

УДК 537.874:621.372.8

В.Т. Ерофеев

ДВУХСТОРОННЯЯ ФОКУСИРОВКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ПЛОСКОЙ ЛИНЗОЙ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА

Предлагается аналитическое решение краевой задачи проникновения электромагнитного поля диполя через плоскую линзу из фокусирующих материалов. Показывается, что для линз из фокусирующих материалов образуются два фокуса: один за экраном и второй перед экраном в области источника. Поле фокуса перед экраном равняется сумме полей магнитного и электрического диполей.

Введение

Теоретическое исследование композитных материалов является одним из приоритетных направлений фундаментальной науки. Композиты отличаются большим разнообразием в силу разнообразия структурного и химического состава материалов, которые определяют электродинамические свойства выполненных из них технических устройств [1]. В последнее время большое внимание в научной литературе уделяется исследованию биизотропных и киральных метаматериалов. В работах [2–5] приведены обзоры публикаций по данной тематике. Важными для приложений техническими устройствами являются плоские экраны, выполненные из биизотропных материалов. Такие системы служат для экранирования электромагнитных полей, а также для преобразования структуры падающего поля при прохождении через экран. В ряде работ аналитически и численно исследованы экранирующие свойства биизотропных экранов при воздействии на них монохроматических полей различных типов: плоских полей [6], полей источников [7] и пучков волн [8]. Начиная с пионерских работ В.Г. Веселаго [9, 10], проводятся исследования плоских пластин, выполненных из метаматериалов. Такие структуры обладают уникальными свойствами фокусировки и, по сути, являются фокусирующими линзами. Электромагнитное поле источника, расположенного по одну сторону пластины из метаматериала, локализуется по другую сторону пластины в виде фокуса. Исследовались пластины из бианизотропного материала [11]. Разработана детальная лучевая теория фокусирующих однослойных и двухслойных линз [5, 12], в которой анализируются законы отражения и преломления полей на плоскостях раздела сред из вакуума и метаматериала. Разрабатывались другие подходы к моделированию таких структур [5]. Исследованы аналитически [13] и численно [7, 8] фокусирующие свойства экранов из биизотропных материалов.

В настоящей статье получено точное аналитическое решение краевой задачи проникновения электромагнитного поля магнитного диполя через плоскую бесконечную линзу из метаматериала. Применен метод с использованием двухсторонних граничных условий [14] (нелокальных граничных условий) на плоском биизотропном экране и метод теорем сложения, связывающих базисные сферические и цилиндрические электромагнитные поля. Описано многообразие материальных параметров линзы, для которой поле магнитного диполя, расположенного по одну сторону слоя, фокусируется в поле магнитного диполя по другую сторону слоя. Детально исследовано отраженное поле в полупространстве, в котором находится точечный источник поля. Показано, что при определенных условиях в этом полупространстве образуется второй фокус.

1. Постановка задачи

В пространстве R^3 с декартовой системой координат $Oxuz$ размещен плоский экран $D(0 < z < \Delta)$, который ограничен плоскостями $\Gamma_1(z=0)$, $\Gamma_2(z=\Delta)$. Слой выполнен из биизотропного материала, характеризуемого материальными комплексными параметрами

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $G = G_r/c$, $Z = Z_r/c$, где ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, c – скорость света в вакууме. В полупространстве $D_1(z < \Delta)$ на оси Oz в точке $O_1(0, 0, -h)$, $h > 0$, размещен магнитный диполь, колеблющийся с круговой частотой $\omega = 2\pi f$ и возбуждающий первичное поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 . В результате взаимодействия поля диполя с экраном D образуются поля: \vec{E}'_1, \vec{H}'_1 – поле в D_1 , отраженное от экрана D ; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$ – суммарное поле в области D_1 ; \vec{E}, \vec{H} – поле в слое D ; \vec{E}_2, \vec{H}_2 – поле, проникшее в область $D_2(z > \Delta)$. Рассматривается временная зависимость полей вида $\exp(-i\omega t)$.

Сформулируем краевую задачу, моделирующую проникновение первичного поля \vec{E}_0, \vec{H}_0 через экран D [13].

Краевая задача 1. При заданном поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 требуется определить поля \vec{E}'_1, \vec{H}'_1 ; \vec{E}_2, \vec{H}_2 ; \vec{E}, \vec{H} , которые удовлетворяют:

– уравнениям

$$\text{rot } \vec{E}_j = i\omega\mu_0 \vec{H}_j, \quad \text{rot } \vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_j \quad \text{в } D_j, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = i\omega(\mu \vec{H} + Z \vec{E}), \quad \text{rot } \vec{H} = -i\omega(\varepsilon \vec{E} + G \vec{H}) \quad \text{в } D; \quad (2)$$

– граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях Γ_1, Γ_2

$$\left. (\vec{E}_{1r} - \vec{E}_r) \right|_{z=0} = 0, \quad \left. (\vec{H}_{1r} - \vec{H}_r) \right|_{z=0} = 0, \quad \left. (\vec{E}_{2r} - \vec{E}) \right|_{z=\Delta} = 0, \quad \left. (\vec{H}_{2r} - \vec{H}_r) \right|_{z=\Delta} = 0; \quad (3)$$

– условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{E}'_1}{\partial r} - ik_0 \vec{E}'_1 \right) = 0, \quad z < 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial r} - ik_0 \vec{E}_2 \right) = 0, \quad z > \Delta, \quad (4)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$. r – радиальная координата сферической системы координат $Or\theta\varphi$.

2. Представление решения задачи через цилиндрические базисные поля

Рассмотрим магнитный и электрический диполи, расположенные в начале координат O и ориентированные вдоль оси Oz :

– магнитный диполь (TE -диполь, электрический вектор параллелен экрану D) [15, с. 174]

$$\vec{E}_m(O) = A_0 \tilde{m}_{01}(\vec{r}, k_0), \quad \vec{H}_m(O) = h_0 A_0 \tilde{n}_{01}(\vec{r}, k_0), \quad (5)$$

где $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$, $h_0 = \frac{1}{iZ_0}$, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$;

– электрический диполь (TH -диполь, магнитный вектор параллелен экрану D) [15, с. 166]

$$\vec{E}_s(O) = B_0 \tilde{n}_{01}(\vec{r}, k_0), \quad \vec{H}_s(O) = h_0 B_0 \tilde{m}_{01}(\vec{r}, k_0), \quad (6)$$

где A_0, B_0 – амплитуды диполей; $\tilde{m}_{01}, \tilde{n}_{01}$ – сферические поля [15, с.118].

Учитывая осевую симметрию полей диполей, представим поля (5), (6) через базисные цилиндрические поля [15, с. 130]:

$$\vec{M}_m^{(\mp 1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) = \vec{V}_m^{(1)}(\lambda \rho) e^{\mp v_0(\lambda)z} \Phi_m, \quad (7)$$

$$\vec{M}_m^{(\mp 2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) = \frac{1}{k_0} \left(\mp v_0(\lambda) \vec{V}_m^{(2)}(\lambda \rho) + \lambda J_m(\lambda \rho) \vec{e}_z \right) e^{\mp v_0(\lambda)z} \Phi_m,$$

где $\vec{V}_m^{(1)}(\lambda \rho) = \frac{im}{\lambda \rho} J_m(\lambda \rho) \vec{e}_\rho - J'_m(\lambda \rho) \vec{e}_\varphi$, $\vec{V}_m^{(2)}(\lambda \rho) = J'_m(\lambda \rho) \vec{e}_\rho + \frac{im}{\lambda \rho} J_m(\lambda \rho) \vec{e}_\varphi$, $v_0(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ при $\lambda \geq k_0$; $v_0(\lambda) = -i\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ при $k_0 > \lambda$, $0 \leq \lambda < \infty$; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат, $J_m(\cdot)$ – функции Бесселя, $J'_m(\cdot)$ – производная, $\vec{\rho} = (\rho, z, \varphi)$, $\Phi_m = e^{im\varphi}$.

Используя теоремы сложения [15, с.153], представим поля диполей (5), (6) в интегральном виде через поля (7) при $m = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(O) &= \begin{cases} A_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ A_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0, \end{cases} \\ \vec{H}_m(O) &= \begin{cases} h_0 A_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ h_0 A_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0; \end{cases} \\ \vec{E}_s(O) &= \begin{cases} B_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ B_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0, \end{cases} \\ \vec{H}_s(O) &= \begin{cases} h_0 B_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > 0, \\ h_0 B_0 \int_0^\infty C(\lambda) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где } C(\lambda) = -\frac{i\lambda^2}{k_0^2 v_0(\lambda)}.$$

Для диполей (5), (6), расположенных в произвольной точке $O_s(0, 0, h_s)$, $s = 1, 2, 3$, на оси Oz , учитывая сдвиг системы координат $z = z_s + h_s$ в формулах (8), получим интегральные представления

$$\vec{E}_m(O_s) = \begin{cases} \int_0^\infty A(\lambda, h_s) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_s, \\ \int_0^\infty A(\lambda, -h_s) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_s, \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_m(O_s) = \begin{cases} h_0 \int_0^{\infty} A(\lambda, h_s) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_s, \\ h_0 \int_0^{\infty} A(\lambda, -h_s) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_s; \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_y(O_s) = \begin{cases} \int_0^{\infty} B(\lambda, h_s) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_s, \\ \int_0^{\infty} B(\lambda, -h_s) \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_s, \end{cases} \quad (9)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_y(O_s) = \begin{cases} h_0 \int_0^{\infty} B(\lambda, h_s) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z > h_s, \\ h_0 \int_0^{\infty} B(\lambda, -h_s) \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, & z < h_s, \end{cases}$$

где $A(\lambda, h_s) = A_0 C(\lambda) e^{v_0(\lambda)h_s}$, $B(\lambda, h_s) = B_0 C(\lambda) e^{v_0(\lambda)h_s}$. (10)

Для поля магнитного диполя, расположенного в точке $O_1(0, 0, -h) \in D_1$, из формул (9) следует интегральное представление

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = \vec{\mathbf{E}}_m(O_1) = \int_0^{\infty} A(\lambda, -h) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda, \quad z > -h,$$

$$\vec{\mathbf{H}}_0 = \vec{\mathbf{H}}_m(O_1) = h_0 \int_0^{\infty} A(\lambda, -h) \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda. \quad (11)$$

Учитывая структуру (11) первичного поля, решение задачи (1)–(4) также представим в интегральном виде:

$$\vec{\mathbf{E}}_1' = \int_0^{\infty} \vec{E}_1'(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}}_1' = \int_0^{\infty} \vec{H}_1'(\lambda) d\lambda, \quad z < 0;$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \int_0^{\infty} \vec{E}_2(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}}_2 = \int_0^{\infty} \vec{H}_2(\lambda) d\lambda, \quad z > \Delta;$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \int_0^{\infty} \vec{E}(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}} = \int_0^{\infty} \vec{H}(\lambda) d\lambda, \quad 0 < z < \Delta; \quad (12)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = \int_0^{\infty} \vec{E}_0(\lambda) d\lambda, \quad \vec{\mathbf{H}}_0 = \int_0^{\infty} \vec{H}_0(\lambda) d\lambda, \quad z > -h;$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1' + \vec{E}_0, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_1' + \vec{H}_0,$$

где

$$\begin{aligned} \vec{E}_1'(\lambda) &= x_1(\lambda) \vec{M}_0^{(+1)} + y_1(\lambda) \vec{M}_0^{(+2)}, & \vec{H}_1'(\lambda) &= h_0 (x_1(\lambda) \vec{M}_0^{(+2)} + y_1(\lambda) \vec{M}_0^{(+1)}), \\ \vec{E}_2(\lambda) &= x_2(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)} + y_2(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)}, & \vec{H}_2(\lambda) &= h_0 (x_2(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)} + y_2(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}), \\ \vec{E}_0(\lambda) &= a(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)} + b(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)}, & \vec{H}_0(\lambda) &= h_0 (a(\lambda) \vec{M}_0^{(-2)} + b(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}), \\ a(\lambda) &= A(\lambda, -h), & b(\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы для полей $\vec{E}(\lambda), \vec{H}(\lambda)$ в области D опускаем, так как основная задача состоит в определении полей до экрана и за экраном в областях D_1 и D_2 .

Поля $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2; \vec{E}, \vec{H}$ удовлетворяют условиям (1)–(3) краевой задачи 1. Условия (4) выполнены для полей (12), так как электромагнитная энергия поля \vec{E}'_1, \vec{H}'_1 (13) распространяется в отрицательном направлении оси Oz , а поля \vec{E}_2, \vec{H}_2 (13) – в положительном направлении оси Oz .

3. Аналитическое решение краевой задачи экранирования

Для аналитического вычисления амплитуд $x_j(\lambda), y_j(\lambda)$ полей (13) воспользуемся двухсторонними граничными условиями [14], эквивалентными граничным условиям (3). Применение двухсторонних граничных условий позволяет исключить из рассмотрения поля \vec{E}, \vec{H} в слое D . Для формулировки двухсторонних условий на экране, связывающих поля \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 по обе стороны экрана, запишем тангенциальные составляющие полей на плоскостях Γ_1 и Γ_2 в базисе $\vec{V}_0^{(1)}, \vec{V}_0^{(2)}$ (7):

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} &= E_{1V_1}(\lambda)\vec{V}_0^{(1)}(\lambda\rho) + E_{1V_2}(\lambda)\vec{V}_0^{(2)}(\lambda\rho), \\ \vec{H}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} &= H_{1V_1}(\lambda)\vec{V}_0^{(1)}(\lambda\rho) + H_{1V_2}(\lambda)\vec{V}_0^{(2)}(\lambda\rho); \\ \vec{E}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} &= E_{2V_1}(\lambda)\vec{V}_0^{(1)}(\lambda\rho) + E_{2V_2}(\lambda)\vec{V}_0^{(2)}(\lambda\rho), \\ \vec{H}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} &= H_{2V_1}(\lambda)\vec{V}_0^{(1)}(\lambda\rho) + H_{2V_2}(\lambda)\vec{V}_0^{(2)}(\lambda\rho),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}E_{1V_1} &= E'_{1V_1} + E_{0V_1} = x_1(\lambda) + a(\lambda), \quad E_{1V_2} = E'_{1V_2} + E_{0V_2} = \bar{v}_0(\lambda)(y_1(\lambda) - b(\lambda)), \\ H_{1V_1} &= H'_{1V_1} + H_{0V_1} = h_0(y_1(\lambda) + b(\lambda)), \quad H_{1V_2} = H'_{1V_2} + H_{0V_2} = h_0\bar{v}_0(\lambda)(x_1(\lambda) - a(\lambda)); \\ E_{2V_1} &= x_2(\lambda)F(\lambda), \quad E_{2V_2} = -\bar{v}_0(\lambda)y_2(\lambda)F(\lambda), \\ H_{2V_1} &= h_0y_2(\lambda)F(\lambda), \quad H_{2V_2} = -h_0\bar{v}_0(\lambda)x_2(\lambda)F(\lambda), \\ F(\lambda) &= e^{-v_0(\lambda)\Delta}, \quad \bar{v}_0(\lambda) = \frac{v_0(\lambda)}{k_0}.\end{aligned}\tag{14}$$

Краевая задача 2. При заданном поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 (13) требуется определить поля $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$, которые удовлетворяют:

– уравнениям

$$\text{rot } \vec{E}_j = i\omega\mu_0\vec{H}_j, \quad \text{rot } \vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_j \quad \text{в } D_j;$$

– двухстороннему граничному условию [14]

$$\vec{U}_1\Big|_{z=0} = \hat{C}(\lambda)\vec{U}_2\Big|_{z=\Delta};\tag{15}$$

– условиям излучения в областях D_j .

Здесь

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, \quad \vec{U}_j = \begin{pmatrix} E_{j\nu_1} \\ H_{j\nu_2} \\ E_{j\nu_2} \\ H_{j\nu_1} \end{pmatrix}, \quad j=1, 2; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= p(p_1 C_2 - p_2 C_1), & C_{12} &= p\left(q_1 \frac{k_1}{v_1} S_1 - q_2 \frac{k_2}{v_2} S_2\right), \\ C_{13} &= p\left(q_2 \frac{p_1 k_2}{v_2} S_2 - q_1 \frac{p_2 k_1}{v_1} S_1\right), & C_{14} &= p(C_1 - C_2), \\ C_{21} &= pp_1 p_2 \left(q_2 \frac{v_2}{k_2} S_2 - q_1 \frac{v_1}{k_1} S_1\right), & C_{22} &= p(p_1 C_1 - p_2 C_2), \\ C_{23} &= pp_1 p_2 (C_2 - C_1), & C_{24} &= p\left(\frac{p_1 v_1}{q_1 k_1} S_1 - \frac{p_2 v_2}{q_2 k_2} S_2\right), \\ C_{31} &= p\left(\frac{p_1 v_2}{q_2 k_2} S_2 - \frac{p_2 v_1}{q_1 k_1} S_1\right), & C_{32} &= p(C_1 - C_2), \\ C_{33} &= p(p_1 C_2 - p_2 C_1), & C_{34} &= p\left(\frac{v_1}{q_1 k_1} S_1 - \frac{v_2}{q_2 k_2} S_2\right), \\ C_{41} &= pp_1 p_2 (C_2 - C_1), & C_{42} &= p\left(q_1 p_1 \frac{k_1}{v_1} S_1 - q_2 p_2 \frac{k_2}{v_2} S_2\right), \\ C_{43} &= pp_1 p_2 \left(q_2 \frac{k_2}{v_2} S_2 - q_1 \frac{k_1}{v_1} S_1\right), & C_{44} &= p(p_1 C_1 - p_2 C_2), \end{aligned} \quad (17)$$

$$C_j = \text{ch}(\xi_j), \quad S_j = \text{sh}(\xi_j), \quad \xi_j = v_j(\lambda)\Delta, \quad v_j(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2};$$

$$k_j = k_0 \bar{k}_j, \quad f_0 = k_0 \bar{f}_0, \quad f_j = k_0 \bar{f}_j, \quad g = k_0^2 \bar{g}, \quad g_j = k_0 \bar{g}_j, \quad a = k_0 \bar{a}, \quad b = k_0 \bar{b}, \quad p_j = \frac{\bar{p}_j}{Z_0},$$

$$q_j = \frac{\bar{g}}{k_j \bar{g}_j}, \quad v_j = k_0 \bar{v}_j, \quad p = \frac{1}{p_1 - p_2} = Z_0 \bar{p}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

где безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{k}_j &= \sqrt{\bar{g} + \frac{1}{2} \bar{a}^2 + \bar{a} \bar{f}_j}, \quad \bar{f}_j = (-1)^j \bar{f}_0, \quad \bar{f}_0 = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r - \bar{b}^2}, \\ \bar{g} &= \varepsilon_r \mu_r - G_r Z_r, \quad \bar{g}_j = \bar{f}_j - \frac{1}{2} \bar{a}, \quad \bar{p}_j = \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{i \bar{g}}{\bar{g}_j} - Z_r \right), \quad \bar{a} = i(G_r - Z_r), \\ \bar{b} &= \frac{1}{2}(G_r + Z_r), \quad \bar{v}_j = \sqrt{\bar{\lambda}^2 - \bar{k}_j^2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{k_0}, \quad \bar{p} = \frac{1}{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения краевой задачи подставим компоненты (14) в условие (15), получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд $x_j(\lambda)$, $y_j(\lambda)$. Решая систему аналитически, находим [7]

$$x_2(\lambda) = \frac{2G}{d}(aQ_{22} - bQ_{12}), \quad y_2(\lambda) = \frac{2G}{d}(bQ_{11} - aQ_{21}),$$

$$x_1(\lambda) = \frac{2}{d} \left[(C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12})(aQ_{22} - bQ_{12}) + (\bar{v}_0 C_{13} - h_0 C_{14})(aQ_{21} - bQ_{11}) \right] - a, \quad (19)$$

$$y_1(\lambda) = \frac{2}{d} \left[\left(\frac{1}{h_0} C_{41} - \bar{v}_0 C_{42} \right) (aQ_{22} - bQ_{12}) + \left(\frac{\bar{v}_0}{h_0} C_{43} - C_{44} \right) (aQ_{21} - bQ_{11}) \right] - b;$$

$$Q_{11} = C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12} - \frac{1}{h_0 \bar{v}_0} C_{21} + C_{22},$$

$$Q_{12} = -\bar{v}_0 C_{13} + h_0 C_{14} + \frac{1}{h_0} C_{23} - \frac{1}{\bar{v}_0} C_{24},$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{\bar{v}_0} C_{31} + h_0 C_{32} + \frac{1}{h_0} C_{41} - \bar{v}_0 C_{42}, \quad (20)$$

$$Q_{22} = C_{33} - \frac{h_0}{\bar{v}_0} C_{34} - \frac{\bar{v}_0}{h_0} C_{43} + C_{44}, \quad d = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21},$$

$$G = \exp(v_0 \Delta), \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{k_0}.$$

Амплитуды (19) полей (13) определены. Подставляя поля (13) в интегралы (12), получим решение краевой задачи 1:

$$\vec{E}_2 = \int_0^\infty A(\lambda, -h) \frac{2G}{d} \left(Q_{22} \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) - Q_{21} \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) \right) d\lambda, \quad (21)$$

$$\vec{H}_2 = h_0 \int_0^\infty A(\lambda, -h) \frac{2G}{d} \left(Q_{22} \vec{M}_0^{(-2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) - Q_{21} \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) \right) d\lambda;$$

$$\vec{E}'_1 = \int_0^\infty A(\lambda, -h) \frac{2}{d} \left(P_{22} \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) + P_{21} \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) \right) d\lambda, \quad (22)$$

$$\vec{H}'_1 = h_0 \int_0^\infty A(\lambda, -h) \frac{2}{d} \left(P_{22} \vec{M}_0^{(+2)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) + P_{21} \vec{M}_0^{(+1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) \right) d\lambda,$$

где $P_{22} = (C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12})Q_{22} + (\bar{v}_0 C_{13} - h_0 C_{14})Q_{21} - \frac{1}{2}d$, $P_{21} = \left(\frac{1}{h_0} C_{41} - \bar{v}_0 C_{42} \right) Q_{22} + \left(\frac{\bar{v}_0}{h_0} C_{43} - C_{44} \right) Q_{21}$.

В случае поля магнитного диполя (11) в формулах (19) $a = A(\lambda, -h)$, $b = 0$.

4. Фокусировка электромагнитного поля за экраном

Для получения фокусирующих свойств на материальные параметры экрана D наложим ряд условий [13]:

– первое условие

$$G_r = Z_r = \chi, \quad (23)$$

где χ – комплексное число;

– второе условие

$$\bar{g} = \varepsilon_r \mu_r - G_r Z_r = \varepsilon_r \mu_r - \chi^2 = 1. \quad (24)$$

Применение условий (23), (24) упрощает величины (18):

$$\bar{a} = 0, \quad \bar{g} = 1, \quad \bar{f}_0 = 1, \quad \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 1, \quad g_1 = -1, \quad g_2 = 1,$$

$$q_1 = -1, \quad q_2 = 1, \quad \bar{p}_1 = -\frac{i}{\mu_r}(1 - i\chi), \quad \bar{p}_2 = \frac{i}{\mu_r}(1 + i\chi),$$

$$\bar{p} = \frac{i\mu_r}{2}, \quad \bar{f}_1 = -1, \quad \bar{f}_2 = 1, \quad \bar{b} = \chi, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_0.$$

Для матричных элементов (17) получим значения

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = \text{ch}(\xi_0), \quad C_{14} = C_{23} = C_{32} = C_{41} = 0,$$

$$C_{13} = -\frac{i\chi}{\bar{v}_0} \text{sh}(\xi_0), \quad C_{12} = -\frac{\mu_r}{\bar{v}_0 h_0} \text{sh}(\xi_0), \quad C_{21} = -h_0 \varepsilon_r \bar{v}_0 \text{sh}(\xi_0), \quad (25)$$

$$C_{24} = i\chi \bar{v}_0 \text{sh}(\xi_0), \quad C_{31} = -i\chi \bar{v}_0 \text{sh}(\xi_0), \quad C_{34} = -\frac{\mu_r \bar{v}_0}{h_0} \text{sh}(\xi_0),$$

$$C_{42} = \frac{i\chi}{\bar{v}_0} \text{sh}(\xi_0), \quad C_{43} = -\frac{h_0 \varepsilon_r}{\bar{v}_0} \text{sh}(\xi_0), \quad \xi_0 = v_0 \Delta.$$

Коэффициенты (20) упрощаются:

$$Q_{11} = Q_{22} = Q = 2 \text{ch}(\xi_0) + (\varepsilon_r + \mu_r) \text{sh}(\xi_0), \quad (26)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0, \quad d = Q^2, \quad G = e^{i\xi_0}.$$

Введем параметр фокусировки:

$$\tau = 1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_r + \mu_r), \quad (27)$$

тогда

$$Q = e^{-\xi_0} \left(2 - \tau \left(1 - e^{2\xi_0} \right) \right).$$

Далее вычислим электрическое поле (21) в области D_2 с учетом формул (10), (26):

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \int_0^\infty A(\lambda, -h) \frac{2G}{Q} \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda = \\ &= 2 \int_0^\infty A(\lambda, h_f) \frac{\exp\left(\nu_0(2\Delta - h - h_f)\right)}{2 - \tau(1 - e^{2\xi_0})} \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda,\end{aligned}$$

где h_f – произвольная величина.

Введем еще одно (третье) условие фокусировки:

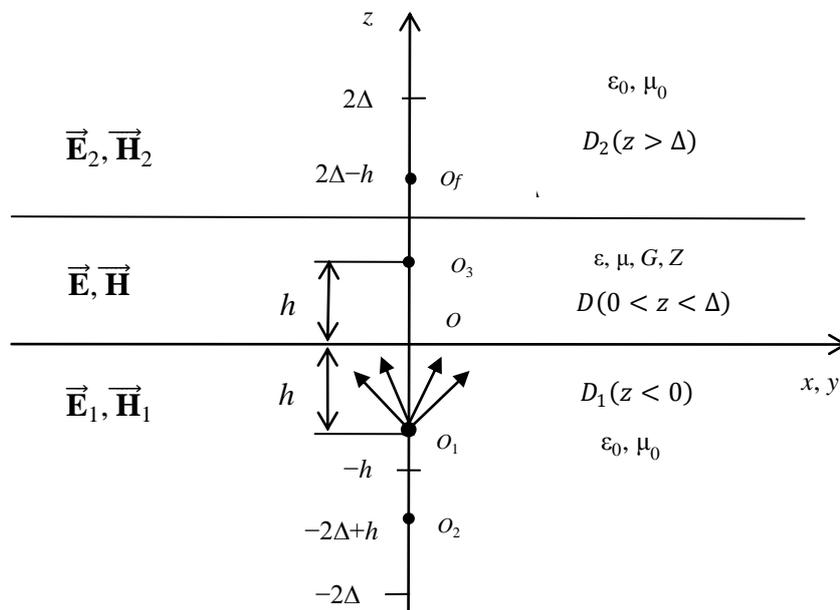
$$\tau = 1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_r + \mu_r) = 0. \quad (28)$$

Величину h_f выберем из условия $h_f = 2\Delta - h$, тогда с учетом (9) получим

$$\vec{E}_2 = \int_0^\infty A(\lambda, h_f) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}, \lambda, k_0) d\lambda = \vec{E}_m(O_f), \quad (29)$$

где O_f – точка с координатами $(0, 0, h_f)$.

Выводы. При выполнении условий (23), (24), (28) электромагнитное поле за экраном в области D_2 является полем магнитного диполя, расположенного в точке O_f (рисунок). При ограничении $0 < h < \Delta$ точка O_f расположена в области D_2 на расстоянии $\Delta - h$ от экрана D , т. е. поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 фокусируется в точке O_f , которая является фокусом первичного поля \vec{E}_0, \vec{H}_0 . В случае $h > \Delta$ точка O_f является фиктивным фокусом, лежащим вне области D_2 . ■



Плоская линза с точками фокусировки поля:

O_1 – источник поля; O_f, O_2 – фокусы; O_3 – фиктивный фокус

Таким образом, условия (23), (24), (28) выделяют из параметров биизотропного материала фокусирующие параметры. Для описания параметров фокусировки выберем произвольный комплексный параметр δ и определим два комплексных многообразия материальных параметров экрана D :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r = \delta, \quad \mu_r = -2 - \delta, \quad G_r = Z_r = i(1 + \delta); \\ \varepsilon_r = \delta, \quad \mu_r = -2 - \delta, \quad G_r = Z_r = -i(1 + \delta),\end{aligned}\tag{30}$$

где параметр δ параметризует многообразия. При $\delta = -1$ получим метаматериал Веселаго: $\varepsilon_r = -1$, $\mu_r = -1$, $G_r = Z_r = 0$.

5. Фокусировка электромагнитного поля перед экраном

Вычислим отраженное поле (22) в области D_1 . Учитывая равенства (25), (26), найдем величины

$$\begin{aligned}P_{22} = Q \left(C_{11} - h_0 \bar{\nu} C_{12} - \frac{1}{2} Q \right) = \frac{Q}{2} (\mu_r - \varepsilon_r) \operatorname{sh}(\xi_0) = \frac{Q}{4} (\mu_r - \varepsilon_r) (e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}), \\ P_{21} = -\nu_0 Q C_{42} = -i\chi Q \operatorname{sh}(\xi_0) = -\frac{i\chi}{2} Q (e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}).\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}'_1 = \int_0^\infty \frac{2}{Q} A(\lambda, -h) (e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}) (\alpha_1 \vec{M}_0^{(+1)} - \alpha_2 \vec{M}_0^{(+2)}) d\lambda = \\ = \int_0^\infty \frac{2A(\lambda, -h) (e^{2\nu_0 \Lambda} - 1)}{2 - \tau(1 - e^{2\xi_0})} (\alpha_1 M_0^{(+1)} - \alpha_2 \vec{M}_0^{(+2)}) d\lambda,\end{aligned}$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{4}(\mu_r - \varepsilon_r)$, $\alpha_2 = \frac{i\chi}{2}$.

При фокусировке (28) с учетом формулы (10)

$$\vec{\mathbf{E}}'_1 = \int_0^\infty A(\lambda, h_f) (\alpha_1 \vec{M}_0^{(+1)} - \alpha_2 \vec{M}_0^{(+2)}) d\lambda - \int_0^\infty A(\lambda, -h) (\alpha_1 M_0^{(+1)} - \alpha_2 \vec{M}_0^{(+2)}) d\lambda.\tag{31}$$

Рассмотрим точки $O_2(0, 0, -h_f)$, $O_3(0, 0, h)$. Полагая $h_2 = -h_f$, $h_3 = h$ и сравнивая формулу (31) с интегральными представлениями магнитных и электрических диполей (9) в нижнем полупространстве, получим выражение поля (31) через сумму полей диполей:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}'_1 = \alpha_1 \vec{\mathbf{E}}_m(O_2) - \alpha_2 \vec{\mathbf{E}}_e(O_2) - \alpha_1 \vec{\mathbf{E}}_m(O_3) + \alpha_2 \vec{\mathbf{E}}_e(O_3) = \\ = A_0 (\alpha_1 \tilde{m}_{01}(\vec{r}_2, k_0) - \alpha_2 \tilde{n}_{01}(\vec{r}_2, k_0) - \alpha_1 \tilde{m}_{01}(\vec{r}_3, k_0) + \alpha_2 \tilde{n}_{01}(\vec{r}_3, k_0)).\end{aligned}$$

Отметим, что для метаматериала ($\delta = -1$) коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т. е. отраженное поле $\vec{\mathbf{E}}'_1 = 0$, $\vec{\mathbf{H}}'_1 = 0$ в D_1 и в области D_1 присутствует только первичное поле $\vec{\mathbf{E}}_0, \vec{\mathbf{H}}_0$ с источником в точке O_1 .

Выводы. При выполнении условий (23), (24), (28) для материальных параметров экрана (30) отраженное электромагнитное поле перед экраном в области D_1 является суммой полей двух магнитных и двух электрических диполей, попарно расположенных в точках O_2 и O_3 (см. рис. 1). При условии $0 < h < 2\Delta$ точка O_2 расположена в области D_1 на расстоянии h_f от экрана D , т. е. поле $\vec{\mathbf{E}}'_1, \vec{\mathbf{H}}'_1$ фокусируется в точке O_2 в виде суммы магнитного и электричес-

кого диполей. В этом случае фокус расположен в области D_1 , в которой также размещен источник первичного поля \vec{E}_0, \vec{H}_0 . В случае $h > 2\Delta$ точка O_2 является фиктивным фокусом, лежащим вне области D_1 . Точка O_3 во всех случаях является фиктивным фокусом. ■

Заключение

Фокусирующие материальные параметры биизотропного экрана составляют два одномерных линейных многообразия, параметризуемых комплексной величиной δ . Экран толщиной Δ , выполненный из фокусирующего материала, осуществляет фокусировку поля магнитного диполя, расположенного перед экраном на расстоянии h от экрана. При условии $0 < \alpha < 1$ ($\alpha = \frac{h}{\Delta}$) образуются два фокуса – перед экраном и за экраном, т. е. имеем двухстороннюю фокусировку. Поле за экраном фокусируется в виде магнитного диполя, а поле перед экраном – в виде суммы магнитного и электрического диполей. При условии $1 < \alpha < 2$ образуется один фокус перед экраном. При $\alpha > 2$ фокусы отсутствуют.

Список литературы

1. Виноградов, А.П. Электродинамика композитных материалов / А.П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
2. Неганов, В.А. Современное состояние электродинамики искусственных киральных сред (обзор) / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 7–33.
3. Гуляев, Ю.В. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения / Ю.В. Гуляев, А.Н. Лагарьков, С.А. Никитов // Вестник Российской академии наук. – 2008. – Т. 78, № 5. – С. 438–457.
4. Cui, T.J. Metamaterials. Theory. Design and Applications / T.J. Cui, D.R. Smith, R. Lui. – Springer, 2009. – 367 p.
5. Шевченко, В.В. Локализация стационарного электромагнитного поля при помощи плоской границы метаматериала / В.В. Шевченко // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181, № 11. – С. 1171–1182.
6. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В.Т. Ерофеенко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.
7. Ерофеенко, В.Т. Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2013. – № 4. – С. 113–120.
8. Ерофеенко, В.Т. Преобразование пучков электромагнитных волн при прохождении через экран из кирального метаматериала / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Информатика. – 2013. – № 1. – С. 5–17.
9. Веселаго, В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // В.Г. Веселаго // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92, № 3. – С. 517–523.
10. Веселаго, В.Г. О формулировке принципа Ферма для света, распространяющегося в веществах с отрицательным преломлением // Успехи физических наук. – 2002. – Т. 172, № 10. – С. 1215–1218.
11. Ерофеенко, В.Т. Прохождение симметричных волн через бианизотропно-гиротропную перегородку в круглом волноводе с импедансными граничными условиями / В.Т. Ерофеенко, А.К. Сеницын // Информатика. – 2014. – № 4. – С. 5–18.
12. Шевченко, В.В. Геометрическая теория плоской линзы из кирального метаматериала / В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54, № 6. – С. 696–700.
13. Ерофеенко, В.Т. Краевая задача проникновения электромагнитных полей дипольных источников через биизотропный экран / В.Т. Ерофеенко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 2. – С. 71–76.

14. Ерофеенко, В.Т. Модели граничных условий на композиционных экранах для электромагнитных полей с осевой симметрией / В.Т. Ерофеенко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 2. – С. 41–45.

15. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.

Поступила 28.11.2015

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем
математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by*

V.T. Erofeenko

TWO-SIDED FOCUSING OF ELECTROMAGNETIC FIELD OF POINT SOURCE BY MEANS OF PLANAR LENS FROM METAMATERIALS

An analytical solution of the boundary-value problem of penetration of electromagnetic field of magnetic dipole through the planar lens from the focusing materials is suggested. It is demonstrated, that for the lenses from focusing materials two focuses are formed: first is over the screen and the second is in front of the screen in the source area. The field of focus in front of the lens is equal to the sum of the fields of magnetic and electric dipoles.