

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## MATHEMATICAL MODELING



УДК 004.942, 519.876.5  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-3-86-100>

Оригинальная статья  
Original Paper

### Форсированное управление движением мобильного робота

Т. Ю. Ким<sup>1✉</sup>, Г. А. Прокопович<sup>1</sup>, А. А. Лобатый<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси,  
ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Беларусь  
✉E-mail: [tatyana\\_kim92@mail.ru](mailto:tatyana_kim92@mail.ru)

<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет,  
пр. Независимости, 65, Минск, 220013, Беларусь

#### Аннотация

**Цели.** Требуется повысить эффективность работы отдельного транспортного мобильного робота на складе за счет оптимизации регулирования скорости его передвижения. Для этого необходимо регулировать положение, скорость, ускорение и направление движения мобильного робота в каждый момент времени по известному маршруту. Предложена методика форсированного управления движением транспортного мобильного робота. На ее основе в среде Simulink разработан блок управления различными маневрами движений робота, который вычисляет его расстояние до ближайшей точки поворота или останова и на основании построенной циклограммы определяет соответствующую скорость в каждый момент времени. Блок управления может быть использован в практических приложениях, требующих оптимального управления движением транспортных роботов по заранее известной местности.

**Методы.** Применяется метод теории оптимального управления по критерию максимального быстродействия, волновой алгоритм для поиска кратчайшего пути и метод конечных автоматов для релейного управления ускорением движения.

**Результаты.** На основе предложенной методики форсированного управления движением транспортного мобильного робота в среде Simulink разработана система управления маневрами, обеспечивающая минимальное время прохождения на каждом отрезке пути. Под маневрами подразумеваются прямолинейное движение робота, а также его разворот на месте в двух режимах: с выходом на максимальную скорость и без выхода. Методика строится на предположении, что движение транспортного робота равномерноускоренное. Дополнительным результатом разработанной системы управления является то, что при ее масштабировании на группу роботов появляется возможность спрогнозировать время и место их потенциальных столкновений (коллизий), чтобы впоследствии учитывать это для эффективного управления уже группой роботов.

**Заключение.** Разработанная система может быть использована для управления реальным транспортным мобильным роботом, оснащенным сервоприводом, при решении задач перевозки грузов по складу.

**Ключевые слова:** транспортный мобильный робот, дифференциальный привод, форсированное управление, моделирование движения, равноускоренное движение

Для цитирования. Ким, Т. Ю. Форсированное управление движением мобильного робота / Т. Ю. Ким, Г. А. Прокопович, А. А. Лобатый // Информатика. – 2022. – Т. 19, № 3. – С. 86–100.  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-3-86-100>

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 01.07.2022

Подписана в печать | Accepted 10.08.2022

Опубликована | Published 29.09.2022

## Forced motion control of a mobile robot

Tatyana Yu. Kim<sup>1</sup>, Ryhor A. Prakapovich<sup>1</sup>, Alexander A. Lobatiy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*The United Institute of Informatics Problems  
of the National Academy of Sciences of Belarus,  
st. Sarganova, 6, Minsk, 220012, Belarus*

✉E-mail: [tatyana\\_kim92@mail.ru](mailto:tatyana_kim92@mail.ru)

<sup>2</sup>*Belarusian National Technical University,  
av. Nezavisimosti, 65, Minsk, 220013, Belarus*

### Abstract

**Objectives.** The increase of the efficiency of a separate transport mobile robot in a warehouse due to optimal regulation of the speed of its movement. It is required to control the position, speed, acceleration and direction of movement of the mobile robot at each moment of time along a known route. A method for forced control of the movement of a transport mobile robot was proposed. A control block for various motion maneuvers was developed in Simulink environment, which calculates the distance to the nearest turning point or stop and then by constructed cyclogram the corresponding speed at each moment of time is determined. The proposed control unit can be used in practice for the tasks of optimal movement of transport robots in predetermined area.

**Methods.** The method of the theory of optimal control according to the criterion of maximum speed, the wave algorithm for finding the shortest path, the method of finite automata for relay control of the acceleration of movement are used.

**Results.** Based on the proposed method of forced control of the movement of a transport mobile robot in the Simulink environment, a maneuver control system was developed that provides the minimum travel time for each segment of the path. Maneuvers mean the rectilinear movement of the robot, as well as its turn on the spot, in two modes: with and without reaching maximum speed. The technique is based on the assumption that the movement of the transport robot is uniformly accelerated. A side result of the developed control system is that when it is scaled to a group of robots, it becomes possible to predict the time and place of their potential collisions, in order to subsequently take into account a group of robots for effective control.

**Conclusion.** The developed control system can be used to control a real transport mobile robot equipped with a servo drive in solving the problems of transporting goods around the warehouse.

**Keywords:** transport mobile robot, differential drive, forced control, kinematic modeling, uniformly accelerated motion

**For citation.** Kim T. Yu., Prakapovich R. A. Lobatiy A. A. *Forced motion control of a mobile robot.* Informatika [Informatics], 2022, vol. 19, no. 3, pp. 86–100 (In Russ.).  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-3-86-100>

**Conflict of interest.** The authors declare of no conflict of interest.

**Введение.** За последние десятилетия увеличился научно-практический интерес мировых компаний к транспортным мобильным роботам (ТМР), которые стали неотъемлемой частью современных логистических систем [1]. Благодаря преимуществам современных сенсорных и вычислительных систем ТМР могут быть внедрены практически в любой производственный процесс, сопряженный с необходимостью тесной работы с персоналом, в том числе в складских помещениях достаточно большой площади.

Сферой применения складских мобильных роботов являются сортировочные склады предприятий, занимающихся электронной коммерцией, или автомобилестроение, производственные процессы которого требуют операций с большим числом деталей. Например, автоматизированные ТМР способны автономно совершать погрузку паллет на территории склада, перемещать тяжелые грузы или осуществлять сборку деталей, что заменяет рутинный человеческий труд. Такие роботы универсальны, могут транспортировать различные предметы, прерываясь только для подзарядки. В результате внедрения мобильных роботов значительно повышается эффективность производственных процессов.

Поскольку на складе, как правило, работает несколько роботов, важно обеспечить не только корректную навигацию внутри склада, но и максимальную скорость их передвижения, исключив при этом столкновения между роботами и другими объектами. Для этого ТМР должны передвигаться в помещениях с максимально возможной скоростью по нанесенным на пол магнитным (или цветоконтрастным) лентам или специальным меткам в виде QR-кодов. Отметим, что складское помещение чаще всего представляет собой прямоугольник с рядами многоярусных стеллажей.

Для управления ТМР обычно используются промышленные контроллеры электроприводов на базе метода векторного управления. Современные промышленные контроллеры гарантируют быстрое действие, точность выполнения задаваемых команд и отлаженность действий. В связи с этим перед системами управления верхнего уровня стоит задача определения оптимальной скорости движения ТМР в каждый момент времени.

Целью настоящей работы является повышение эффективности работы ТМР на складе за счет минимизации затраченного времени, которая достигается благодаря оптимальному регулированию скорости его движения при различных маневрах.

**Форсированное управление при прямолинейном движении.** Как правило, математическая постановка задачи управления движением мобильного робота сводится к решению обратной задачи кинематики его транспортной платформы [2]. Имеется ряд работ [3, 4], предлагающих различные подходы к реализации оптимальных систем управления техническими системами по комплексным критериям. В настоящей статье рассматривается задача оптимального управления минимизацией времени движения, не учитывающая энергетические затраты. В основу предлагаемого решения задачи был положен метод форсированного управления [5], который характеризуется наличием детерминированных начального и конечного состояний объекта управления без случайных возмущений и с учетом ограничений на максимальное значение управления. Указанные допущения совпадают с условиями использования современных ТМР в безлюдных логистических складах.

На рис. 1 изображена типовая траектория движения ТМР по заранее известному складскому помещению, заданному в виде последовательности координат. Как правило, для экономии места радиус поворота ТМР сводится практически к нулю, т. е. поворот робота происходит на месте. В связи с этим представим траекторию движения ТМР как набор прямолинейных отрезков  $S_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

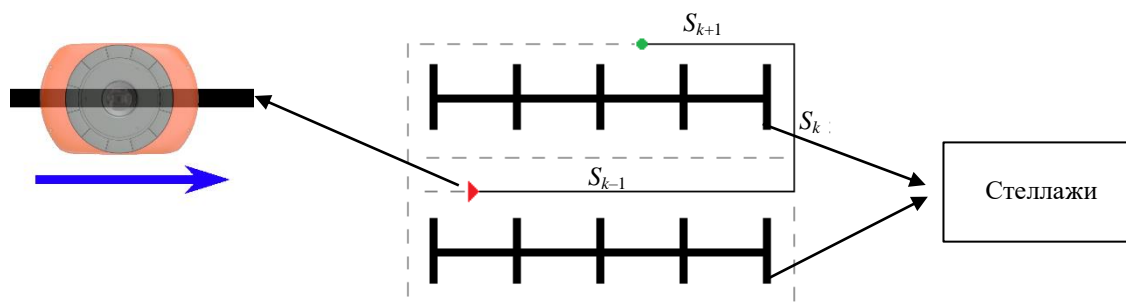


Рис. 1. Траектория движения мобильного робота на основе математической модели

Fig. 1. Movement trajectory of a mobile robot based on a mathematical model

Предположим, что движение ТМР является равноускоренным. Рассмотрим типичную циклограмму его движения вдоль прямой на расстояние  $S_k$ . Чтобы преодолеть указанное расстояние, робот должен пройти этап разгона, движения с допустимой или максимальной скоростью и в процессе этапа торможения снизить набранную скорость до нуля (рис. 2, а). Следовательно, процесс прохождения требуемого отрезка можно представить в виде суммы трех последовательных режимов, состоящих из трех отрезков:

$$S_k = S_{k1} + S_{k2} + S_{k3}, \quad (1)$$

где  $S_k$  – расстояние, которое должен проехать робот;  $S_{k1}$  – отрезок пути, пройденный в режиме ускорения,  $S_{k2}$  – в режиме равномерного движения и  $S_{k3}$  – в режиме торможения.

Для каждого расстояния  $S_k$  требуется рассчитать длины отрезков из формулы (1) и соответствующие им временные интервалы. Зададим ограничения для ТМР: ускорение разгона  $a_a$  и торможения  $a_b$ , а также максимальную скорость  $V_{\max}$ , которую робот может достичь или которая является максимально допустимой в конкретном технологическом процессе на обслуживаемом производстве. Тогда согласно закону изменения скорости материальной точки на каждом из отрезков  $S_{k1}$ ,  $S_{k2}$  и  $S_{k3}$  будут видны соответствующие характерные особенности функций скорости  $V(t)$  и ускорения  $a(t)$  (рис. 2, а).

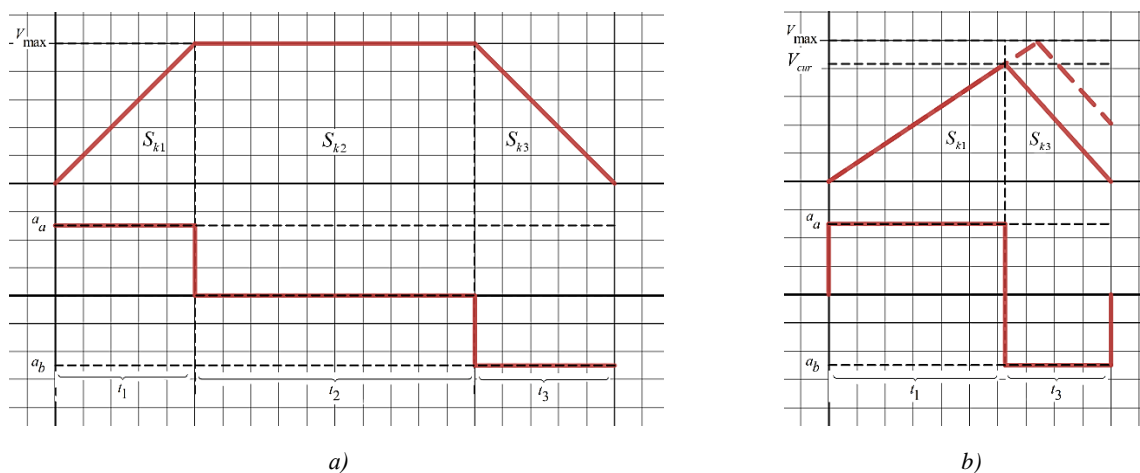


Рис. 2. Графики изменения скорости и ускорения ТМР при следующих условиях: а) робот успевает выйти на постоянную скорость; б) режим разгона резко сменяется на режим торможения

Fig. 2. Graph of the change in speed and acceleration of TMR under the condition: a) the robot manages to reach a constant speed; b) acceleration mode abruptly changes to deceleration mode

Рассмотрим движение робота как движение материальной точки. Этот процесс можно описать уравнениями равноускоренного движения на каждом из отрезков пути:

$$\dot{S}(t) = V(t), \quad S(t_0) = S_0; \quad (2)$$

$$\dot{V}(t) = a(t), \quad V(t_0) = V_0, \quad (3)$$

где  $S$  – пройденный путь, м;  $V$  – скорость мобильного робота, м/с.

Анализируя приведенные графики, можно сделать предположение, что управляющим воздействием для системы является ускорение:

$$a(t) = a \cdot \text{sign}(\tau - t). \quad (4)$$

Перепишем выражение (4) для управления скоростью:

$$V(t) = \begin{cases} V_0(t) + a_a \Delta t, & 0 < t \leq t_1; \\ V_{\max}, & t_1 < t \leq t_1 + t_2; \\ V_0(t) - a_b \Delta t, & t_1 + t_2 < t \leq T, \end{cases} \quad (5)$$

где  $t$  – значение времени в процессе управления;  $\tau$  – дискретный момент времени переключения управления,  $\tau = [t_1, t_2, t_3]$ ;  $t_1$  – время разгона;  $t_2$  – отрезок времени, когда скорость достигает максимума и остается постоянной;  $t_3$  – время торможения;  $a_a$  – ускорение при разгоне (acceleration);  $a_b$  – ускорение при торможении (breaking).

Рассмотрим случай движения ТМР при равноускоренном движении:

$$S_k = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (6)$$

где  $S_0$  – начальное положение,  $V_0$  – начальная скорость,  $a$  – ускорение.

На основе формулы (6) найдем интервалы пути для  $S_k$ :  $S_{k1}$ ,  $S_{k2}$  и  $S_{k3}$ . Сначала за время  $t_1$ , разгоняясь до максимальной скорости, ТМР проезжает отрезок  $S_{k1}$ . При этом его начальное положение и скорость равны нулю. На отрезке  $S_{k2}$  в течение времени  $t_2$  значение скорости робота является максимальным и остается постоянным, поэтому отрезок  $S_{k2}$  равен произведению максимальной скорости на время  $t_2$ . На отрезке  $S_{k3}$  за время  $t_3$  скорость робота снижается с максимальной до нуля. Следовательно, ускорение получает отрицательное значение:

$$\begin{cases} S_{k1} = \frac{a_a t_1^2}{2}, & (7) \\ S_{k2} = V_{\max} t_2, & (7a) \\ S_{k3} = V_{\max} t_3 - \frac{a_b t_3^2}{2}, & (7b) \end{cases}$$

где  $V_{\max}$  – максимальная скорость мобильного робота, м/с;  $a_a$  – ускорение при разгоне, м/с<sup>2</sup>;  $a_b$  – ускорение при торможении, м/с<sup>2</sup>;  $t_1$  – время, за которое происходит разгон;  $t_2$  – время, когда скорость достигает максимума и является постоянной;  $t_3$  – время, за которое происходит торможение.

Подставив полученные интервалы пути (7)–(7 б) в формулу (1), найдем общее расстояние  $S_k$ , которое должен пройти робот с выходом на максимальную скорость  $V_{\max}$ :

$$S_k = \frac{a_a t_1^2}{2} + V_{\max} t_2 + V_{\max} t_3 - \frac{a_b t_3^2}{2}. \quad (8)$$

Далее найдем временные отрезки  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ . Для этого рассмотрим формулу скорости при равноускоренном движении:

$$V = V_0 + at. \quad (9)$$

На отрезке  $S_{k1}$ , когда начальная скорость равна нулю, а ускорение равно ускорению разгона ( $a_a$ ) за время  $t_1$ , скорость достигает максимального значения:

$$V_{\max} = a_a t_1. \quad (10)$$

На отрезке  $S_{k3}$  из-за наличия отрицательного ускорения  $a_b$  скорость за время  $t_3$  падает с максимума до нуля:

$$\begin{aligned} V_{\max} - a_b t_3 &= 0, \\ V_{\max} &= a_b t_3. \end{aligned} \quad (10 a)$$

Из формулы (10) найдем значение  $t_1$ , а из (10 a) – значение  $t_3$ . Тогда при известном значении пройденного пути  $S_k$  в соответствии с формулами (5), (7)–(7 б) и (10), (10 a) определим  $t_2$ :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{V_{\max}}{a_a}, & (11) \\ t_2 = \frac{2S_k a_a a_b - V_{\max}^2 (a_a + a_b)}{2V_{\max} a_a a_b}, & (11 a) \\ t_3 = \frac{V_{\max}}{a_b}. & (11 б) \end{cases}$$

Следовательно, общее время  $T$ , затраченное ТМР на прохождение одного отрезка пути  $S_k$ , вычисляется по формуле

$$T = t_1 + t_2 + t_3. \quad (12)$$

Между тем на практике могут встретиться такие короткие отрезки пути  $S_k$ , когда ТМР не выходит на значение максимальной скорости  $V_{\max}$ . В этом случае циклограмма принимает вид не трапеции, а треугольника (см. рис. 2, b).

Найдем значения характерных величин, при которых возникает указанная ситуация. Для начала определим расстояние  $S_{Trh}$  (threshold) участков путей, когда робот за время  $t_1$  проедет отрезок  $S_{k1}$ , достигнув при этом максимальной скорости  $V_{\max}$ , и сразу начнет тормозить, проезжая отрезок  $S_{k3}$ , т. е.  $S_{k2} = 0$  и  $t_2 = 0$ :

$$S_{Trh} = \frac{a_a t_1^2}{2} + V_{\max} t_3 - \frac{a_b t_3^2}{2}. \quad (13)$$

Далее, подставив уже полученные формулы (11) и (11 б) в равенство (13), получим расстояние разгона и тормозного пути до полной остановки:

$$S_{Trh} = \frac{V_{\max}^2 (a_a + a_b)}{2a_a a_b}. \quad (14)$$

Таким образом, если заданное расстояние пути  $S_k$  меньше  $S_{Trh}$  (14), то требуемый путь будет состоять из двух отрезков  $S_{k1}$  и  $S_{k3}$ , за исключением участка  $S_{k2}$  и временного интервала  $t_2$ . Общее расстояние  $S_k$  для данного условия будет иметь вид

$$S_k = S_{k1} + S_{k3}. \quad (15)$$

Тем не менее бывают случаи, когда заданный путь  $S_k$  является настолько коротким, что ТМР не успевает достичь максимально возможной скорости  $V_{\max}$  и скорость растет до некоторого значения  $V_{cur}$  (current),  $V_{cur} < V_{\max}$  (см. рис. 2, b). На основе формулы (6) при равноускоренном движении ТМР найдем путь для каждого участка  $S_{k1}$  и  $S_{k3}$ , когда максимальная скорость, которую смог развить ТМР на расстоянии  $S_k$ , равна  $V_{cur}$ :

$$S_k = \frac{a_a t_1^2}{2} + V_{cur} t_3 - \frac{a_b t_3^2}{2}, \quad (16)$$

где  $V_{cur}$  – текущая скорость ТМР, не достигающая  $V_{\max}$ .

Так как расстояние  $S_k$  равно сумме отрезков  $S_{k1}$  и  $S_{k3}$ , то в рассматриваемом случае график функции  $V(t)$  представляется в виде неравностороннего треугольника (см. рис. 2, b). Поэтому воспользуемся формулой (14), заменив максимальную скорость  $V_{\max}$  на скорость  $V_{cur}$ , и получим равенство

$$S_k = \frac{V_{cur}^2 (a_a + a_b)}{2a_a a_b}. \quad (17)$$

На основе формулы (17) найдем значение

$$V_{cur} = \sqrt{\frac{2S_k a_a a_b}{(a_a + a_b)}}. \quad (18)$$

Далее, применив формулы (11) и (11 б) при равноускоренном движении, когда скорость достигает  $V_{cur}$ , и формулу (18), найдем отрезки времени  $t_1$  и  $t_3$ :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{V_{cur}}{a_a} = \sqrt{\frac{2S_k a_b}{a_a (a_a + a_b)}}, \\ t_3 = \frac{V_{cur}}{a_b} = \sqrt{\frac{2S_k a_a}{a_b (a_a + a_b)}}. \end{cases} \quad (19)$$

Тогда общее время  $T$ , состоящее из интервалов  $t_1$  и  $t_3$  (19) и затраченное ТМР на прохождение пути  $S_k$ , определяется равенством

$$T = t_1 + t_3. \quad (20)$$

Следовательно, общее время для случаев (19) и (20) при условии (14) рассчитывается по формулам

$$T = \begin{cases} \frac{V_{\max}(a_a + a_b)}{2a_a a_b} + \frac{S_k}{V_{\max}} & \text{при } S_k > \frac{V_{\max}^2(a_a + a_b)}{2a_a a_b}, \\ \sqrt{\frac{2S_k(a_a + a_b)}{a_a a_b}} & \text{при } S_k \leq \frac{V_{\max}^2(a_a + a_b)}{2a_a a_b}. \end{cases} \quad (21)$$

Данная методика подходит для управления не только линейной, но и угловой скоростью. Модифицируем предложенную методику форсированного управления для поворота на  $\pm 90^\circ$  между любыми двумя участками. При этом закон углового движения также целесообразно формировать по закону форсированного управления:

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = \omega, \\ \dot{\omega} = a, \end{cases}$$

где  $a$  – угловое ускорение,  $\text{м/с}^2$ .

При прямолинейном движении угловые скорость и ускорение равны нулю, а при повороте ТМР на месте линейные скорость и ускорение равны нулю. Угловая скорость  $\omega$  при линейных скоростях движения правого и левого колес  $V_{right}$  и  $V_{left}$  определяется выражением

$$\omega = \frac{V_{right} - V_{left}}{b},$$

где  $b$  – расстояние между колесами.

Учитывая тот факт, что ТМР должен вращаться на месте, т. е. знаки линейных скоростей правого и левого колес должны быть противоположными, получим равенство

$$\omega = \pm \frac{2V}{b},$$

где  $V$  – линейная скорость ТМР, вычисляемая по формуле (9), а знак  $\pm$  указывает направление поворота: по часовой стрелке « $\rightarrow$ » и против « $\leftarrow$ ».

Далее необходимо вычислить путь  $S_k$ , пройденный одним колесом при повороте робота на месте на угол  $\alpha$ . Рассчитаем радиус поворота колеса

$$r = \frac{b}{2} \quad (22)$$

и путь, пройденный колесом при повороте на угол  $\alpha$ ,

$$S_k = \frac{\pi r \alpha}{180} = \frac{\pi b \alpha}{360}. \quad (23)$$

Тогда время  $T$ , удовлетворяющее условию (21), находится по формуле

$$T = \frac{V_{\max}(a_a + a_b)}{2a_a a_b} + \frac{\pi b \alpha}{360 \cdot V_{\max}} \quad (24)$$

или

$$T = \sqrt{\frac{\pi b \alpha (a_a + a_b)}{180 \cdot a_a a_b}}, \quad (24 a)$$

если оно удовлетворяет условию (21 a).



**Численное моделирование.** В качестве прототипа был выбран широко известный транспортный робот Amazon Kiva, который имеет компактный размер  $75 \times 60 \times 30$  см, вес 110 кг, полезная нагрузка робота достигает 450 кг. Как и большинство подобных роботов, он развивает скорость до 5 км/ч (1,3 м/с), что соответствует скорости ходьбы взрослого человека (URL: <https://procesosindustriales.net/lean-manufacturing/la-familia-de-amazon-robotics-kiva-regasus-xanthus-y-mas/>). Ускорение, с которым разгоняется ТМР, меньше, чем ускорение его торможения. При моделировании были рассмотрены три стандартных случая:

1. *Движение на большие дистанции, когда  $V_{cur}$  достигает максимума и некоторое время остается постоянным.* Были проведены экспериментальные вычисления при следующих условиях:  $V_{max} = 0,8$  м/с,  $a_a = 0,3$  м/с<sup>2</sup>,  $a_b = 0,5$  м/с<sup>2</sup> и  $S_k = 24$  м. С учетом формулы (14) и заданных условий пороговое значение пройденного пути  $S_{Thr} = 0,706$ . Расстояние  $S_k$  удовлетворяет условию (21), следовательно, скорость движения ТМР выйдет на свое максимальное значение. Эффективность разработанной методики подтверждается результатами моделирования. На рис. 3, а представлена циклограмма зависимости ускорений  $a_a$ ,  $a_b$  и скорости  $V$  от времени  $t$ . При заданных значениях  $\tau$  происходит своевременное переключение управления с  $a_a$  на 0 и с 0 на  $a_b$ . Время переключения  $\tau$  равняется  $t_1 = 2,667$ ,  $t_2 = 27,870$  и  $t_3 = 1,600$  с. Видно, что ускорение переключается на 0 в момент, когда линейная скорость достигает максимума при  $t_1$ , далее на отрезке  $t_2$  мобильный робот движется на максимальной скорости  $V_{max}$ , затем на отрезке  $t_3$  срабатывает торможение и ТМР снижает скорость. На рис. 3, б изображен путь, пройденный мобильным роботом за время  $T$ .

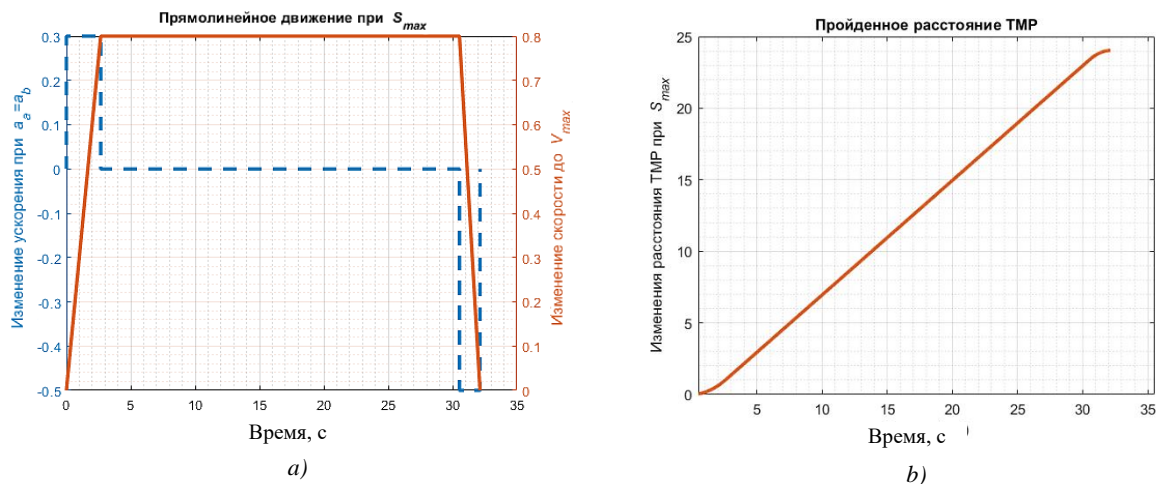


Рис. 3. Результаты моделирования при ограничениях на  $a_a$  и  $V_{max}$  при  $S_{max}$ :

а) циклограмма изменения ускорения и скорости ТМР; б) график зависимости расстояния от времени

Fig. 3. Simulation results under restrictions on  $a_a$  and  $V_{max}$  at  $S_{max}$ :

a) cyclogram of the change of acceleration and speed TMR; b) graph of distance versus time

2. *Движение на такое расстояние, на котором после завершения разгона сразу наступает этап торможения, т. е.  $V_{cur}$  достигает своего максимального значения, но не сохраняет его.* Указанный тип движения, удовлетворяющий условию (21 а), реализуется только для расстояния  $S_k = 1,7$  м, где время переключения  $\tau$  равняется  $t_1 = 2,661$  с и  $t_3 = 1,597$  с, общее время  $T = 4,258$  с (рис. 4, б). При таких условиях ТМР успевает разогнаться до  $V_{max}$ , но пропускает отрезок  $t_2$  (рис. 4, а).

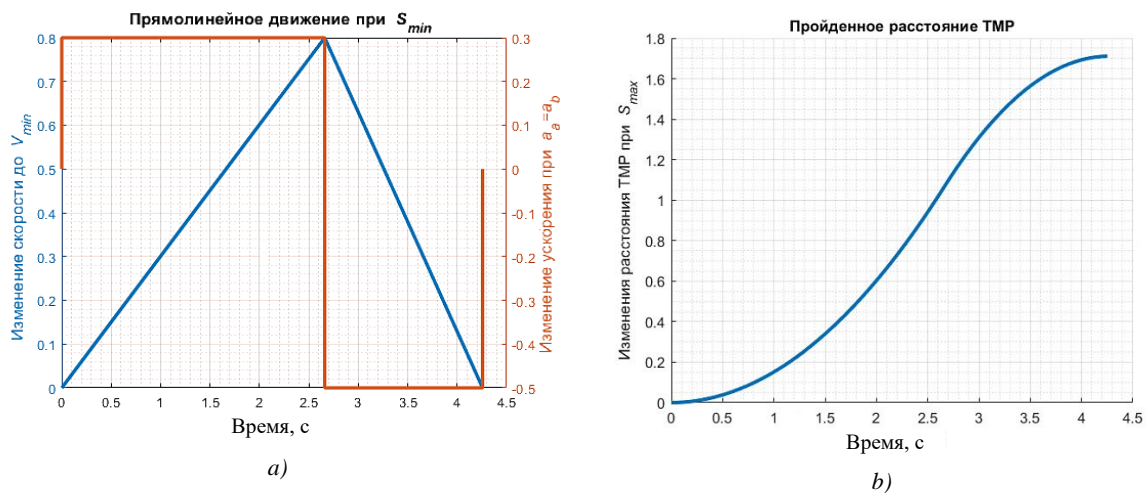


Рис. 4. Результаты моделирования при ограничениях на  $a_a$  и  $V_{max}$  при  $S_k$ :  
 а) циклограмма изменения ускорения и скорости TMR; б) график зависимости расстояния от времени

Fig. 4. Simulation results under restrictions on  $a_a$  and  $V_{max}$  at  $S_k$ :  
 а) cyclogram of the change of acceleration and speed TMR; б) graph of distance versus time

3. Поворот TMR на месте на  $90^\circ$ . Учитывая расстояние между колесами  $b = 25$  см и требуемый угол поворота  $\alpha = 90^\circ$ , по формуле (23) рассчитали, что каждое из колес должно проехать в соответствующем направлении по дуге длиной  $S_k = 0,3927$  м. Полученное расстояние удовлетворяет условию (21 а). Следовательно, TMR не успевает разогнаться до максимальной скорости  $V_{max}$ . Поэтому максимальная скорость, с которой он будет поворачивать в момент времени  $t_1$ ,  $V_{cur} = 0,384$  м/с (рис. 5, а). Время переключения  $\tau$  равняется  $t_1 = 1,279$  с и  $t_3 = 0,767$  с, общее время поворота  $T = 2,047$  с (рис. 5, б).

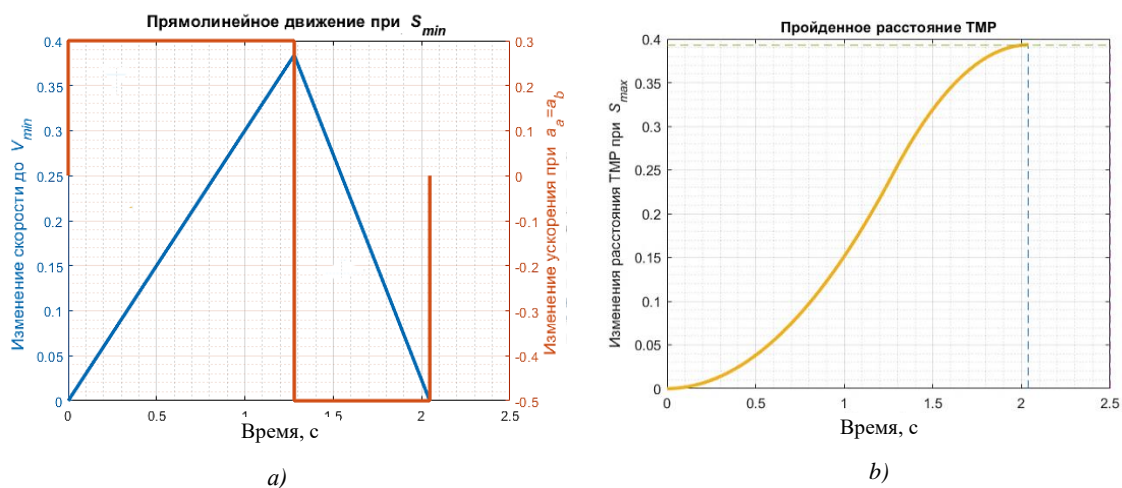


Рис. 5. Результаты моделирования при повороте TMR на  $90^\circ$ : а) циклограмма изменения ускорения и скорости; б) график зависимости расстояния от времени

Fig. 5. Simulation results when turning to  $90^\circ$ : а) cyclogram of the change of acceleration and speed TMR; б) graph of distance versus time

Результаты моделирования показали, что разработанная методика форсированного управления подходит для мобильного робота при условии заданной максимальной скорости и при максимальных ускорениях для разгона и торможения. На основании формулы (12), удовлетворяю-

щей условию (21), рассчитывается общее время, необходимое для прохождения длинной дистанции. Если же расстояние оказывается меньшим, чем в условии (21 а), то используется формула (20) для коротких дистанций и формулы (24), (24 а) для поворота ТМР на месте на 90°.

**Блок управления маневрами.** На основе предложенной методики форсированного управления в среде Simulink был разработан блок управления маневрами, который работает по принципу конечного автомата (рис. 6).

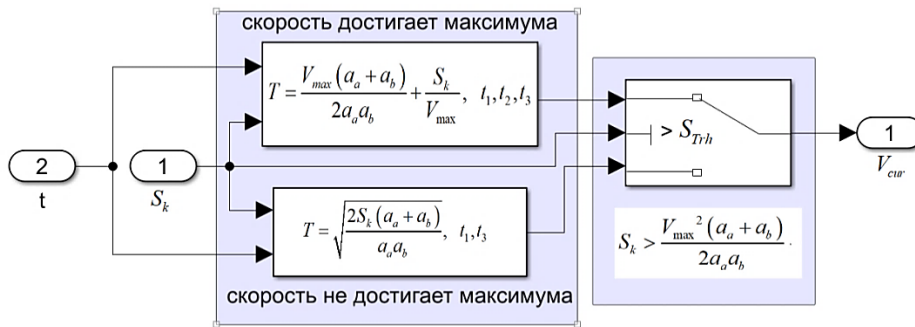


Рис. 6. Блок управления маневрами  
Fig. 6. Maneuver control unit

На вход разработанного блока подаются текущее время  $t$  и длина пути  $S_k$ , который должен проехать ТМР, а на выход – требуемая линейная скорость  $V$  в каждый момент времени  $t$ . Значение скорости определяется по формуле (9), значение ускорения  $a$  – по формуле (4). Если длина заданного пути больше, чем пороговое значение  $S_{Trh}$ , то  $\tau = [t_1, t_2, t_3]$ , где  $t_1, t_2$  и  $t_3$  вычисляются по формулам (11)–(11 б). В противном случае  $\tau = [t_1, t_3]$  и  $t_1, t_3$  вычисляются по формуле (19).

**Схема расстановки стеллажей.** В работе предлагается алгоритм движения мобильного робота по заданной траектории с минимальным затрачиваемым временем относительно передвижения по складскому помещению. Зонирование и проектирование схемы расстановки стеллажей для склада имеют принципиальное значение, так как от этого зависит, насколько быстро ТМР доедет до точки назначения. Рассмотрим пример склада, размер которого составляет 45×40 м, а стеллажи расположены в шесть рядов по четыре стеллажа в каждом (рис. 7). Для удобства представим их в виде элементов матрицы 6×4. Пути между стеллажами имеют двухстороннее движение. Это сделано для того, чтобы предотвратить столкновения роботов на прямолинейном отрезке. Цветом отмечены направления движения: красным – движение справа налево, желтым – слева направо, зеленым – сверху вниз, синим – снизу вверх.

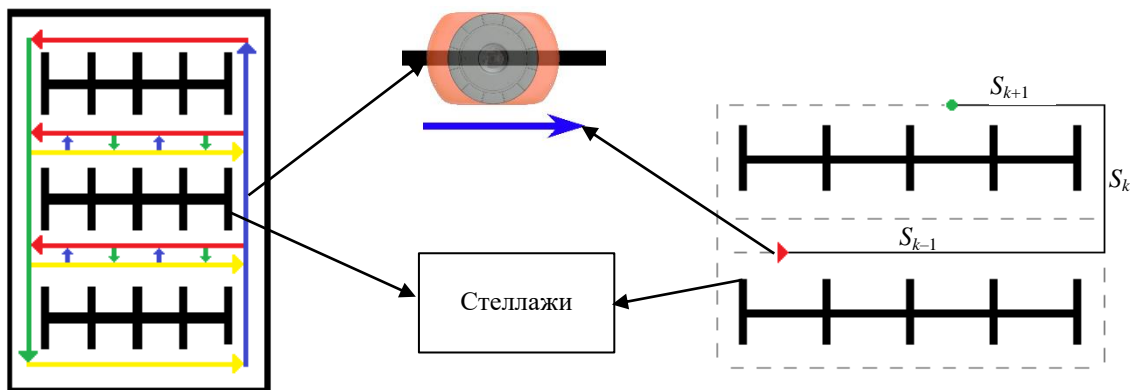


Рис. 7. Схема расстановки стеллажей на складе и траектория движения ТМР  
Fig. 7. The layout of racks in the warehouse and the trajectory of the movement of TMR

На рис. 7 изображена типовая траектория движения ТМР, где мобильному роботу заданы координаты старта и прибытия. С помощью волнового алгоритма [6, 7] вычисляется кратчайший путь с координатами точек поворота, далее расстояние между полученными координатами (точками) определяется переменной  $S_k$ . Представим траекторию движения ТМР как набор прямолинейных отрезков.

**Верификация разработанной методики максимального быстродействия.** Для верификации предложенной методики форсированного управления была разработана математическая модель [8, 9] в виде системы уравнений кинематики ТМР и проведены экспериментальные исследования.

*Эксперимент 1.* Рассмотрим варианты передвижения ТМР на примере рис. 8, а, б, где три робота перемещаются по складскому помещению и не пересекаются между собой. На рис. 8, с показан вариант, когда пути трех ТМР пересекаются в разное время. Благодаря выведенным формулам прямолинейного равноускоренного движения (21) и (21 а) можно узнать, где находится каждый робот в каждый момент времени. На рис. 8, д показано, что два робота, путь которых обозначен черным цветом, столкнутся на 21,58-й с. Вторая пара ТМР (путь бордового цвета) столкнется через 22,82 с. Третья пара (путь синего цвета) столкнется через 36,45 с. Вариант, когда один из ТМР пропускает другого, будет рассматриваться в дальнейших работах авторов.

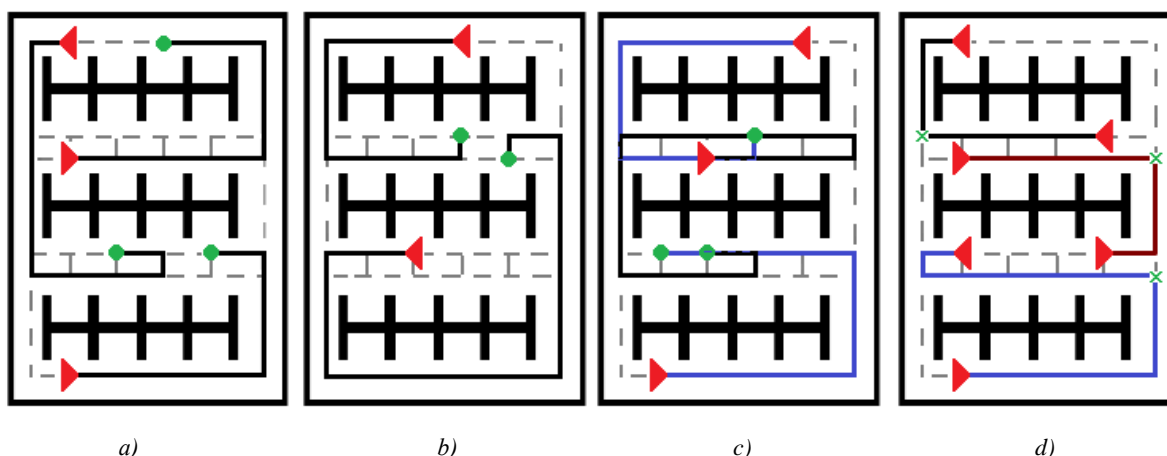


Рис. 8. Траектории движения нескольких ТМР в условиях двухстороннего движения:  
 а), б) ТМР не пересекаются друг с другом; в) ТМР пересекаются, но в разные моменты времени;  
 д) ТМР столкнутся на 10-й с

*Fig. 8. The trajectory of the movement of several transport robots, under the condition of two-way movement:  
 а), b) movement of the TMR, when they do not intersect with each other; в) TMR movements when they are stopped,  
 but at different times; d) movement of TMRs when the robots collide at the 10th second*

*Эксперимент 2.* Вычислим расстояние между роботами в каждый момент времени и определим потенциальные моменты столкновения между ними на общих участках их траекторий движения. Поставим следующие условия:

- 1) количество запущенных ТМР шесть;
- 2) стартовые и конечные позиции отличаются друг от друга;
- 3) время прохождения каждого робота варьируется в диапазоне от 30 до 78 с;
- 4) расстояние до столкновения 2 м.

Результаты симуляции (табл. 1) показали, что роботы 1 и 4 столкнутся на 12,455-й с.

*Эксперимент 3.* Были запущены пять ТМР из разных точек, что составляет более 500 вариантов отрезков пути  $S_k$ , длина которых варьируется от 2 до 24 м. Наиболее часто проходимым отрезком (рис. 9) по территории склада является отрезок длиной 12 м, реже всего проходят отрезок в 6 м.

Таблица 1  
Расстояния между шестью роботами в момент столкновения роботов 1 и 4

Table 1  
Distances between six robots at the moment of collision of robots 1 and 4

Робот	Расстояния, м Distances, m					
	1	2	3	4	5	6
1	–	24,0758	10,0000	0	6,2338	2,7616
2		–	34,0533	24,0754	22,3607	22,0000
3			–	10,0000	13,3739	12,1502
4				–	6,2338	2,7616
5					–	4,0000
6						–

*Эксперимент 4.* Были запущены четыре ТМР из разных точек склада к одной точке прибытия (4, 2). Необходимо было выяснить время прохождения  $T$ , расстояние пути  $S$  и количество поворотов, совершенных каждым роботом. Зная местоположение роботов в каждый момент времени, можно рассчитать задержки, при которых не будет столкновений при пересечении траекторий. В результате робот 3 придет в точку прибытия быстрее, чем остальные роботы, совершив всего два поворота. Больше времени понадобилось роботу 4, потому что его траектория включила шесть поворотов. Абсолютно все ТМР проехали свой отрезок, не пересекаясь друг с другом.

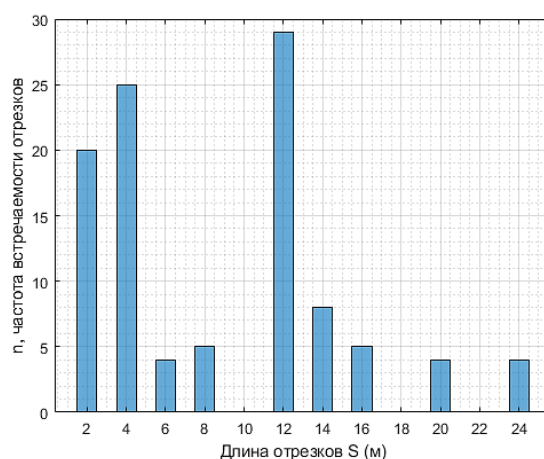


Рис. 9. Гистограмма отрезков  $S_k$  для пяти запущенных ТМР

Fig. 9. Histogram of  $S_k$  segments for 5 running TMRs

Таблица 2  
Результаты моделирования движения четырех роботов

Table 2  
Results of motion simulation of four robots

Робот	Расположение стеллажа Shelving location		Пройденный путь $S_k$ , м Distance traveled $S_k$ , m	Затраченное время $T$ , с Elapsed time $T$ , s	Количество поворотов (ber of turns)
	Точка старта Starting point	Точка прибытия Arrival point			
1	(1, 1)	(4, 2)	47,571	63,907	4
2	(3, 4)	(4, 2)	60,356	79,746	6
3	(5, 4)	(4, 2)	18,785	27,812	2
4	(3, 1)	(4, 2)	72,356	94,746	6

**Заключение.** В работе предложена методика расчета скорости мобильного робота, которая будет полезна при проектировании систем управления ТМР в складских помещениях. Разработанная методика и полученные результаты экспериментов помогут спрогнозировать положение и передвижение мобильного робота по складскому помещению и на основе этого осуществить централизованное управление группой роботов. Спланированный путь и знания, где находится каждый робот в каждый момент времени, помогут избежать нежелательных столкновений.

**Вклад авторов.** Г. А. Прокопович сформулировал практическую задачу, определил пути достижения цели, руководил процессом реализации блока управления, принял участие в обобщении полученных результатов. А. А. Лобатый аналитически обосновал теорию форсированного движением ТМР. Т. Ю. Ким сделала аналитический обзор, реализовала и верифицировала разработанную методику форсированного управления в среде Simulink, разработала блок управления ТМР, провела экспериментальные исследования, получила результаты по одновременному определению положений нескольких роботов.

### Список использованных источников

1. Planning and control of autonomous mobile robots for intralogistics: Literature review and research agenda / G. Fracapane [et al.] // *European J. of Operational Research*. – 2021. – Vol. 294, no. 2. – P. 405–426. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.01.019>
2. Bräunl, Th. *Embedded Robotics. Mobile Robot Design and Applications with Embedded Systems* / Th. Bräunl. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2008. – XIV, 546 p.
3. Ким, Д. П. Теория автоматического управления : в 2 т. / Д. П. Ким. – М. : Физматлит, 2004. – Т. 2 : Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – 464 с.
4. Сейдж, Э. П. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт ; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1982. – 392 с.
5. Абуфанас, А. С. Аналитический синтез форсированного импульсного управления электроприводом системы слежения / А. С. Абуфанас, А. А. Лобатый, Ю. Ф. Яцына // *Системный анализ и прикладная информатика*. – 2017. – № 4. – С. 16–20. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2017-4-16-20>
6. Rizk-Allah, R. M. A movable damped wave algorithm for solving global optimization problems / R. M. Rizk-Allah, A. E. Hassanien // *Evolutionary Intelligence*. – 2019. – No. 12. – P. 49–72. <https://doi.org/10.1007/s12065-018-0187-8>
7. Patel, Apoorva D. Wave algorithms: Optimal database search and catalysis [Electronic resource] / Apoorva D. Patel // *AIP Conference Proceedings*. – 2006. – No. 2. – P. 261–272. – Mode of access: <https://doi.org/10.1063/1.2400898>. – Date of access: 30.05.2022.
8. Ким, Т. Ю. Имитационное моделирование движения двухколесного робота robosake на горизонтальной плоскости / Т. Ю. Ким, Г. А. Прокопович // XVII Междунар. науч. конф. «Молодежь в науке», Минск, 22–25 сент. 2020 г. – Минск, 2020. – С. 398–400.
9. Ким, Т. Ю. Цифровой двойник транспортной тележки с дифференциальным приводом для отладки алгоритма следования по траектории / Т. Ю. Ким, Г. А. Прокопович // Междунар. конф. «Наука и инновации» : сб. науч. тр., Минск, 2020. – Минск, 2020. – С. 496–499.

---

---

### References

1. Fracapane G., Koster R., Sgarbossa F., Strandhagen J. O. Planning and control of autonomous mobile robots for intralogistics: Literature review and research agenda. *European Journal of Operational Research*, 2021, vol. 294, no. 2, pp. 405–426. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.01.019>
2. Bräunl Th. *Embedded Robotics. Mobile Robot Design and Applications with Embedded Systems*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, XIV, 546 p.
3. Kim D. P. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya : v 2 tomah. *Theory of Automatic Control : In 2 Volumes*. Moscow, Fizmatlit, 2004, vol. 2: Mnogomernie, nelineinie, optimalnie i adaptivnie sistemi. *Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems*, 464 p. (In Russ.).
4. Sage A. P., White C. C. *Optimum Systems Control*. 2nd Edition. Prentice Hall, 1977, 372 p.
5. Abufanas A. S., Lobaty A. A., Yacina Y. F. *Analytical synthesis of forced pulse electronic drive control of a tracking system*. *Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika [System Analysis and Applied Information Science]*, 2017, no. 4, pp.16–20 (In Russ.). <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2017-4-16-20>

6. Rizk-Allah R. M., Hassanien A. E. A movable damped wave algorithm for solving global optimization problems. *Evolutionary Intelligence*, 2019, no. 12, pp. 49–72. <https://doi.org/10.1007/s12065-018-0187-8>
7. Patel Apoorva D. Wave algorithms: Optimal database search and catalysis. *AIP Conference Proceedings*, 2006, no. 2, pp. 261–272. Available at: <https://doi.org/10.1063/1.2400898> (accessed 30.05.2022).
8. Kim T. Yu, Prokopovich G. A. *Simulation of the movement of a two-wheeled robot robocake on a horizontal plane*. XVII Mezhdunarodnaja nauchnaja konferencija «Molodezh' v nauke», Minsk, 22–25 sentjabrja 2020 g. [XVII International Scientific Conference "Youth in Science", Minsk, 22–25 September 2020]. Minsk, 2020, pp. 398–400 (In Russ.).
9. Kim T. Yu, Prokopovich G. A. *Digital twin of a transport cart with a differential drive for debugging the path-following algorithm*. Mezhdunarodnaja konferencija «Nauka i innovacii» : sbornik nauchnyh trudov, Minsk, 2020 [International Conference "Science and Innovation" : Collection of Scientific Papers, Minsk, 2020]. Minsk, 2020, pp. 496–499 (In Russ.).

### Информация об авторах

*Ким Татьяна Юрьевна*, аспирант, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.

<http://orcid.org/0000-0002-4126-6572>

E-mail: [tatyana\\_kim92@mail.ru](mailto:tatyana_kim92@mail.ru)

*Прокопович Григорий Александрович*, кандидат технических наук, доцент, заведующий лабораторией робототехнических систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси.

<http://orcid.org/0000-0002-3412-9174>

E-mail: [rprakapovich@robotics.by](mailto:rprakapovich@robotics.by)

*Лобатый Александр Александрович*, доктор технических наук, профессор, Белорусский национальный технический университет.

E-mail: [lobaty@tut.by](mailto:lobaty@tut.by)

### Information about the authors

*Tatyana Yu. Kim*, Postgraduate Student, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.

<http://orcid.org/0000-0002-4126-6572>

E-mail: [tatyana\\_kim92@mail.ru](mailto:tatyana_kim92@mail.ru)

*Ryhor A. Prakapovich*, Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Head of the Robotics Systems Department, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus.

<http://orcid.org/0000-0002-3412-9174>

E-mail: [rprakapovich@robotics.by](mailto:rprakapovich@robotics.by)

*Alexander A. Lobaty*, D. Sc. (Eng.), Professor, Belarusian National Technical University.

E-mail: [lobaty@tut.by](mailto:lobaty@tut.by)