

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELING



УДК 519.6  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-111-120>

Оригинальная статья  
Original Paper

## Решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в нерегулярных двумерных областях

М. М. Чуйко<sup>1✉</sup>, О. М. Королёва<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси,  
ул. Сурганова, 11, Минск, 220072, Беларусь  
✉E-mail: [mikhail.chuiko@gmail.com](mailto:mikhail.chuiko@gmail.com)

<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет,  
пр. Независимости, 65, Минск, 220013, Беларусь

### Аннотация

**Цели.** Построение конечно-разностного вычислительного алгоритма решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона, заданной в нерегулярных двумерных областях.

**Методы.** Для решения задачи используются обобщенные криволинейные координаты. Физическая область отображается в расчетную (единичный квадрат) в пространстве обобщенных координат. Исходная задача записывается в обобщенных криволинейных координатах и аппроксимируется на равномерной сетке в расчетной области. Полученные результаты отображаются на неравномерную разностную сетку, сгенерированную в физической области.

**Результаты.** Построены аппроксимации второго порядка смешанных краевых условий Неймана – Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве обобщенных криволинейных координат. Для повышения порядка аппроксимаций условия Неймана используется аппроксимация уравнения Пуассона на границе области.

**Заключение.** Для решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в нерегулярных двумерных областях построен вычислительный алгоритм второго порядка точности с использованием обобщенных криволинейных координат. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие второй порядок точности вычислительного алгоритма.

**Ключевые слова:** эллиптический оператор, смешанные производные, обобщенные криволинейные координаты, краевая задача Неймана – Дирихле, конечно-разностные методы, разностные схемы

**Для цитирования.** Чуйко, М. М. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в нерегулярных двумерных областях / М. М. Чуйко, О. М. Королёва // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 111–120. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-111-120>

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

---

Поступила в редакцию | Received 02.03.2023  
Подписана в печать | Accepted 06.04.2023  
Опубликована | Published 29.06.2023

# Solution of the mixed boundary problem for the Poisson equation on two-dimensional irregular domains

Mikhail M. Chuiko<sup>1✉</sup>, Olga M. Korolyova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,  
st. Surganova, 11, Minsk, 220072, Belarus*

✉E-mail: mikhail.chuiko@gmail.com

<sup>2</sup>*Belarusian National Technical University,  
av. Nezavisimosty, 65, Minsk, 220013, Belarus*

## Abstract

**Objectives.** A finite-difference computational algorithm is proposed for solving a mixed boundary-value problem for the Poisson equation given in two-dimensional irregular domains.

**Methods.** To solve the problem, generalized curvilinear coordinates are used. The physical domain is mapped to the computational domain (unit square) in the space of generalized coordinates. The original problem is written in curvilinear coordinates and approximated on a uniform grid in the computational domain. The obtained results are mapped on non-uniform boundary-fitted difference grid in the physical domain.

**Results.** The second order approximations of mixed Neumann-Dirichlet boundary conditions for the Poisson equation in the space of generalized curvilinear coordinate are constructed. To increase the order of Neumann condition approximations, an approximation of the Poisson equation on the boundary of the domain is used.

**Conclusions.** To solve a mixed boundary value problem for the Poisson equation in two-dimensional irregular domains, the computational algorithm of second-order accuracy is constructed. The generalized curvilinear coordinates are used. The results of numerical experiments, which confirm the second order accuracy of the computational algorithm, are presented.

**Keywords:** elliptic operator, mixed derivatives, generalized curvilinear coordinates, Neumann – Dirichlet boundary problem, finite-difference methods, difference schemes

**For citation.** Chuiko M. M., Korolyova O. M. *Solution of the mixed boundary problem for the Poisson equation on two-dimensional irregular domains*. Informatika [Informatics], 2023, vol. 20, no. 2, pp. 111–120 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-111-120>

**Conflict of interest.** The authors declare of no conflict of interest.

**Введение.** Одним из подходов к приближенному решению уравнений в частных производных в областях сложной формы является введение обобщенных криволинейных координат, отображающих исходную область в физическом пространстве в параметрический квадрат в расчетном пространстве криволинейных координат [1]. Исходные уравнения преобразуются в новые независимые переменные и решаются в расчетном пространстве на прямоугольной разностной сетке, что позволяет использовать классические методы теории разностных схем. Построение невырожденного преобразования исходной области в параметрический квадрат в дискретном случае заключается в генерации в исходной области подходящей регулярной (четырёхугольной) разностной сетки. Одна из проблем такого подхода – усложнение исходных уравнений в связи с появлением смешанных производных. Для решения этой проблемы необходимо разработать и использовать монотонные консервативные разностные схемы.

Консервативные разностные схемы для уравнений со смешанными производными были предложены А. А. Самарским и В. Б. Андреевым [2, 3]. В более поздних работах А. А. Самарского, П. П. Матуса, Г. И. Шишкина [3–5] для эллиптических и параболических уравнений со смешанными производными были разработаны монотонные разностные методы на основе двух консервативных схем [2]. Построенные вычислительные алгоритмы удовлетворяют одновременно свойствам монотонности и консервативности, только если коэффициенты при смешанных производных либо положительные, либо отрицательные.

В работе [6] для эллиптических и параболических уравнений со знакопеременными коэффициентами при смешанных производных построены разностные схемы второго порядка аппроксимации, удовлетворяющие одновременно свойствам монотонности и консервативности. Свой-

ство монотонности гарантирует хорошую обусловленность системы линейных алгебраических уравнений, так как элементы матрицы удовлетворяют свойству диагонального преобладания, а свойство консервативности гарантирует выполнение законов сохранения при преобразовании координат.

При задании краевых условий Неймана важно сохранить второй порядок аппроксимации по пространственным переменным. Для повышения порядка аппроксимации условий Неймана используются два подхода. Первый подход заключается в построении разностных сеток с фиктивными узлами и аппроксимации краевых условий с выходом за границу области [7, 8], второй подход – в использовании аппроксимации исходного уравнения на границе области.

В настоящей работе для решения в сложных двумерных областях краевой задачи Неймана – Дирихле для уравнения Пуассона используется переход к обобщенной криволинейной системе координат. Повышение порядка аппроксимации краевых условий Неймана до второго производится с привлечением аппроксимации уравнения Пуассона на границе области.

**Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение Пуассона в нерегулярной двумерной области  $\Omega_{xy}$  с граничными условиями первого и второго рода:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad (1)$$

$$u(x, y)|_{\Gamma_1} = u_0(x, y), \quad \Gamma_1 \in \partial\Omega_{xy}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2} = \mu(x, y), \quad \Gamma_2 \in \partial\Omega_{xy} - \Gamma_1, \quad (3)$$

где  $\partial\Omega_{xy}$  – граница области  $\Omega_{xy}$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к границе. Краевые условия (2), (3) могут соответствовать, например, заданному распределению температуры на участке  $\Gamma_1$  границы  $\partial\Omega_{xy}$  и заданному тепловому потоку на участке  $\Gamma_2$ .

Численное решение задач в областях сложной формы удобно искать в криволинейной системе координат, координатные линии которых совпадают с границами области [1]. Введем в рассмотрение некоторое расчетное пространство  $\Omega_{\xi\eta}$ , в котором определена криволинейная система координат  $(\xi, \eta)$ . Предположим, что существует невырожденное взаимно однозначное преобразование  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ , отображающее физическую область произвольной формы  $\Omega_{xy}$  в прямоугольник  $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi, \eta < 1\}$  в плоскости обобщенных криволинейных координат  $(\xi, \eta)$ .

Краевую задачу (1)–(3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = |J^{-1}| \tilde{f}(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \quad (4)$$

$$u(\xi, \eta) = \tilde{u}_0(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{1,\xi\eta}, \quad (5)$$

$$B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = 0, 1, \quad (6)$$

$$B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \eta = 0, 1, \quad (7)$$

где

$$B_{11} = \frac{g_{22}}{|J^{-1}|}, \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{g_{12}}{|J^{-1}|}, \quad B_{22} = \frac{g_{11}}{|J^{-1}|},$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$|J^{-1}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}.$$

**Аппроксимация краевых условий.** В расчетной прямоугольной области  $\Omega_{\xi\eta}$  введем равномерную по обоим направлениям разностную сетку  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ :

$$\bar{\omega}_h = \left\{ (\xi_i, \eta_j), \quad \xi_i = ih_1, \quad i = \overline{0, N}, \quad \xi_N = 1, \quad \eta_j = jh_2, \quad j = \overline{0, M}, \quad \eta_M = 1 \right\},$$

где  $\omega_h$  – множество внутренних узлов,  $\gamma_h$  – множество граничных узлов. На разностной сетке  $\omega_h$  аппроксимируем выражение (4) следующей разностной схемой [6]:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Lambda_{\alpha\beta} u = |J^{-1}| \tilde{f}, \quad (8)$$

$$\Lambda_{11} u = (\beta_{11} u_{\xi})_{\xi}, \quad \Lambda_{22} u = (\beta_{22} u_{\eta})_{\eta}, \quad (9)$$

$$\Lambda_{12} u = \frac{1}{2} \left( (\beta_{12}^- u_{\bar{\eta}})_{\xi} + (\beta_{12}^- u_{\eta})_{\bar{\xi}} + (\beta_{12}^+ u_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^+ u_{\bar{\eta}})_{\bar{\xi}} \right), \quad (10)$$

$$\Lambda_{21} u = \frac{1}{2} \left( (\beta_{21}^- u_{\bar{\xi}})_{\eta} + (\beta_{21}^- u_{\xi})_{\bar{\eta}} + (\beta_{21}^+ u_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^+ u_{\bar{\xi}})_{\bar{\eta}} \right), \quad (11)$$

где  $\beta^{\pm} = 0,5(\beta \pm |\beta|)$ .

В граничных узлах  $(\xi_i, \eta_j) \in \gamma_1$  с заданными условиями первого рода краевые условия аппроксимируются точно:  $u_{ij} = \tilde{u}_0(\xi_i, \eta_j)$ .

Рассмотрим аппроксимацию краевых условий второго рода. Так, для  $\eta=0$  из равенства (7) получим

$$B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -g_{11}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, 0), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2, \xi\eta}, \quad \eta = 0. \quad (12)$$

Аппроксимируем (12) следующим образом:

$$\left( \beta_{21} u_{\xi} + \beta_{22} u_{\eta} \right)_{i,0} = \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{h_2}{2} \left( B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \right)_{i,0} + O(h_1^2 + h_2^2). \quad (13)$$

Рассмотрим способ повышения порядка аппроксимации граничного условия (12), используя для этого уравнение (4) на границе. Запишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial B_{21}}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial B_{22}}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = |J^{-1}| \tilde{f}(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}. \quad (14)$$

Выразим значение  $B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$  из (14) и подставим его в выражение (13). В результате получим равенство

$$\begin{aligned} & \left( \beta_{21} u_{\xi}^0 + \beta_{22} u_{\eta} \right)_{i,0} + \frac{h_2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial B_{21}}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial B_{22}}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \tilde{f} \right)_{i,0} = \\ & = \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i,0} + O(h_1^2 + h_2^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Аппроксимируем дифференциальные слагаемые в левой части равенства (15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{i,0} &= \left( (\beta_{11,i-1/2,1} u_{\xi}^-)_{\xi} \right)_{i,0} + O(h_1^2), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i,0} &= \left( (\beta_{12}^+ u_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^- u_{\eta})_{\bar{\xi}} \right)_{i,0} + O(h_1 + h_2), \\ \left( \frac{\partial B_{21}}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{i,0} &= \left( \beta_{21,\eta} u_{\xi}^0 \right)_{i,0} + O(h_1^2 + h_2), \\ \left( B_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{i,0} &= \left( \beta_{21,i,1/2}^+ u_{\xi\eta} + \beta_{21,i,1/2}^- u_{\bar{\xi}\eta} \right)_{i,0} + O(h_1 + h_2), \\ \left( \frac{\partial B_{22}}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i,0} &= \left( \beta_{22,\eta} u_{\eta} \right)_{i,0} + O(h_2) \end{aligned}$$

и запишем (14) в виде

$$\begin{aligned} & \left( \beta_{21} u_{\xi}^0 + \beta_{22} u_{\eta} \right)_{i,0} + \\ & + \frac{h_2}{2} \left( (\beta_{11,i-1/2,1} u_{\xi}^-)_{\xi} + (\beta_{12}^+ u_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^- u_{\eta})_{\bar{\xi}} + \beta_{21,\eta} u_{\xi}^0 + \beta_{21,i,1/2}^+ u_{\xi\eta} + \beta_{21,i,1/2}^- u_{\bar{\xi}\eta} + \beta_{22,\eta} u_{\eta} + \tilde{f} \right)_{i,0} = \\ & = \left( B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{i,0} + O(h_1^2 + h_2^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Сгруппируем слагаемые в уравнении (16):

$$\begin{aligned} & \left( \left( \beta_{22} + \frac{h_2}{2} \beta_{22,\eta} \right) u_{\eta} \right)_{i,0} = \beta_{22,i,1/2} u_{\eta,i,0}, \\ & \left( \beta_{21} + \frac{h_2}{2} \beta_{21,\eta} \right) u_{\xi,i,0}^0 + \frac{h_2}{2} \left( \beta_{21}^+ u_{\xi\eta} + \beta_{21}^- u_{\bar{\xi}\eta} \right)_{i,0} = \\ & = \left( \beta_{21}^+ + \beta_{21}^- \right)_{i,1/2} \frac{(u_{\bar{\xi}} + u_{\xi})_{i,0}}{2} + \beta_{21,i,1/2}^+ \frac{u_{\xi,i,1} - u_{\xi,i,0}}{2} + \beta_{21,i,1/2}^- \frac{u_{\bar{\xi},i,1} - u_{\bar{\xi},i,0}}{2} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \beta_{21,i,1/2}^+ (u_{\xi,i,1} + u_{\bar{\xi},i,0}) + \beta_{21,i,1/2}^- (u_{\bar{\xi},i,1} + u_{\xi,i,0}) \right), \end{aligned}$$

где

$$\beta_{22,i,1/2} = 0,5(\beta_{22,i,0} + \beta_{22,i,1}), \quad \beta_{21,i,1/2} = 0,5(\beta_{21,i,0} + \beta_{21,i,1}).$$

В результате получим аппроксимацию второго порядка для граничного условия (12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\beta_{21,i,1/2}^+(u_{\xi,i,1} + u_{\bar{\xi},i,0}) + \beta_{21,i,1/2}^-(u_{\bar{\xi},i,1} + u_{\xi,i,0})) + \beta_{22,i,1/2}u_{\eta,i,0} + \\ & + \frac{h_2}{2}((\beta_{11,i-1/2,0}u_{\bar{\xi}})_{\xi} + (\beta_{12}^+u_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^-u_{\eta})_{\bar{\xi}})_{i,0} = \left(-\mu g_{11}^{1/2} + \frac{h_2}{2}\tilde{f}\right)_{i,0}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом строятся аппроксимации краевых условий Неймана для других участков границы криволинейного четырехугольника.

Так, краевое условие

$$B_{21}\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22}\frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2}\tilde{\mu}(\xi, 1), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \eta = 1,$$

аппроксимируем с помощью выражения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\beta_{21,i,M-1/2}^+(u_{\bar{\xi},i,M-1} + u_{\xi,i,M}) + \beta_{21,i,M-1/2}^-(u_{\xi,i,M-1} + u_{\bar{\xi},i,M})) + \beta_{22,i,N-1/2}u_{\bar{\eta},i,M} - \\ & - \frac{h_2}{2}((\beta_{11,i-1/2,M}u_{\bar{\xi}})_{\xi} + (\beta_{12}^+u_{\bar{\eta}})_{\xi} + (\beta_{12}^-u_{\bar{\eta}})_{\bar{\xi}})_{i,M} = \left(\mu g_{11}^{1/2} - \frac{h_2}{2}\tilde{f}\right)_{i,M}, \end{aligned}$$

а краевые условия

$$B_{11}\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -g_{22}^{1/2}\tilde{\mu}(0, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = 0,$$

и

$$B_{11}\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2}\tilde{\mu}(1, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = 1, \quad -$$

с помощью разностных соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\beta_{12,1/2,j}^+(u_{\eta,1,j} + u_{\bar{\eta},0,j}) + \beta_{12,1/2,j}^-(u_{\eta,0,j} + u_{\bar{\eta},1,j})) + \beta_{11,1/2,j}u_{\xi,0,j} + \\ & + \frac{h_1}{2}((\beta_{22,0,j-1/2}u_{\bar{\eta}})_{\eta} + (\beta_{21}^+u_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^-u_{\xi})_{\bar{\eta}})_{0,j} = \left(-\mu g_{22}^{1/2} + \frac{h_1}{2}\tilde{f}\right)_{0,j} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\beta_{12,N-1/2,j}^+(u_{\eta,N,j} + u_{\bar{\eta},N-1,j}) + \beta_{12,N-1/2,j}^-(u_{\bar{\eta},N,j} + u_{\eta,N-1,j})) + \beta_{11,N-1/2,j}u_{\xi,N,j} - \\ & - \frac{h_1}{2}((\beta_{22,N,j-1/2}u_{\bar{\eta}})_{\eta} + (\beta_{21}^-u_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^+u_{\xi})_{\bar{\eta}})_{N,j} = \left(\mu g_{22}^{1/2} - \frac{h_1}{2}\tilde{f}\right)_{N,j} \end{aligned}$$

соответственно.

**Численный эксперимент.** Проверка алгоритма проводилась на точном решении  $u(x, y) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L_1}\right)\cos\left(\frac{2\pi y}{L_2}\right)$  в областях  $\Omega_{1,xy}, \Omega_{2,xy}$ , где  $L_1, L_2$  – размеры области по  $x$  и  $y$  соот-

ответственно. На рис. 1 изображены разностные сетки  $32 \times 32$ , построенные в областях  $\Omega_{1,xy}$ ,  $\Omega_{2,xy}$  и в расчетной области  $\Omega_{\xi\eta}$ . Матрица системы линейных алгебраических уравнений имеет специальную структуру и является девятидиагональной. Для решения системы уравнений использован модифицированный сильно неявный метод MSIM [9]. В качестве начального приближения решение во всех узлах задавалось нулевым. Критерием окончания итерационного процесса являлось выполнение условия

$$\left| u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m \right| < \varepsilon_1 \left| u_{ij}^m \right| + \varepsilon_2, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}.$$

На рис. 2 показаны примеры численного решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона.

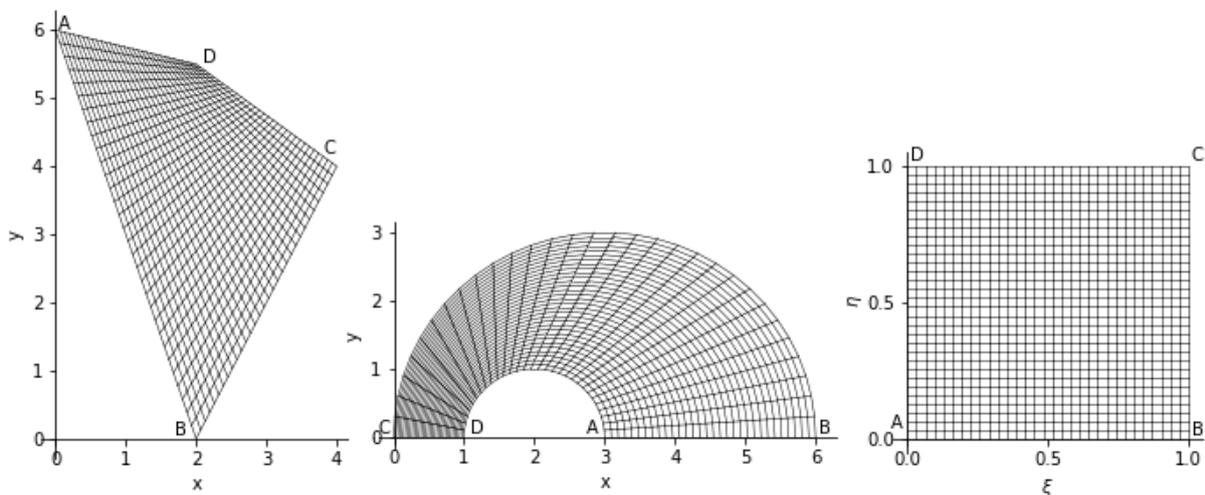


Рис. 1. Физические области  $\Omega_{1,xy}$ ,  $\Omega_{2,xy}$  и расчетная область  $\Omega_{\xi\eta}$

Fig. 1. Physical domains  $\Omega_{1,xy}$ ,  $\Omega_{2,xy}$  and computational domain  $\Omega_{\xi\eta}$

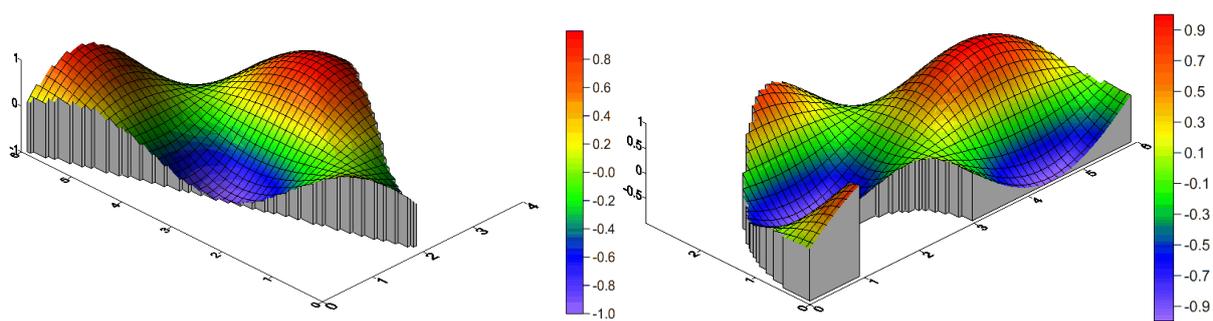


Рис. 2. Численное решение на сетке  $32 \times 32$

Fig. 2. Numerical solution on grid  $32 \times 32$

Абсолютные погрешности  $z^N = \max |u_{ij} - u(x_{ij}, y_{ij})|$  разностного решения на последовательности разностных сеток  $N \times N$  для различных способов задания смешанных краевых условий на границах областей приведены в таблице. В фигурных скобках даны количества итераций метода MSIM для достижения заданной точности. Результаты численных экспериментов подтверждают второй порядок точности алгоритма. Уменьшение шагов сетки приводит к увеличению числа итераций. Анализ эффективности итерационной реализации разностных схем (в том

числе и используемой разностной схемы (8)–(11)), аппроксимирующих уравнение эллиптического типа со смешанными производными второго порядка в методе фиктивных областей, проведен в работе [10].

Погрешности для задач Дирихле (I) и Неймана (II) с различными способами задания граничных условий  
*Errors for the Dirichlet (I) and Neumann (II) problems with different setting boundary conditions*

Краевое условие <i>Boundary condition</i>	$\Omega_{1,xy}$			$\Omega_{2,xy}$		
	$16 \times 16$	$32 \times 32$	$64 \times 64$	$16 \times 16$	$32 \times 32$	$64 \times 64$
I на ABCD	0,01032 {18}	0,00244 {54}	0,00058 {180}	0,06310 {15}	0,01414 {44}	0,00341 {141}
II на AB ( $\eta=0$ )	0,02234 {26}	0,00523 {80}	0,00130 {263}	0,05475 {21}	0,01253 {68}	0,00303 {226}
II на DC ( $\eta=1$ )	0,01250 {33}	0,00288 {108}	0,00074 {361}	0,06310 {15}	0,01414 {45}	0,00341 {142}
II на AD ( $\xi=0$ )	0,01042 {21}	0,00245 {65}	0,00066 {217}	0,06549 {27}	0,01484 {93}	0,00359 {320}
II на BC ( $\xi=1$ )	0,02303 {25}	0,00538 {81}	0,00130 {280}	0,07113 {32}	0,01550 {99}	0,00366 {297}
II кроме A, B, C, D	0,04624 {129}	0,01136 {527}	0,00293 {2019}	0,06581 {143}	0,01506 {606}	0,00391 {2266}

На рис. 3 показаны отклонения приближенного решения от точного первой краевой задачи и смешанной краевой задачи в области  $\Omega_{2,xy}$  на сетке  $64 \times 64$ .

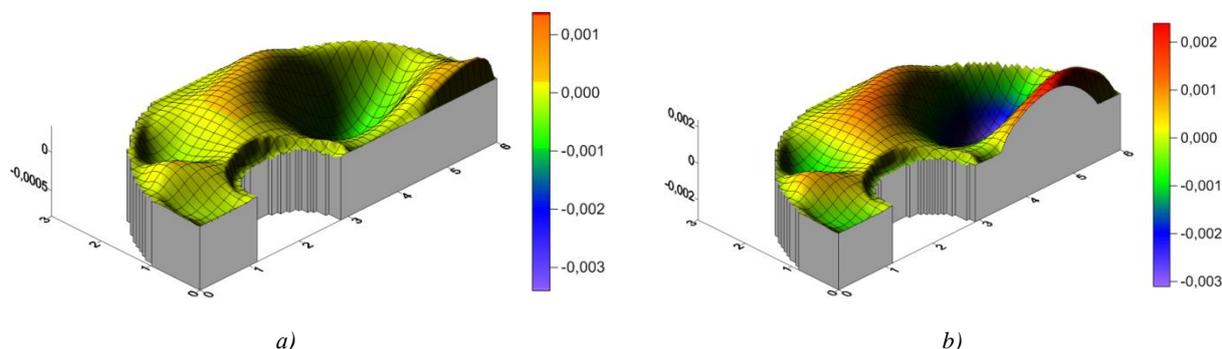


Рис. 3. Отклонения приближенного решения от точного в области  $\Omega_{2,xy}$  :  
a) первой краевой задачи; b) смешанной краевой задачи

Fig. 3. Deviations of the approximate solution from the exact one in the domain  $\Omega_{2,xy}$  :  
a) first boundary value problem; b) mixed boundary problem

Построенные в статье аппроксимации краевых условий допускают одновременное задание условий обоих типов на сторонах криволинейного четырехугольника. Так, в случае смешанной краевой задачи (рис. 3, b) условия Неймана задавались на участке  $3,5 < x < 5,5, y=0$  стороны AB криволинейного четырехугольника ABCD. На остальной части границы области  $\Omega_{2,xy}$  задавались краевые условия Дирихле.

**Заключение.** В работе реализованы разностные схемы для решения смешанной задачи Неймана – Дирихле для уравнения Пуассона в сложных двумерных областях на неортогональных разностных сетках с фиксированными узлами, аппроксимирующие дифференциальную задачу второго порядка. Построены аппроксимации граничного условия Неймана второго порядка.

При построении вычислительного алгоритма использовался переход к обобщенной криволинейной системе координат. На дискретном уровне переход к криволинейной системе координат требует генерации в исходной нерегулярной области подходящей четырехугольной разностной сетки.

Для решения полученных систем девятиточечных разностных уравнений реализован вычислительный алгоритм модифицированного сильно неявного метода MSIM. Проведены численные эксперименты по сравнению аппроксимаций различных краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в нерегулярных двумерных областях. Результаты экспериментов подтверждают второй порядок точности предложенного вычислительного алгоритма.

**Вклад авторов.** М. М. Чуйко построил аппроксимации второго порядка краевых условий Неймана в нерегулярной двумерной области с использованием обобщенных криволинейных координат. О. М. Королёва программно реализовала вычислительный алгоритм решения задачи Пуассона в криволинейных координатах, провела серию численных экспериментов, подтвердивших второй порядок точности вычислительного алгоритма.

### Список использованных источников

1. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей : пер. с англ. / К. Флетчер. – М. : Мир, 1991. – 295 с.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1997. – 380 с.
3. Самарский, А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М. : Наука, 1976. – 352 с.
4. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными / А. А. Самарский [и др.] // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 2. – С. 17–26.
5. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives / A. Samarskii [et al.] // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2002. – Vol. 44. – P. 501–510. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(02\)00164-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00164-5)
6. Matus, P. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives / P. Matus, I. Rybak // *Computational Methods in Applied Mathematics*. – 2009. – Vol. 4, no. 4. – P. 494–505. <https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0027>
7. Matus, P. Monotone and economical difference schemes on nonuniform grids for multidimensional parabolic equations with boundary condition of third kind / P. Matus, G. Martynkevich // *Computational Methods in Applied Mathematics*. – 2004. – Vol. 4, no. 3. – P. 350–367. <https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0019>
8. Monotone finite difference schemes for quasilinear parabolic problems with mixed boundary conditions / F. J. Gaspar [et al.] // *Computational Methods in Applied Mathematics*. – 2016. – Vol. 16, no. 2. – P. 231–244. <https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0002>
9. Schneider, G. E. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem / G. E. Schneider, M. Zedan // *Numerical Heat Transfer*. – 1981. – Vol. 4. – P. 1–19.
10. Волков, В. М. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Прокопина // *Журнал Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика*. – 2019. – № 1. – С. 69–76. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-69-7>

---

### References

1. Fletcher C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2*. Springer, 1988, 494 p.
2. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnyh shem. The Theory of Difference Schemes*. Moscow, Nauka, 1997, 380 p.
3. Samarskii A. A., Andreev V. B. *Raznostnye metody dlja elipticheskikh uravnenij. Difference Methods for Elliptic Equations*. Moscow, Nauka, 1976, 352 p. (In Russ.).
4. Samarskii A. A., Mazhukin V. I., Matus P. P., Shishkin G. I. *Monotone difference schemes for equation with mixed derivatives*. *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulation]*, 2001, vol. 13, no. 2, pp. 17–26 (In Russ.).
5. Samarskii A., Matus P., Mazhukin V., Mozolevski I. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives. *Computers and Mathematics with Applications*, 2002, vol. 44, pp. 501–510. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(02\)00164-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00164-5)
6. Matus P., Rybak I. Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2009, vol. 4, no 4, pp. 494–505. <https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0027>

7. Matus P., Martsynkevich G. Monotone and economical difference schemes on nonuniform grids for multidimensional parabolic equations with boundary condition of third kind. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2004, vol. 4, no. 3, pp. 350–367. <https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0019>

8. Gaspar F. J., Lisbona F. J., Matus P., Tuyen V. T. K. Monotone finite difference schemes for quasilinear parabolic problems with mixed boundary conditions. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 231–244. <https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0002>

9. Schneider G. E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem. *Numerical Heat Transfer*, 1981, vol. 4, pp. 1–19.

10. Volkov V. M., Prokonina E. V. *Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives*. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics], 2019, no. 1, pp. 69–76 (In Russ.). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-69-76>

### Информация об авторах

Чуйко Михаил Матвеевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительной математики, Институт математики НАН Беларуси.

E-mail: mikhail.chuiko@gmail.com

Королёва Ольга Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет.

E-mail: korolyovaola@gmail.com

### Information about the authors

Mikhail M. Chuiko, Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Researcher of the Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus.

E-mail: mikhail.chuiko@gmail.com

Olga M. Korolyova, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University.

E-mail: korolyovaola@gmail.com