такого распределения посвящена работа [1], где рассмотрен случай $K = 2$, бесконечные очереди к приборам, стационарный пуассоновский поток и экспоненциальные распределения времен обслуживания. Для fork-join-системы получено функциональное уравнение для производящей функции совместного распределения длины очередей и исследованы вопросы асимптотического поведения совместных вероятностей. Вместе с тем в статье не затрагивается проблема нахождения времени пребывания запросов в системе. Результаты работы [1] используются в статье [2], где выводится формула для среднего времени пребывания в упомянутой системе при упрощающем предположении о том, что интенсивности обслуживания на обоих приборах равны. Для случая $K > 2$ в работе [2] предложена приближенная формула для вычисления среднего времени пребывания. В исследовании [3] авторы находят среднее время пребывания в fork-join-системе с двумя обслуживающими приборами ($K = 2$) и более общими распределениями времен между поступлениями (гиперэкспоненциальными) и временами обслуживания (эрланговскими). В работе [4] рассматривается метод вычисления стационарного распределения fork-join-системы с марковским потоком, $K \geq 2$ однородными приборами, характеризующимися экспоненциальным распределением времени обслуживания, и бесконечными очередями. Метод предполагает решение нелинейного матричного интегрального уравнения и усечение пространства состояний процесса, описывающего функционирование системы. Основные результаты получены для случая $K = 2$. Более общие случаи рассматривались в литературе (например, [5–8]) только путем приближенного анализа. С состоянием дел в этой области до 2014 г. можно ознакомиться из обзора, приведенного в статье [9].

Вследствие объективной сложности задачи нахождения распределений, характеризующих fork-join-системы, во многих работах авторы ограничиваются анализом *среднего* времени пребывания в системе, главным образом нахождением верхних и (или) нижних границ для этого времени. Исследованию таких границ при различных предположениях о параметрах системы посвящены, в частности, работы [5, 10–14]. При этом в большинстве из них не содержится точных аналитических результатов для указанных границ. Известны только работы [5, 14], где получены удобные для вычислений аналитические выражения для границ среднего времени пребывания. Для экспоненциальной системы с однородными приборами получены нижняя и верхняя границы для среднего времени пребывания [14]. Такие же границы найдены для системы с однородными приборами, с экспоненциальным или эрланговским распределением времени обслуживания [5].

В настоящей статье рассматривается fork-join-система с двумя неоднородными приборами и более общими предположениями о распределении времен обслуживания запросов. Времена обслуживания имеют фазовое распределение, которое включает в себя как частные случаи экспоненциальное, гиперэкспоненциальное и эрланговское распределения. Запросы поступают в систему в стационарном пуассоновском потоке. Каждый из поступающих запросов расщепляется на два задания, которые идут в две подсистемы, состоящие из обслуживающего прибора и буфера. Предполагается, что буфер к одному из приборов неограниченный, а ко второму прибору имеет конечный объем.

Описание системы. Рассматривается система массового обслуживания с расщеплением и сборкой запросов. Запросы поступают в систему в стационарном пуассоновском потоке с интенсивностью λ. Каждый поступающий запрос расщепляется на два задания, которые обслуживаются в двух подсистемах G_1 и G_2. Система G_1 состоит из обслуживающего прибора 1 и бесконечного буфера, а система G_2 – из прибора 2 и конечного буфера размером J, $0 \le J < \infty$.

Время обслуживания задания k-м прибором имеет PH-распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}_k, S_k)$, $k = 1, 2$. Это означает, что процесс обслуживания на k-м приборе происходит под управлением цепи Маркова $m_t^{(k)}$, $t \ge 0$, с пространством состояний $\{1,\dots,M^{(k)},M^{(k)} + +1\}$, где состояние $M^{(k)} + 1$ является поглощающим. Первоначальное состояние цепи устанавливается в соответствии со стохастическим вектором $\boldsymbol{\beta}_k$. Интенсивности переходов цепи в множестве несущественных состояний задаются матрицами S_k, а интенсивности переходов в поглощающие состояния – векторами $\boldsymbol{S}_0^{(k)} = -S_k\boldsymbol{e}$, $k = 1, 2$. Здесь и далее $\boldsymbol{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц. Функция распределения времени обслуживания на k-м приборе имеет вид $B_k(t) = 1 - \boldsymbol{\beta}_k e^{S_k t}\boldsymbol{e}$ с преобразованием Лапласа – Стилтьеса $\chi_k(u) = \boldsymbol{\beta}_k(uI - S_k)^{-1}\boldsymbol{S}_0^{(k)}$, $k = 1, 2$. Интенсивность обслуживания рассчитывается по формуле $\mu_k = -[\boldsymbol{\beta}_k S_k^{-1}\boldsymbol{e}]^{-1}$, среднее время обслуживания определяется как $b_k = \mu_k^{-1}$, $k = 1, 2$. Более подробное описание PH-распределения можно найти, например, в работах [15, 16].

Цепь Маркова, описывающая процесс функционирования системы. Пусть в момент времени t i_t – число заданий в подсистеме G_1, $i \ge 0$; j_t – число заданий в подсистеме G_2, $j = \overline{0,J}$; $m_t^{(k)}$ – состояние (фаза) управляющего процесса PH-обслуживания на k-м приборе, $m_t^{(k)} = \overline{1,M^{(k)}}$, $k = 1,2$.

Функционирование системы описывается регулярной неприводимой цепью Маркова ξ_t, $t \ge 0$, с пространством состояний

$$\Omega = \{(0,0)\} \cup \{(i,0,m^{(1)}), i > 0, m^{(1)} = \overline{1,M^{(1)}}\} \cup$$
$$\cup\{(0,j,m^{(2)}), j = \overline{0,J}, m^{(2)} = \overline{1,M^{(2)}}\} \cup$$
$$\cup\{(i,j,m^{(1)},m^{(2)}), i > 0, j = \overline{1,J}, m^{(1)} = \overline{1,M^{(1)}}, m^{(2)} = \overline{1,M^{(2)}}\}.$$

Перенумеруем состояния цепи ξ_t в лексикографическом порядке и обозначим через $Q_{i,i'}$ матрицу интенсивностей переходов из состояний со значением i первой компоненты в состояния со значением i' этой компоненты. Также обозначим через Q_r матрицы, которые определены как $Q_r = Q_{i,i+r-1}$, $i \ge 1, r \ge 0$.

Чтобы перейти к написанию инфинитезимального генератора Q цепи Маркова ξ_t, введем следующие обозначения:

$\mathbf{0}$ – вектор-строка, состоящий из нулей;

I (O) – тождественная (нулевая) матрица;

$\overline{W} + W + 1$;

$\otimes$ $(\oplus)$ – символ кронекерова произведения (суммы) матриц [17];

$diag\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ – блочная диагональная матрица, у которой диагональные блоки равны элементам, перечисленным в скобках, а остальные блоки нулевые;

$diag^+\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ – квадратная блочная матрица, у которой наддиагональные блоки равны элементам, перечисленным в скобках, а остальные блоки нулевые;

$diag^-\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ – квадратная блочная матрица, у которой поддиагональные блоки равны элементам, перечисленным в скобках, а остальные блоки нулевые.

Лемма. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова $\xi_t, t \ge 0$, имеет блочно-трехдиагональную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \dots \\ Q_{1,0} & Q_1 & Q_2 & O & \dots \\ O & Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots \\ O & O & Q_0 & Q_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где ненулевые блоки $Q_{i,i'}$ выглядят следующим образом:

$Q_{0,0}$ – квадратная матрица порядка $1 + JM_2$,

$$Q_{0,0} = diag\{-\lambda, -\lambda I + S_2, \ldots, -\lambda I + S_2, S_2\} + diag^{-}\{\boldsymbol{S}_0^{(2)}, \boldsymbol{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}_2\};$$

$Q_{0,1}$ – матрица порядка $(1 + JM_2) \times M_1(1 + JM_2)$,

$$Q_{0,1} = \lambda diag^{+}\{\boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1 \otimes I_{M_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_1 \otimes I_{M_2}\};$$

$Q_{1,0}$ – матрица порядка $M_1(1 + JM_2) \times (1 + JM_2)$,

$$Q_{1,0} = diag\{\boldsymbol{S}_0^{(1)}, \boldsymbol{S}_0^{(1)} \otimes I_{M_2}, \ldots, \boldsymbol{S}_0^{(1)} \otimes I_{M_2}\};$$

Q_0 – квадратная матрица порядка $M_1(1 + JM_2)$,

$$Q_0 = diag\{\boldsymbol{S}_0^{(1)}, \boldsymbol{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}_1 \otimes I_{M_2}, \ldots, \boldsymbol{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}_1 \otimes I_{M_2}\};$$

Q_1 – квадратная матрица порядка $M_1(1 + JM_2)$,

$$Q_1 = diag\{-\lambda S^{(1)}, -\lambda S_1 \oplus S_2, \ldots, -\lambda S_1 \oplus S_2, S_1 \oplus S_2\} +$$

$$+ diag^{-}\{I_{M_1} \otimes \boldsymbol{S}_0^{(2)}, I_{M_1} \otimes \boldsymbol{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}_2, \ldots, I_{M_1} \otimes \boldsymbol{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}_2\};$$

Q_2 – квадратная матрица порядка $M_1(1 + JM_2)$,

$$Q_2 = \lambda diag^{+}\{I_{M_1} \otimes \boldsymbol{\beta}_2, I_{JM_1M_2}\}.$$

Доказательство леммы проводится путем анализа поведения цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, на бесконечно малом интервале времени.

Следствие 1. *Цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, принадлежит классу векторных процессов гибели и размножения.*

Доказательство следует из структуры инфинитезимального генератора и определения векторного процесса гибели и размножения (quasi-birth-and-death process, *QBD*), данного в работе [15].

Критерий существования стационарного режима. Критерий существования стационарного режима в рассматриваемой системе совпадает с необходимым и достаточным условием эргодичности цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$. Это условие определено в следующей теореме.

Теорема 1. *Цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, эргодична тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\lambda(1 - y_J) < \mu_1, \tag{1}$$

где

$$y_J = \frac{(\frac{\lambda}{\mu_2})^J / J!}{\sum_{j=0}^{J} (\frac{\lambda}{\mu_2})^j / j!}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно работе [15] необходимым и достаточным условием эргодичности рассматриваемого процесса *QBD* является выполнение неравенства

$$\mathbf{x}Q_2\boldsymbol{e} < \mathbf{x}Q_0\boldsymbol{e}, \tag{3}$$

где стохастический вектор $\mathbf{x}$ будет единственным решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{x}(Q_0 + Q_1 + Q_2) = \mathbf{0}, \mathbf{x}\boldsymbol{e} = 1. \tag{4}$$

Представим вектор x в виде $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_J)$, где вектор $\mathbf{x}_0$ имеет порядок M_1, а векторы $\mathbf{x}_j, j = \overline{1,J}$, – порядок M_1M_2. Тогда с учетом выражений для блоков Q_0,Q_1,Q_2, приведенных в лемме, систему (4) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_0 C_0 + \mathbf{x}_1\left(I_{M_1} \otimes \boldsymbol{S}_0^{(2)}\right) = \mathbf{0},\\ \mathbf{x}_{j-1}\lambda(I_{M_1} \otimes \boldsymbol{\beta}_2) + \mathbf{x}_j C + \mathbf{x}_{j+1}(I_{M_1} \otimes \boldsymbol{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}_2) = \mathbf{0}, j = \overline{1, J-1},\\ \mathbf{x}_{J-1}\lambda(I_{M_1} \otimes \boldsymbol{\beta}_2) + \mathbf{x}_J(C + \lambda I_{M_1M_2}) = \mathbf{0},\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$C_0 = S_1 + \boldsymbol{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \lambda I_{M_1},\ \ C = (S_1 + \boldsymbol{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}_1) \otimes I_{M_2} - \lambda I_{M_1M_2} + I_{M_1} \otimes S_2.$$

Теперь представим векторы $\mathbf{x}_j$ через неотрицательные векторы $\mathbf{y}_j$ порядка M_1, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{j=0}^{J}\mathbf{y}_j\boldsymbol{e} = 1$, следующим образом: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j \otimes \boldsymbol{\delta}_2$, $j = \overline{1,J}$, где $\boldsymbol{\delta}_2$ – стационарный вектор-строка PH-процесса обслуживания на приборе 2, т. е. единственное решение системы $\boldsymbol{\delta}_2(S_2 + \boldsymbol{S}_0^{(2)}\boldsymbol{\beta}_2) = 0, \boldsymbol{\delta}_2 e = 1$.

Используем указанные выражения для $\mathbf{x}_j$, $j = \overline{0,J}$, и $\boldsymbol{\delta}_2$ в уравнениях системы (5), предварительно умножив первое из уравнений на e_{M_1}, а каждое из последних уравнений J на $\boldsymbol{e}_{M_1M_2}$. С учетом соотношений $\mu_2 = \boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{S}_0^{(2)}, (S_1 + \boldsymbol{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}_1)\boldsymbol{e} = 0^T$ сведем систему (5) к следующей системе линейных алгебраических уравнений для вероятностей $y_j = \mathbf{y}_j\boldsymbol{e}, j = \overline{0,J}$:

$$\begin{gathered}-\lambda y_0 + \mu_2 y_1 = 0,\\ \lambda y_{j-1} - (\lambda + \mu_2)y_j + \mu_2 y_{j+1} = 0, j = \overline{1, J-1},\\ \lambda y_{J-1} - \mu_2 y_J = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда убеждаемся, что вероятности $y_j, j = \overline{0,J}$, удовлетворяют системе уравнений равновесия для процесса гибели и размножения с интенсивностью размножения λ и гибели μ_2. Тогда из системы (6) и уравнения нормировки следует, что вероятность y_J имеет вид формулы (2).

Рассмотрим неравенство (3), задающее условие эргодичности. Поставим цель перейти в этом неравенстве от векторов $\mathbf{x}_j$ к векторам $\mathbf{y}_j$ и упростить полученное неравенство. Воспользуемся ранее введенным представлением $\mathbf{x}_\mathbf{0} = \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j \otimes \boldsymbol{\delta}_2, j = \overline{1,J}$, и подставим векторы $\mathbf{x}_j$ в таком виде в неравенство (3). После этого, учитывая вид блоков Q_0, Q_2 генератора, заданных в лемме 1, приведем неравенство (3) к виду

$$\lambda\sum_{j=0}^{J-1} y_j < \sum_{j=0}^{J}\mathbf{y}_j\boldsymbol{S}_0^{(1)}. \tag{7}$$

Обозначим через $\boldsymbol{\delta}_1$ стационарный вектор PH-процесса обслуживания на приборе 1, т. е. единственное решение системы $\boldsymbol{\delta}_1(S_1 + \boldsymbol{S}_0^{(1)}\boldsymbol{\beta}_1) = 0, \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{e} = 1$. Из системы (5) можно получить соотношение $\sum_{j=0}^{J} \mathbf{y}_j = \boldsymbol{\delta}_1$. Учитывая это соотношение и очевидные равенства $\sum_{j=0}^{J-1} y_j = 1 - \mathbf{y}_J \boldsymbol{e}$, $\mu_1 = \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{S}_0^{(1)}$, преобразуем неравенство (7) к виду (1).

Теорема доказана.

Стационарное распределение. Обозначим через $\mathbf{p}_i, i \geq 0$, векторы стационарных вероятностей цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, соответствующие значению i первой компоненты. Их можно вычислить, используя алгоритм расчета стационарного распределения векторного процесса гибели и размножения (см., например, [15, 16, 18]). В рассматриваемом случае этот алгоритм запишется следующим образом.

Алгоритм 1. Формулы для вычисления векторов стационарных вероятностей имеют вид

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 \mathcal{R}^{i-1}, i \geq 2,$$

где матрица $\mathcal{R}$ есть минимальное неотрицательное решение матричного уравнения

$$\mathcal{R}^2 Q_2 + \mathcal{R} Q_1 + Q_0 = O,$$

а элементы векторов $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}_1$ вычисляются как единственное решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{p}_0 Q_{0,0} + \mathbf{p}_1 Q_{1,0} = 0,$$

$$\mathbf{p}_0 Q_{0,1} + \mathbf{p}_1 (Q_1 + \mathcal{R} Q_2) = 0,$$

$$\mathbf{p}_0 \boldsymbol{e} + \mathbf{p}_1 (I - \mathcal{R})^{-1} \boldsymbol{e} = 1.$$

Характеристики производительности. Вычислив стационарное распределение $\mathbf{p}_i, i \geq 0$, можно найти ряд вероятностных характеристик производительности системы. Приведем важнейшие из них:

– совместное распределение числа заданий в системах G_1 и G_2

$$p_{0,0} = \mathbf{p}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{JM_2}^T \end{pmatrix}, \quad p_{0,j} = \mathbf{p}_0 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{[1+(j-1)M_2]}^T \\ \boldsymbol{e}_{M_2} \\ \mathbf{0}_{(J-j)M_2}^T \end{pmatrix}, i = 0, j > 0,$$

$$p_{i,0} = \mathbf{p}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{M_1} \\ \mathbf{0}_{JM_1M_2}^T \end{pmatrix}, i > 0, \quad p_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{M_1[1+(j-1)M_2]}^T \\ \boldsymbol{e}_{M_1M_2} \\ \mathbf{0}_{(J-j)M_1M_2}^T \end{pmatrix}, i, j > 0;$$

– стационарное распределение числа заданий в системе G_1 $p_i = \mathbf{p}_i \boldsymbol{e}, i \geq 0$;

– среднее число заданий в системе G_1 $L_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i$;

– дисперсия числа заданий в системе G_1 $V_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_i - L_1^2$;

– стационарное распределение числа заданий в системе G_2 $q_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j}, j = \overline{0, J}$;

– среднее число заданий в системе G_2 $L_2 = \sum_{j=1}^{J} j q_j$;

– дисперсия числа заданий в системе G_1 $V_1 = \sum_{j=1}^{J} j^2 q_j - L_2^2$;

– вероятность того, что система G_1 пуста, $\boldsymbol{\kappa}_0 = \mathbf{p}_0 \boldsymbol{e}$;

– вектор-строка совместных вероятностей того, что в системе G_1 располагается $i > 0$ заданий и процесс обслуживания на приборе 1 находится в состоянии $m_1, m_1 = \overline{1, M_1}$,

$$\boldsymbol{\kappa}_i = \mathbf{p}_i \begin{pmatrix} I_{M_1} \\ I_{M_1} \otimes \boldsymbol{e}_{JM_2} \end{pmatrix}, i > 0;$$

– вероятность того, что система G_2 пуста,

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbf{p}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0}^T_{JM_2} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{M_1} \\ \mathbf{0}^T_{JM_1M_2} \end{pmatrix};$$

– вектор-строка совместных вероятностей того, что в системе G_2 располагается $j > 0$ заданий и процесс обслуживания на приборе 2 находится в состоянии $m_2, m_2 = \overline{1, M_2}$,

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{p}_0 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{M_2} \\ O_{(j-1)M_2 \times M_2} \\ I_{M_2} \\ O_{(J-j)M_2 \times M_2} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i \begin{pmatrix} O_{M_1 \times M_2} \\ O_{(j-1)M_1M_2 \times M_2} \\ \boldsymbol{e}_{M_1} \otimes I_{M_2} \\ O_{(J-j)M_1M_2 \times M_2} \end{pmatrix}, j = \overline{1, J};$$

– вероятность потерь $P_{loss} = \boldsymbol{\gamma}_J$.

Время пребывания запроса в системе. Рассмотрим задачу оценивания среднего времени пребывания запроса в системе с момента его поступления до момента выполнения и сборки всех заданий, соответствующих данному запросу. Обозначим это среднее как $\bar{V}$. Дальнейшие усилия направим на получение нижней и верхней границ для $\bar{V}$, при этом учтем следующие соображения:

1. $\bar{V}$ не меньше среднего значения максимального времени обслуживания $\bar{V}_{max,service}(G_1,G_2)$ в системах G_1 и G_2 заданий, принадлежащих одному и тому же запросу.

2. $\bar{V}$ не превышает среднего значения максимального времени пребывания заданий, принадлежащих одному и тому же запросу, $\bar{V}_{max,sojourn}(G_1,G_2)$, если предположить, что системы G_1 и G_2 независимы.

3. Среднее время пребывания в системе G_2 $\bar{V}(G_2)$ не превышает среднего времени пребывания $\bar{V}(\hat{G}_2)$ в аналогичной системе $\hat{G}_2$, имеющей бесконечный буфер.

4. Среднее время пребывания в системе G_1 $\bar{V}(G_1)$, где входной поток прорежен из-за конечного буфера в системе G_2, не превышает среднего времени пребывания в аналогичной системе $\hat{G}_1$ с бесконечным буфером и исходным входным потоком.

Из п. 1 следует неравенство

$$\bar{V} \geq \bar{V}_{max,service}(G_1,G_2). \tag{8}$$

Вычислим правую часть неравенства (8). Пусть ζ_k – случайная величина, равная времени обслуживания на приборе k, $k = 1,2$. Тогда среднее значение $\bar{V}_{max,service}(G_1,G_2)$ равно среднему значению случайной величины $\zeta = max\{\zeta_1,\zeta_2\}$. Учитывая, что времена обслуживания на приборах систем G_1 и G_2 являются независимыми случайными величинами, функция распределения $\Phi(t)$ случайной величины ζ находится как $\Phi(t) = Pr(\zeta < t) = Pr(\zeta_1 < t,\zeta_2 < t) = (1 - \boldsymbol{\beta}_1 e^{S_1 t}\boldsymbol{e})(1 - \boldsymbol{\beta}_2 e^{S_2 t}\boldsymbol{e})$. Выполнив ряд алгебраических преобразований, запишем следующую формулу для среднего значения случайной величины ζ:

$$\bar{V}_{max,service}(G_1,G_2) = \int_0^\infty t d\Phi(t) =$$

$$= [\boldsymbol{\beta}_1(-S_1)^{-1} + \boldsymbol{\beta}_2(-S_2)^{-1} + (\boldsymbol{\beta}_1 S_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2 S_2)(S_1 \oplus S_2)^{-2}]\boldsymbol{e}. \quad (9)$$

Из пп. 2–4 следуют неравенства

$$\bar{V} \le \bar{V}_{max,sojourn}(G_1,G_2) \le \bar{V}_{max,sojourn}(\hat{G}_1,\hat{G}_2). \quad (10)$$

Введенные выше системы $\hat{G}_1,\hat{G}_2$ являются системами $M/PH/1$, отличающимися только параметрами распределения времени обслуживания. Распределение времени обслуживания в системе $\hat{G}_k$ описывается неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}_k,S_k)$, $k = 1, 2$. Найдем верхнюю оценку $\bar{V}_{max,sojourn}(\hat{G}_1, \hat{G}_2)$ искомого среднего $\bar{V}$ как среднее максимума времен пребывания в системах $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$. Известно [18], что время пребывания в системе $M/PH/1$ имеет PH-распределение. Обозначим неприводимое представление этого распределения для системы $\hat{G}_k$ как (τ_k,T_k), $k = 1, 2$. Для вычисления верхней границы $\bar{V}_{max,sojourn}(\hat{G}_1,\hat{G}_2)$ воспользуемся рассуждениями, аналогичными рассуждениям при получении формулы (9). В результате запишем следующие соотношения:

$$\bar{V}_{max,sojourn}(\hat{G}_1,\hat{G}_2) = \int_0^\infty t d(1 - \boldsymbol{\tau}_1 e^{T_1 t} e)(1 - \boldsymbol{\tau}_2 e^{T_2 t} e) =$$

$$= [\boldsymbol{\tau}_1(-T_1)^{-1} + \boldsymbol{\tau}_2(-T_2)^{-1} + (\boldsymbol{\tau}_1 T_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_2 T_2)(T_1 \oplus T_2)^{-2}]\boldsymbol{e}. \quad (11)$$

Далее необходимо получить выражения для параметров τ_k, T_k, $k = 1, 2$, распределений времени пребывания в системах $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$. Поскольку все дальнейшие результаты по нахождению времени пребывания справедливы для любой системы $M/PH/1$, включая системы $\hat{G}_k$, $k = 1,2$, во избежание громоздких выражений будем опускать индекс k в обозначениях $\boldsymbol{\beta}_k, S_k, \tau_k, T_k$.

Согласно работе [18] при выводе выражений для параметров $\boldsymbol{\tau}, T$ используются блоки генератора цепи Маркова, описывающей функционирование системы $M/PH/1$ с PH-распределением времени обслуживания, заданным представлением M-го порядка $(\boldsymbol{\beta},S)$. Этот генератор имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_2 & O & O & \dots \\ A_0 & A_1 & A_2 & O & \dots \\ O & A_0 & A_1 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где

$$A_{0,0} = -\lambda I_M,\ A_0 = S_0\boldsymbol{\beta},\ A_1 = -\lambda I_M + S,\ A_2 = \lambda I_M.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\pi}_i$, $i \ge 0$, векторы стационарного распределения состояний системы в произвольный момент времени. Векторы $\boldsymbol{\pi}_i$, $i \ge 0$, вычисляются по алгоритму, аналогичному алгоритму 1, с минимальными изменениями. Для удобства читателя приведем этот алгоритм.

Алгоритм 2. Векторы стационарных вероятностей состояний системы $M/PH/1$ вычисляются по формуле

$$\boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_0 R^i,\ i \ge 1,$$

где матрица R – минимальное неотрицательное решение матричного уравнения

$$R^2A_0 + RA_1 + A_2 = O,$$

а вектор $\boldsymbol{\pi}_0$ является единственным решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{\pi}_0(A_{0,0} + RA_0) = 0,\ \boldsymbol{\pi}_0(I - R)^{-1}\boldsymbol{e} = 1.$$

Далее используем результаты статьи [18] для нахождения времени пребывания в системе массового обслуживания, работа которой описывается общим векторным процессом гибели и размножения. Модифицируя эти результаты для системы $M/PH/1$, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Время пребывания в рассматриваемой системе распределено по фазовому закону с неприводимым представлением* $(\boldsymbol{\tau},T)$, *где вектор-строка* $\boldsymbol{\tau}$ *и квадратная матрица* T *имеют порядок* M^2 *и вычисляются по формулам*

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\zeta}^T(I_M \otimes \widehat{\Delta}),\quad T = (A_1 + A_2) \otimes I_M + A_0 \otimes \widehat{\Delta}^{-1}\widehat{R}^T\widehat{\Delta}, \tag{12}$$

где

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1 \\ \boldsymbol{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\zeta}_M \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$\boldsymbol{\zeta}_l$ *– вектор-столбец порядка* M, l*-й элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю,* $\widehat{\Delta}$ *– диагональная матрица порядка* M, *диагональные элементы которой равны соответствующим элементам вектора*

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\pi}_0A_2[I + (A_1 + RA_0)^{-1}A_2]^{-1}\boldsymbol{e}\}^{-1}\boldsymbol{\pi}_0A_2(I - \widehat{R})^{-1}, \tag{14}$$

а матрица $\widehat{R}$ *вычисляется как*

$$\widehat{R} = -(A_1 + RA_0)^{-1}A_2. \tag{15}$$

Следствие 2. *Верхняя граница* $\bar{V}_{max,sojourn}(\widehat{G}_1, \widehat{G}_2)$ *вычисляется по формуле* (11), *где векторы* $\boldsymbol{\tau}_k$ *и матрицы* T_k, $k = 1, 2$, *определяются формулами* (12)–(15), *в которых все встречающиеся обозначения снабжены индексом* k.

Таким образом, из формул (8)–(11) следует, что нижняя и верхняя оценки среднего времени пребывания $\bar{V}$ в рассматриваемой fork-join-системе находятся из неравенств

$$[\boldsymbol{\beta}_1(-S_1)^{-1} + \boldsymbol{\beta}_2(-S_2)^{-1} + (\boldsymbol{\beta}_1S_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_2S_2)(S_1 \oplus S_2)^{-2}]\boldsymbol{e} \le \bar{V} \le$$
$$\le [\boldsymbol{\tau}_1(-T_1)^{-1} + \boldsymbol{\tau}_2(-T_2)^{-1} + (\boldsymbol{\tau}_1T_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_1 \otimes \boldsymbol{\tau}_2T_2)(T_1 \oplus T_2)^{-2}]e,$$

где векторы $\boldsymbol{\tau}_k$ и матрицы T_k, $k = 1,2$, определены в теореме 2 и следствии 2.

Заключение. В статье исследована система массового обслуживания со стационарным пуассоновским потоком и расщеплением и сборкой запросов. Каждый из поступающих запросов расщепляется на два задания, идущих в две подсистемы, каждая из которых состоит из обслуживающего прибора и буфера. Времена обслуживания заданий имеют PH-распределения с разными параметрами. Функционирование системы описано в терминах многомерной

цепи Маркова. Определено условие существования стационарного режима, предложены алгоритмы вычисления стационарного распределения и ряда стационарных характеристик производительности системы. Получены аналитические выражения для нижней и верхней границ среднего времени пребывания запроса в системе. Результаты исследования могут быть использованы для моделирования различных компьютерных и коммуникационных систем, в частности систем, в которых выполняются параллельные вычисления, обработка запросов в распределенных базах данных и параллельный доступ к диску.

References

1. Flatto L., Hahn S. Two parallel queues created by arrivals with two demands. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1984, vol. 44, pp. 1041–1053.

2. Nelson R., Tantawi A. N. Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues. *IEEE Transactions on Computers*, 1988, vol. 37, pp. 739–743.

3. Kim C., Agrawala A. K. Analysis of the fork-join queue. *IEEE Transactions on Computers*, 1989, vol. 38, pp. 250–255.

4. Qiu Z., Juan P., Harrison H. G. Beyond the mean in fork-join queues: Efficient approximation for response-time tails. *Performance Evaluation*, 2015, vol. 91, pp. 99–116.

5. Lui J. C.-S., Muntz R. R., Towsley D. *Computing Performance Bounds for Fork-Join Queueing Models*. Los Angeles, University of California, Computer Science Department, 1994, 38 p.

6. Varma S., Makowski A. M. Interpolation approximations for symmetric fork-join queues. *Performance Evaluation*, 1994, vol. 20, pp. 245–265.

7. Ko S.-S., Serfozo R. F. Response times in M/M/s fork-join networks. *Advances in Applied Probability*, 2004, vol. 36, pp. 854–871.

8. Ko S.-S., Serfozo R. F. Sojourn times in G/M/1 fork-join networks. *Naval Research Logistics*, 2008, vol. 55, pp. 432–443.

9. Thomasian A. Analysis of fork/join and related queueing systems. *ACM Computing Surveys*, 2014, vol. 47, pp. 1–71.

10. Wang W., Harchol-Balter M., Jiang H., Scheller-Wolf A., Srikant R. Delay asymptotics and bounds for multitask parallel jobs. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 2018, vol. 46, pp. 2–7.

11. Lee K., Shah N. B., Huang L., Ramchandran K. TheMDS queue: analysing the latency performance of erasure codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2017, vol. 63, pp. 2822–2842.

12. Rizk A., Poloczek F., Ciucu F. Stochastic bounds in fork-join queueing systems under full and partial mapping. *Queueing Systems*, 2016, vol. 83, pp. 261–291.

13. Baccelli F., Makowski A. M., Shwartz A. The fork-join queue and related systems with synchronization constraints: stochastic ordering and computable bounds. *Advances in Applied Probability*, 1989, vol. 21, pp. 629–660.

14. Balsamo S., Donatiello L., Van Dijk N. M. Bound performance models of heterogeneous parallel processing systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 1998, vol. 9, pp. 1041–1056.

15. Neuts M. F. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 1981, 352 p.

16. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. *The theory of queuing systems with correlated flows.* Springer, 2020, 430 p.

17. Graham A. *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. Ellis Horwood, Cichester, 1981, 130 p.

18. Ozawa T. Sojourn time distributions in the queue defined by a general QBD process. *Queueing Systems*, 2006, vol. 53, pp. 203–211.

Информация об авторе

Клименок Валентина Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прикладного вероятностного анализа, Белорусский государственный университет.
E-mail: klimenok@bsu.by

Information about the author

Valentina I. Klimenok, D. Sc. (Phys.-Math.), Prof., Chief Researcher of Laboratory of Applied Probability, Belarusian State University.
E-mail: klimenok@bsu.by