

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АРХИТЕКТУРЫ И ВЫЧИСЛЕНИЯ

PARALLEL ARCHITECTURE AND COMPUTING



УДК 519.168+519.873
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-1-72-87>

Оригинальная статья
Original Paper

Векторизация итерационных вычислительных процессов и оценки временного ускорения

В. М. Демиденко¹✉, В. И. Бенедиктович²

¹Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, Минск, 220070, Беларусь
✉E-mail: vmdemidenko@yandex.ru

²Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11, Минск, 220072, Беларусь
E-mail: benedvi@gmail.com

Аннотация

Цели. Решается задача эффективной организации выполнения последовательных вычислительных процессов в векторном режиме с учетом возможностей современных высокопроизводительных векторно-конвейерных ЭВМ. Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена тем, что такие процессы, возникающие при циклической обработке данных и в итерационных алгоритмах, являются наиболее сложными для распараллеливания. При решении задачи ставились три цели: построение математической модели, учитывающей основные архитектурные и вычислительные особенности современных векторно-конвейерных ЭВМ; расчет оптимального суммарного времени выполнения векторных операций; оценка временного выигрыша по сравнению с последовательным режимом обработки данных.

Методы. Для реализации поставленных целей и доказательства основных и вспомогательных утверждений применялся оригинальный метод, включающий установление справедливости индуктивных предположений в рассматриваемых случаях, а также иллюстративный метод теории расписаний, использующий диаграммы Ганта.

Результаты. Предложена векторная модель реализации последовательных вычислений, учитывающая основные особенности векторно-конвейерных ЭВМ. Определено оптимальное суммарное время выполнения последовательных вычислений в векторном режиме и получена нижняя оценка временного выигрыша по сравнению с последовательным режимом их выполнения.

Заключение. Установлено, что при обработке в последовательном режиме скалярных входных данных векторными операциями с длиной конвейера k возможно ускорение не менее чем в $nN/(nk + N)$ раз, где N – размер входа, n – число векторных и соответствующих им скалярных операций. Оценка временного ускорения при векторизации вычислений приводится в сравнении с последовательным режимом их выполнения.

Ключевые слова: конвейеризация, векторизация вычислений, показатель векторизуемости, временное ускорение, векторно-конвейерные вычислительные системы, распараллеливание вычислительных процессов

Благодарности. Исследование выполнено в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025».

Для цитирования. Демиденко, В. М. Векторизация итерационных вычислительных процессов и оценки временного ускорения / В. М. Демиденко, В. И. Бенедиктович // Информатика. – 2022. – Т. 19, № 1. – С. 72–87. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-1-72-87>

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 31.12.2021

Подписана в печать | Accepted 28.02.2022

Опубликована | Published 29.03.2022

A vectorization of iterative computational processes and time acceleration estimates

Vitaly M. Demidenko^{1✉}, Vladimir I. Benediktovich²

¹*Belarusian State Economic University,
av. Partizansky, 26, Minsk, 220070, Belarus,*

✉E-mail: vmdemidenko@yandex.ru

²*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,
st. Surganova, 11, Minsk, 220072, Belarus*

E-mail: benedvi@gmail.com

Abstract

Objectives. The problem of efficient organization of the execution of sequential computational processes in the vector mode is solved, taking into account the capabilities of modern high-performance vector-pipeline computers. The relevance of the problem under consideration is due to the fact that processes that occur during cyclic data processing and in iterative algorithms are the most difficult to parallelize. In solving the problem, three main objectives were set. Construction of a mathematical model that takes into account the main architectural and computational features of modern vector-conveyor computers. Calculation of the optimal total execution time of vector operations. Evaluation of the time gain compared to the sequential mode of data processing.

Methods. To achieve the objectives and to prove the main and auxiliary statements, an original method was used, including establishing the validity of the inductive assumptions in the cases under consideration, as well as an illustrative method of scheduling theory using Gantt charts.

Results. A vector model for the implementation of sequential calculations is proposed, which takes into account the main features of vector-conveyor computers. The optimal total execution time of sequential calculations in the vector mode is determined, and a lower estimate of the time gain is obtained in comparison with the sequential mode of their execution.

Conclusion. It has been established that when processing scalar input data in the sequential mode by vector operations with a pipeline length k , acceleration is possible by at least a factor $nN/(nk + N)$, where N is the size of the input, n is the number of vector and corresponding scalar operations. The estimation of the time acceleration in the vectorization of calculations is compared with the sequential mode of their execution.

Keywords: pipelining, vectoring of calculations, vectorizability index, temporal acceleration, vector-pipeline computing systems, calculating processes paralleling

Acknowledgements. The research was carried out within the framework of the state scientific research program "Convergence-2025".

For citation. Demidenko V. M., Benediktovich V. I. A vectorization of iterative computational processes and time acceleration estimates. *Informatika [Informatics]*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 72–87 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-1-72-87>

Conflict of interest. The authors declare of no conflict of interest.

Введение. В настоящее время широкое применение высокопроизводительных вычислительных систем, обладающих средствами векторно-конвейерной и параллельной обработки данных, приводит к необходимости адаптации имеющихся и разработки новых методов и алгоритмов

решения научных и практических задач, учитывающих возможности и архитектурные особенности таких систем. Решение обозначенной проблемы возможно либо с помощью имеющихся высокоэффективных вычислительных систем, либо с помощью современных технологий организации вычислительных процессов с учетом архитектурных особенностей ЭВМ.

С момента появления современных вычислительных средств происходит постоянный процесс их совершенствования. При этом одна из тенденций в развитии вычислительного дела неразрывно связана с созданием высокопроизводительных систем векторно-конвейерного типа. Например, суперкомпьютер Cray Titan компании Cray, установленный в Ок-Риджской национальной лаборатории (США), в настоящее время является первым среди векторно-конвейерных вычислительных систем, потеснив экс-лидера Sequoia с пиковой производительностью 16,32 петафлоп/с, который занимал 12-е место среди самых быстрых суперкомпьютеров мира. Пиковая производительность Cray Titan теоретически составляет 27,11 петафлоп/с. Доступ к Cray Titan получают проекты, связанные с процессами сгорания топлива, разработкой передовых технологий в атомной энергетике, новых материалов и исследованиями в области изменения климата.

Несмотря на наличие высокопроизводительных вычислительных систем, их практическое применение широким кругом пользователей затруднено ввиду значительной стоимости и отсутствия доступа к «облачным» вычислениям в Интернете. Поэтому наиболее приемлемым способом повышения эффективности программных и алгоритмических средств является их адаптация к архитектуре векторно-конвейерных ЭВМ.

Известно, что вычислительные процессы, связанные с выполнением операций в последовательном режиме, трудно реализовывать на многопроцессорных системах. Например, такая ситуация возникает при использовании итеративных алгоритмов, в которых на предшествующих шагах вырабатываются входные данные для последующих шагов. В настоящей работе исследуется один из основных способов эффективной организации последовательных вычислительных процессов в векторном режиме с применением макроопераций, позволяющих обрабатывать упорядоченные наборы данных фиксированной длины. По этому направлению зарубежными и отечественными исследователями получены многочисленные результаты [1–5]. В 1980–1990-х гг. в Институте математики НАН Беларуси проводились исследования, связанные с разработкой программно-алгоритмического обеспечения для векторно-конвейерной ЭВМ «Электроника СС БИС», архитектурно сходной с американским аналогом CREY-1. В частности, для введенного в работе [6] класса комбинаторных алгоритмов так называемых неветвящихся вычислительных процессов посредством реконструкции описывающих их графов удалось получить оптимальное расписание их реализации. В статье [7] проиллюстрирована возможность значительного сокращения трудоемкости отдельных комбинаторных алгоритмов не только за счет сегментации скалярных операций, но и за счет применения их векторных аналогов. В работе [8] посредством детального исследования алгоритмов цифровой и лексикографической сортировок реализовано их эффективное отображение на архитектуру векторно-конвейерной ЭВМ «Электроника СС БИС», что позволило получить программные реализации алгоритмов, не улучшаемые имеющимися трансляторами.

Кроме того, в настоящей статье подсчитано суммарное время реализации вычислительного процесса в векторно-конвейерном режиме и получена оценка возможного ускорения в сравнении с применением только скалярных операций.

Постановка задачи и основные определения. Рассмотрим последовательный вычислительный процесс, который состоит в выполнении n операций в заданном порядке над множеством операндов $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell, \dots, \theta_N\}$ при следующих ограничениях:

- 1) каждая последующая операция начинается после обработки предшествующими операциями всех операндов из Θ ;
- 2) каждая операция осуществляется только над одним операндом и каждый операнд обрабатывается только одной операцией в порядке их нумерации.

Реализуем данный вычислительный процесс в скалярном и векторном режимах и оценим возможный временной выигрыш второго режима по сравнению с первым.

Скалярная модель рассматриваемого вычислительного процесса состоит в следующем. Имеется n скалярных операций $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n\}$, которые нужно выполнить в последовательном режиме над N операндами из Θ . Далее операнды из Θ называются скалярными. Время выполнения операции ω_i над произвольным операндом θ_j из Θ , измеряемое в тактах, определено и равно t_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, N$ (такт вычислительной системы – временная единица порядка $10^{-6} - 10^{-9}$ с).

Пусть $T_s(\omega_i, \Theta)$ – время обработки всех операндов из множества Θ операцией ω_i , $T_s(\Omega, \Theta)$ – суммарное время выполнения всех операций из Ω над операндами из Θ . Тогда, очевидно (рис. 1),

$$T_s(\omega_i, \Theta) = \sum_{j=1}^N t_{ij}$$

и, следовательно,

$$T_s(\Omega, \Theta) = \sum_{i=1}^n T_s(\omega_i, \Theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N t_{ij}. \quad (1)$$

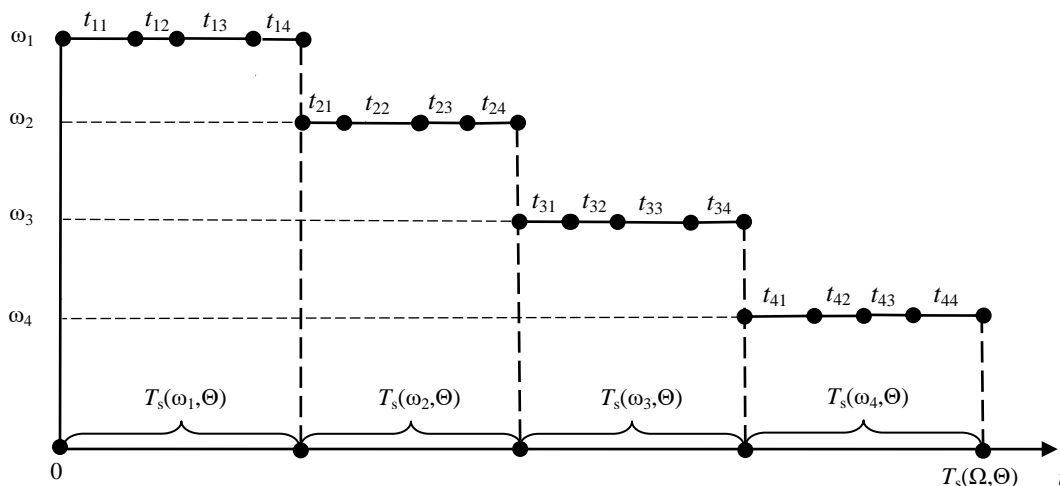


Рис. 1. Временная диаграмма скалярной модели при $n = 4, N = 4$

Fig. 1. Timing diagram of the scalar model at $n = 4, N = 4$

В современных векторно-конвейерных ЭВМ наряду со скалярными операциями используются их векторные аналоги – так называемые векторные операции. Специфика последних состоит в том, что они могут в последовательном режиме обрабатывать упорядоченные наборы операндов заданной длины, которые далее называются векторными операндами. Каждая векторная операция может обрабатывать только один векторный операнд, и каждый из них может обрабатываться только одной векторной операцией. Выполнение различных векторных операций над разными векторными операндами может происходить одновременно при их доступности, т. е. в параллельном режиме. Началу обработки операндов векторной операцией предшествует временной интервал ее настройки на обработку операндов, при этом настройка каждой последующей операции начинается в момент начала выполнения предшествующей.

Векторная модель рассматриваемого вычислительного процесса состоит в следующем. Вместо множества скалярных операций $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n\}$ используются их векторные аналоги, т. е. множество векторных операций $\bar{\Omega} = \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_i, \dots, \bar{\omega}_n\}$, которые могут выполняться над векторными операндами длиной k в заданном порядке. Множество таких векторных операндов $\bar{\Theta} = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_\ell, \dots, \bar{\theta}_m\}$ строится посредством разбиения множества скалярных

операндов $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j, \dots, \theta_N\}$ на $m = N/k$ подмножеств $\bar{\theta}_\ell = \{\theta_{\ell 1}, \theta_{\ell 2}, \dots, \theta_{\ell p}, \dots, \theta_{\ell k}\}$, где $\theta_j = \theta_{\ell p}$, $p = j - [j/k]$, $\ell = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, N$. Будем предполагать, что N кратно k , так как в противном случае увеличение числа элементов в Θ на $m(k+1) - N$ операндов при оценке временного ускорения приводит к увеличению суммарного времени выполнения векторных операций над векторными операндами по отношению к $T_s(\Omega, \Theta)$.

Любая операция $\bar{\omega}_i$ над операндом $\bar{\theta}_\ell$ в векторном режиме состоит в обработке каждой его компоненты $\theta_{\ell p}$ в последовательном режиме за тактовое время t . Таким образом, можно считать, что верно равенство

$$t_{\bar{\theta}_\ell} = kt \quad (2)$$

для любых $\ell = 1, 2, \dots, m$, где $t_{\bar{\theta}_\ell}$ – время выполнения $\bar{\omega}_i$ над $\bar{\theta}_\ell$.

В реальных векторно-конвейерных ЭВМ операция $\bar{\omega}_i$ над компонентой векторного операнда реализуется за время, которое равно одному машинному такту и значительно меньше времени t_{ij} выполнения скалярной операции $\omega_i \in \Omega$ над скалярным операндом $\theta_j \in \Theta$. Следовательно, будем предполагать, что в векторной модели вычислений $t \ll t_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, N$.

При формулировке вспомогательных и основных утверждений и при их доказательстве используются следующие обозначения:

$\bar{\Omega}_i = \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_p, \dots, \bar{\omega}_i\}$ – подмножество первых i векторных операций из $\bar{\Omega}$, $1 \leq i \leq n$;

$\bar{\Theta}_\ell = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_q, \dots, \bar{\theta}_\ell\}$ – подмножество первых ℓ векторных операндов из $\bar{\Theta}$, $1 \leq \ell \leq m$;

$T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\theta}_\ell)$ – время выполнения операции $\bar{\omega}_i$ над операндом $\bar{\theta}_\ell$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\ell = 1, 2, \dots, m$, при условии выполнения всех предшествующих операций $\bar{\omega}_p$, $p = 1, 2, \dots, i-1$;

$T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\theta}_\ell)$ – время выполнения всех операций из $\bar{\Omega}_i$ над операндом $\bar{\theta}_\ell$;

$T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_\ell)$ – время выполнения всех операций из $\bar{\Omega}_i$ над операндами из $\bar{\Theta}_\ell$;

$T_v(\bar{\Omega}, \bar{\Theta})$ – время выполнения всех операций из $\bar{\Omega}$ над операндами из $\bar{\Theta}$;

$t_\tau(\bar{\omega}_i)$ – время завершения настройки операции $\bar{\omega}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, при условии выполнения всех предшествующих операций $\bar{\omega}_p$, $p = 1, 2, \dots, i-1$;

$t_0(\bar{\omega}_i)$ – время начала операции $\bar{\omega}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, при условии осуществления всех предшествующих операций $\bar{\omega}_p$, $p = 1, 2, \dots, i-1$.

Введенные временные интервалы далее называются векторным временем выполнения соответствующих векторных операций над операндами.

Непосредственно из определения $t_\tau(\bar{\omega}_i)$, $t_0(\bar{\omega}_i)$ следует справедливость равенств

$$t_\tau(\bar{\omega}_i) = t_0(\bar{\omega}_{i-1}) + \tau_i, \quad t_0(\bar{\omega}_i) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\theta}_1) - t_{\bar{\theta}_1}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3)$$

Векторная обработка данных. Для получения нижней оценки коэффициента ускорения при использовании векторной модели вычислений в сравнении со скалярной моделью применяются три вспомогательных и одно основное утверждение, которое определяет формулу для вычисления векторного времени выполнения всех операций из $\bar{\Omega}$ над всеми операндами из $\bar{\Theta}$:

$$T_v(\bar{\Omega}, \bar{\Theta}) = \sum_{p=2}^n \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}). \quad (4)$$

В первых двух вспомогательных утверждениях устанавливается время выполнения всех операций из $\bar{\Omega}_i$ над всеми операндами $\bar{\Theta}_\ell$ для частных случаев, когда $i \in \{1, 2, 3\}$, $1 \leq \ell \leq m$ и $2 \leq i \leq n$, $\ell = 2$ соответственно. Третье утверждение расширяет аналогичный результат на общий случай, когда $2 \leq i \leq n$ и $2 \leq \ell \leq m$.

Лемма 1. Для $i \in \{1, 2, 3\}$ и любых $1 \leq \ell \leq m$ справедливы равенства

$$T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell) = \tau_1 + \sum_{r=1}^{\ell} t_{\bar{\theta}_r}, \quad (5)$$

$$T_v(\bar{\Omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell), \quad (6)$$

$$T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_\ell) = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell). \quad (7)$$

Доказательство. При $i=1$ и любом $1 \leq \ell \leq m$ справедливость равенства (5) непосредственно следует из равенства (2) и последовательного выполнения операции $\bar{\omega}_1$ над операндами $\bar{\Theta}_\ell$.

Пусть $i=2$ и $\ell=1$, тогда возможны два случая: $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$ либо $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$. В обоих случаях операция $\bar{\omega}_2$ над $\bar{\theta}_1$ должна начаться после настройки операции $\bar{\omega}_2$ и выполнения $\bar{\omega}_1$ над $\bar{\theta}_1$. В первом случае в силу $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$ и (3) имеют место соотношения

$$t_\tau(\bar{\omega}_2) = \tau_1 + \tau_2 \geq \tau_1 + t_{\bar{\theta}_1} = T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1), \quad (8)$$

из которых (рис. 2) следуют равенства

$$T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_2, \bar{\theta}_1) = t_\tau(\bar{\omega}_2) + t_{\bar{\theta}_1} = \tau_1 + \tau_2 + t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1).$$

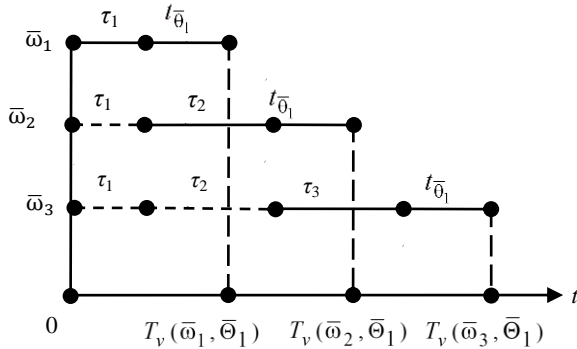


Рис. 2. Временная диаграмма векторной модели при $i \in \{1, 2, 3\}$, $\ell = 1$, $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$, $\tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$

Fig. 2. Timing diagram of the vector model at $i \in \{1, 2, 3\}$, $\ell = 1$, $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$, $\tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$

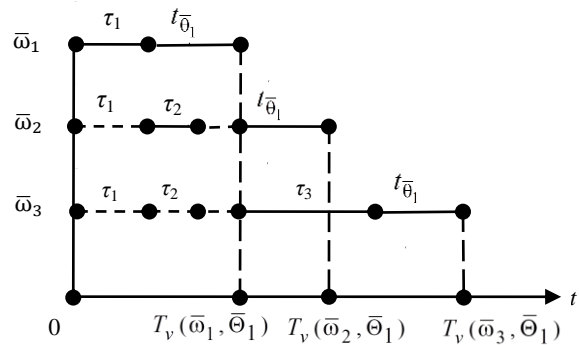


Рис. 3. Временная диаграмма векторной модели при $i \in \{1, 2, 3\}$, $\ell = 1$, $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$, $\tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$

Fig. 3. Timing diagram of the vector model at $i \in \{1, 2, 3\}$, $\ell = 1$, $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$, $\tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$

Во втором случае в силу $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$ выполняется неравенство, противоположное соотношению (8). Следовательно, $t_0(\bar{\omega}_2) = T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1)$, что влечет (рис. 3) справедливость равенств

$$T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_2, \bar{\theta}_1) = t_0(\bar{\omega}_2) + t_{\bar{\theta}_1} = T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1) + t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1).$$

Таким образом, при $\ell = 1$ равенство (6) доказано.

Пусть $i = 3$ и $\ell = 1$, тогда возможен один из четырех случаев:

$$\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}; \tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}; \tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}; \tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}. \quad (9)$$

Во всех четырех случаях операция $\bar{\omega}_3$ над $\bar{\theta}_1$ должна начаться после ее настройки и после выполнения $\bar{\omega}_2$ над $\bar{\theta}_1$. Поэтому переменная $t_0(\bar{\omega}_3)$ должна принимать наибольшее значение из $t_\tau(\bar{\omega}_3)$ и $T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1)$.

В первом случае из неравенств $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$, равенства 3 и доказанного при $\ell = 1$ равенства (6) следует справедливость равенств

$$t_0(\bar{\omega}_2) = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) - t_{\bar{\theta}_1} = \tau_2 + \tau_1 + t_{\bar{\theta}_1} - t_{\bar{\theta}_1} = \tau_2 + \tau_1,$$

$$t_\tau(\bar{\omega}_3) = t_0(\bar{\omega}_2) + \tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3,$$

из которых вытекают соотношения

$$T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) = \tau_1 + \tau_2 + t_{\bar{\theta}_1} \leq \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = t_\tau(\bar{\omega}_3).$$

Таким образом, доказано, что $t_0(\bar{\omega}_3) = \max\{t_\tau(\bar{\omega}_3), T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) = t_\tau(\bar{\omega}_3)\}$, откуда с учетом первого равенства (3) следуют равенства (см. рис. 2)

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\theta}_1) = t_0(\bar{\omega}_3) + t_{\bar{\theta}_1} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1),$$

доказывающие справедливость равенства (7) в рассматриваемом случае.

Во втором случае после выполнения равенства (6) при $\ell = 1$, неравенств $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$ и с учетом (3) получаем равенства

$$t_0(\bar{\omega}_2) = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) - t_{\bar{\theta}_1} = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1 + t_{\bar{\theta}_1} - t_{\bar{\theta}_1} = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1,$$

$$t_\tau(\bar{\omega}_3) = t_0(\bar{\omega}_2) + \tau_3 = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1 + \tau_3.$$

Полученные равенства устанавливают справедливость соотношений (рис. 4)

$$T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\theta}_1) = t_0(\bar{\omega}_3) + t_{\bar{\theta}_1} = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1 + \tau_3 + t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1),$$

которые, в свою очередь, доказывают выполнение (7) при $\ell = 1$.

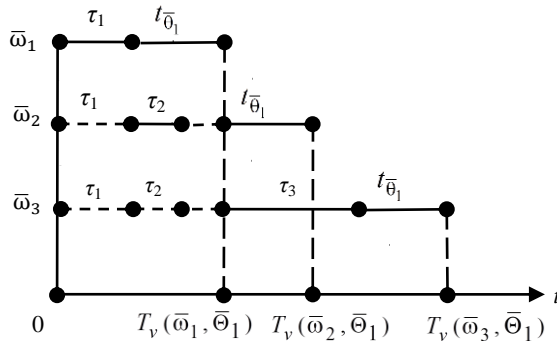


Рис. 4. Временная диаграмма векторной модели при $i \in \{1, 2, 3\}, \ell = 1, \tau_2 < t_{\theta_1}, \tau_3 \geq t_{\theta_1}$

Fig. 4. Timing diagram of the vector model at $i \in \{1, 2, 3\}, \ell = 1, \tau_2 < t_{\theta_1}, \tau_3 \geq t_{\theta_1}$

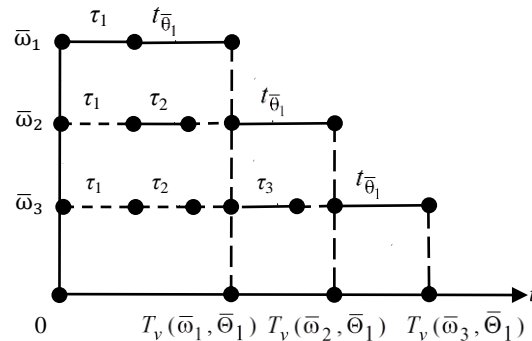


Рис. 5. Временная диаграмма векторной модели при $i \in \{1, 2, 3\}, \ell = 1, \tau_2 < t_{\theta_1}, \tau_3 < t_{\theta_1}$

Fig. 5. Timing diagram of the vector model at $i \in \{1, 2, 3\}, \ell = 1, \tau_2 < t_{\theta_1}, \tau_3 < t_{\theta_1}$

В третьем случае, используя неравенства $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$, $\tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$, равенство (6) при $\ell = 1$ и равенства (3), по аналогии убеждаемся в выполнении равенств

$$\begin{aligned} t_0(\bar{\omega}_2) &= T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) - t_{\bar{\theta}_1} = \tau_2 + \tau_1 + t_{\bar{\theta}_1} - t_{\bar{\theta}_1} = \tau_1 + \tau_2, \\ t_\tau(\bar{\omega}_3) &= t_0(\bar{\omega}_2) + \tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) &= \tau_2 + \tau_1 + t_{\bar{\theta}_1} > \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = t_\tau(\bar{\omega}_3), \\ t_0(\bar{\omega}_3) &= \max\{t_\tau(\bar{\omega}_3), T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1)\} = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1). \end{aligned}$$

Из второго соотношения и доказанного при $\ell = 1$ равенства (6) получаем цепочку

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\theta}_1) = t_0(\bar{\omega}_3) + t_{\bar{\theta}_1} = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) + t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1),$$

из которой (см. рис. 4) следует справедливость равенства (7) при $\ell = 1$ в третьем случае.

В четвертом случае по аналогии убеждаемся в том, что из неравенств $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$, $\tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$, равенства (6) при $\ell = 1$ и равенств (3) следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned} t_0(\bar{\omega}_2) &= T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) - t_{\bar{\theta}_1} = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1 + t_{\bar{\theta}_1} - t_{\bar{\theta}_1} = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1, \\ t_\tau(\bar{\omega}_3) &= t_0(\bar{\omega}_2) + \tau_3 = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1 + \tau_3, \end{aligned}$$

откуда вытекают равенства

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) &= t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1 + t_{\bar{\theta}_1} > t_{\bar{\theta}_1} + \tau_1 + \tau_3 = t_\tau(\bar{\omega}_3), \\ t_0(\bar{\omega}_3) &= \max\{t_\tau(\bar{\omega}_3), T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1)\} = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1). \end{aligned}$$

Из второго равенства и доказанного при $\ell = 1$ равенства (6) получаем соотношения

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\theta}_1) = t_0(\bar{\omega}_3) + t_{\bar{\theta}_1} = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\theta}_1) + t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1),$$

из которых (см. рис. 5) следует справедливость равенства (7) при $\ell = 1$ в четвертом случае.

Так как во всех четырех случаях $\bar{\Theta}_1 = \{\bar{\theta}_1\}$, справедливость леммы 1 доказана при $i \in \{1, 2, 3\}$ и $\ell = 1$.

Выполнение равенств (6) и (7) для $i = 2, 3$ и любых $2 \leq \ell \leq m$ доказывается индукцией по ℓ . Предполагая, что для любых $1 \leq \ell - 1 \leq m - 1$ выполняются равенства

$$T_v(\bar{\Omega}_2, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}), \quad (10)$$

$$T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}), \quad (11)$$

убедимся в справедливости для $2 \leq \ell \leq m$ равенств

$$T_v(\bar{\Omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell), \quad (12)$$

$$T_v(\bar{\Omega}_3, \bar{\Theta}_\ell) = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell). \quad (13)$$

Докажем равенство (12). Возможны два случая: $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$ либо $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$. В первом случае в силу (5), (10) и равенства $t_{\bar{\theta}_\ell} = t_{\bar{\theta}_1}$ получаем равенства

$$T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_1}, \quad T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = \tau_2 + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}), \quad (14)$$

из которых и неравенства $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$ вытекает неравенство $T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_{\ell-1}) \geq T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell)$. Его справедливость означает, что операция $\bar{\omega}_1$ над операндом $\bar{\theta}_\ell$ заканчивается до момента времени $T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_{\ell-1})$. Поэтому с учетом (10) имеют место равенства

$$T_v(\bar{\Omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\theta_\ell} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\theta_\ell} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell),$$

из которых следует справедливость равенства (12) в первом случае.

Во втором случае из неравенства $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$ и равенств (14) получаем соотношение $T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_{\ell-1}) < T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell)$, которое означает, что операция $\bar{\omega}_2$ над операндом $\bar{\theta}_\ell$ может начаться не ранее момента времени $T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell)$ и, следовательно,

$$T_v(\bar{\Omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell) + t_{\theta_\ell} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell).$$

Таким образом, равенство (12) доказано для $i = 2$ и любых $2 \leq \ell \leq m$.

Убедимся в справедливости равенства (13). Для этого вначале докажем, что при выполнении первой и второй пар неравенств (9) имеет место соотношение

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) \geq T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_\ell). \quad (15)$$

Действительно, пусть $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}$ и $\tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$, тогда в силу равенств (5), (11) и (12) справедливо выражение

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = \tau_2 + \tau_3 + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - \tau_2 - T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - t_{\bar{\theta}_\ell} = \tau_3 - t_{\bar{\theta}_\ell} \geq 0,$$

так как $t_{\bar{\theta}_1} = t_{\bar{\theta}_\ell}$. Если $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$ и $\tau_3 \geq t_{\bar{\theta}_1}$, то по аналогии убеждаемся в следующем:

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = t_{\bar{\theta}_1} + \tau_3 + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - t_{\bar{\theta}_1} - T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - t_{\bar{\theta}_\ell} = \tau_3 - t_{\bar{\theta}_\ell} \geq 0.$$

Таким образом, справедливость неравенства (15) в рассмотренных случаях доказана.

Далее, неравенство (15) гарантирует, что к моменту времени $T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1})$ операция $\bar{\omega}_2$ над $\bar{\theta}_\ell$ завершена и поэтому $T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell}$. Из полученного соотношения и равенства (11) следуют (рис. 6) равенства

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_\ell) &= \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell} = \\ &= \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell). \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что при выполнении первой и второй пар неравенств (9) имеет место равенство (13).

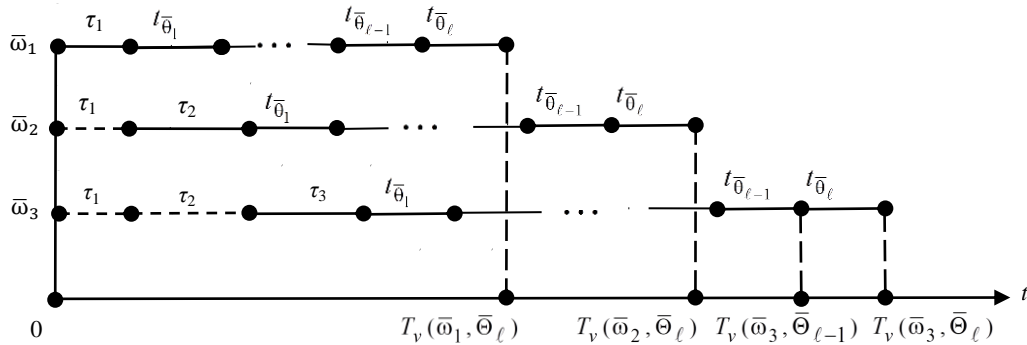


Рис. 6. Временная диаграмма векторной модели при $i = 3, 2 \leq \ell \leq m, \tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$

Fig. 6. Timing diagram of the vector model at $i = 3, 2 \leq \ell \leq m, \tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$

Убедимся в том, что если имеет место третья либо четвертая пара неравенств из (9), то выполняется равенство

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_\ell). \quad (16)$$

Пусть $\tau_2 \geq t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$, тогда следствием (5), (11) и (12) являются равенства

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = \tau_2 + t_{\bar{\theta}_1} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - \tau_2 - T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - t_{\bar{\theta}_\ell} = 0,$$

так как $t_{\bar{\theta}_\ell} = t_{\bar{\theta}_1}$. Если $\tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}$ и $\tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$, то по аналогии доказываются равенства

$$T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - T_v(\bar{\omega}_2, \bar{\Theta}_\ell) = t_{\bar{\theta}_1} + t_{\bar{\theta}_1} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - t_{\bar{\theta}_1} - T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - t_{\bar{\theta}_\ell} = 0.$$

Из равенства (16) следует, что при выполнении третьей либо четвертой пары неравенств из (9) к моменту времени $T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1})$ выполнение $\bar{\omega}_2$ над $\bar{\theta}_\ell$ закончено. Следовательно, с учетом равенства (11) (рис. 7) получим выражение

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_\ell) &= T_v(\bar{\omega}_3, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell} = \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell} = \\ &= \max\{\tau_2, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_3, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell), \end{aligned}$$

что доказывает справедливость равенства (13) в рассматриваемых случаях.

Таким образом, справедливость леммы 1 доказана.

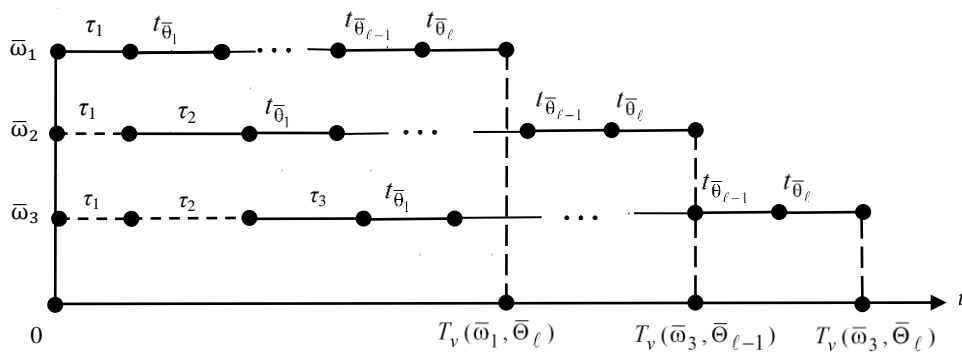


Рис. 7. Временная диаграмма векторной модели при $i = 3, 2 \leq \ell \leq m, \tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$

Fig. 7. Timing diagram of the vector model at $i = 3, 2 \leq \ell \leq m, \tau_2 < t_{\bar{\theta}_1}, \tau_3 < t_{\bar{\theta}_1}$

Лемма 2. Если $\ell = 1, 2$, то для любых $1 \leq i \leq n$ выполняется равенство

$$T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_\ell) = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\Theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell). \quad (17)$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что если $\ell = 1, 2$ и $i = 1, 2, 3$, то равенство (17) выполняется. Поэтому доказательство (17) проводится индукцией по i .

Предположим справедливость равенства (17) при $\ell = 1, 2$ и $3 \leq i-1 \leq n-1$ и докажем ее при $\ell = 1, 2$ и $4 \leq i \leq n$.

При $\ell = 1$ и $i-1$ равенство (17) принимает следующий вид:

$$T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_1) = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_1) = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\Theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_1). \quad (18)$$

В силу (3) для моментов времени $t_0(\bar{\omega}_{i-1})$ и $t_\tau(\bar{\omega}_i)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} t_0(\bar{\omega}_{i-1}) &= T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_1) - t_{\bar{\Theta}_1} = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\Theta}_1}\} + \tau_1, \\ t_\tau(\bar{\omega}_i) &= t_0(\bar{\omega}_{i-1}) + \tau_i = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\Theta}_1}\} + \tau_1 + \tau_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Для τ_i и $t_{\bar{\Theta}_1}$ возможны два случая: $\tau_i \geq t_{\bar{\Theta}_1}$ либо $\tau_i < t_{\bar{\Theta}_1}$. В первом случае в силу $\tau_i \geq t_{\bar{\Theta}_1}$ выполняются соотношения

$$t_\tau(\bar{\omega}_i) = t_0(\bar{\omega}_{i-1}) + \tau_i \geq t_0(\bar{\omega}_{i-1}) + t_{\bar{\Theta}_1} = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_1),$$

из которых следует, что $t_0(\bar{\omega}_i) = t_\tau(\bar{\omega}_i)$, так как к моменту времени $t_\tau(\bar{\omega}_i)$ закончилась операция $\bar{\omega}_{i-1}$ над операндом $\bar{\Theta}_1$ (рис. 8). Следствием равенства $t_0(\bar{\omega}_i) = t_\tau(\bar{\omega}_i)$ и второго равенства (19) являются соотношения

$$T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_1) = t_0(\bar{\omega}_i) + t_{\bar{\Theta}_1} = t_\tau(\bar{\omega}_i) + t_{\bar{\Theta}_1} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\Theta}_1}\} + \tau_1 + t_{\bar{\Theta}_1} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\Theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_1),$$

так как $\tau_i = \max\{\tau_i, t_{\bar{\Theta}_1}\}$. Таким образом, в первом случае при $\ell = 1$ справедливость равенства (17) доказана.

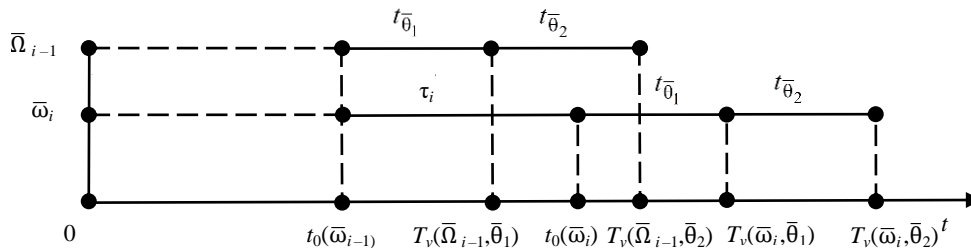


Рис. 8. Временная диаграмма при $\tau_i \geq t_{\bar{\Theta}_2}$

Fig. 8. Timing diagram at $\tau_i \geq t_{\bar{\Theta}_2}$

Пусть выполняется неравенство $\tau_i < t_{\bar{\theta}_1}$. Тогда по аналогии получаем соотношения

$$t_\tau(\bar{\omega}_i) = t_0(\bar{\omega}_{i-1}) + \tau_i < t_0(\bar{\omega}_{i-1}) + t_{\bar{\theta}_1} = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\theta}_1),$$

следствием которых является равенство $t_0(\bar{\omega}_i) = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\theta}_1)$. Из данного равенства и выражения (18) вытекает (рис. 9) справедливость соотношений

$$T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\theta}_1) + t_{\bar{\theta}_1} = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1) + t_{\bar{\theta}_1} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1),$$

так как здесь $t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\}$. Таким образом, во втором случае справедливость равенства (17) при $\ell = 1$ доказана.

В связи с тем что и в первом, и втором случаях выполняются соотношения

$$\bar{\Theta}_1 = \{\bar{\theta}_1\}, \quad T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_1) \leq T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\theta}_1),$$

очевидно, что $T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_1) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\theta}_1)$ (рис. 8 и 9). Таким образом, при $\ell = 1$ справедливость равенства (17) доказана.

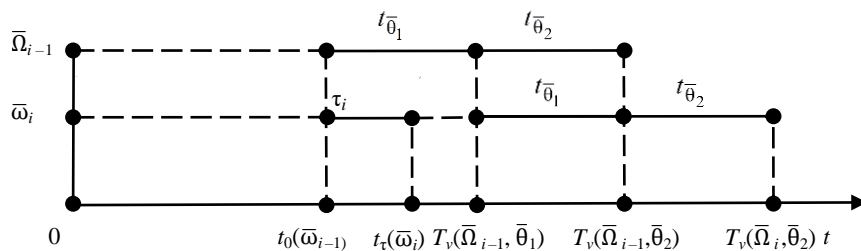


Рис. 9. Временная диаграмма при $\tau_i < t_{\bar{\theta}_2}$

Fig. 9. Timing diagram at $\tau_i < t_{\bar{\theta}_2}$

Убедимся в справедливости соотношения (17) при $\ell = 2$. Для этого запишем индуктивное равенство

$$T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_2) = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\theta}_2) = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_2) \quad (20)$$

и, используя доказанное при $\ell = 1$ равенство (17), вычислим разность

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_1) - T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_2) &= \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_1) - \\ &- \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} - T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_2) = \max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\} - t_{\bar{\theta}_2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Возможны два случая: $\tau_i \geq t_{\bar{\theta}_1}$ либо $\tau_i < t_{\bar{\theta}_1}$. В первом случае из разности (21) следует неравенство $\max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\} - t_{\bar{\theta}_2} \geq 0$, так как верно равенство $t_{\bar{\theta}_2} = t_{\bar{\theta}_1}$, которое влечет $T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_1) \geq T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_2)$.

Полученное неравенство и доказанное при $\ell = 1$ равенство (17) гарантируют, что к моменту времени $T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_1) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\theta}_1)$ операции из $\bar{\Omega}_{i-1}$ закончили обработку операндов из $\bar{\Theta}_2$. Следовательно, выполняются равенства (см. рис. 8)

$$T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_2) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\theta}_1) + t_{\bar{\theta}_2} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\theta}_1) + t_{\bar{\theta}_2} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_2).$$

Таким образом, в первом случае при $\tau_i \geq t_{\bar{\theta}_1}$ справедливость равенства (17) при $\ell = 2$ доказана.

Во втором случае при $\tau_i < t_{\bar{\theta}_1}$ из (21) вытекает равенство $\max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\} - t_{\bar{\theta}_2} = 0$, так как $t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\}$, $t_{\bar{\theta}_2} = t_{\bar{\theta}_1}$, что влечет $T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_1) = T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_2)$. Поэтому операция $\bar{\omega}_i$ над операндом $\bar{\theta}_2$ начинается в момент времени $T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_2)$. С учетом равенства (21) это приводит к соотношениям (см. рис. 9)

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_2) &= T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_2) + t_{\bar{\theta}_2} = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_2) + t_{\bar{\theta}_2} = \\ &= \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_2), \end{aligned}$$

так как в рассматриваемом случае $t_{\bar{\theta}_2} = t_{\bar{\theta}_1} = \max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\}$. Следовательно, лемма 2 доказана.

Теорема 1. Для любых $2 \leq \ell \leq m$, $2 \leq i \leq n$ справедливо равенство

$$T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_\ell) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_\ell) = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell). \quad (22)$$

Доказательство. Равенство (7), доказанное для $i=3$ и любых $2 \leq \ell \leq m$ в лемме 1, и равенство (17) из леммы 2, справедливость которого доказана для $\ell = 2$ и любых $2 \leq i \leq n$, позволяют сделать два индуктивных предположения о выполнении равенств

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\Omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) &= T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}), \\ T_v(\bar{\Omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_\ell) &= T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_\ell) = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_\ell). \end{aligned} \quad (23)$$

Из приведенных равенств вытекает справедливость соотношений

$$\begin{aligned} T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_\ell) &= \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + \max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - \\ &- \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} - T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) - t_{\bar{\theta}_\ell} = \max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\} - t_{\bar{\theta}_\ell}, \end{aligned}$$

следствием которых является равенство

$$T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_\ell) + \max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\} - t_{\bar{\theta}_\ell}. \quad (24)$$

Возможны два случая: $\tau_i \geq t_{\bar{\theta}_1}$ либо $\tau_i < t_{\bar{\theta}_1}$. В первом случае следствием равенств (24) и $t_{\bar{\theta}_i} = t_{\bar{\theta}_1}$ является неравенство $T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) \geq T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_{\ell-1})$, которое означает, что к моменту времени $T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1})$ операция $\bar{\omega}_{i-1}$ над операндом $\bar{\Theta}_{\ell-1}$ уже закончилась. Поэтому операция $\bar{\omega}_i$ над операндом $\bar{\Theta}_{\ell-1}$ должно начаться в момент времени $T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1})$. Таким образом, имеет место равенство $T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell}) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell}$. Из этого равенства и первого равенства (23) вытекает справедливость соотношений

$$T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell}) = T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell}),$$

следствием которых является равенство (22) в первом случае.

Во втором случае при $\tau_i < t_{\bar{\theta}_1}$ выполняется равенство $T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell-1}) = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_{\ell-1})$, так как из $\tau_i < t_{\bar{\theta}_1}$ и $t_{\bar{\theta}_\ell} = t_{\bar{\theta}_1}$ следует, что $\max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_1}\} - t_{\bar{\theta}_\ell} = 0$. Таким образом, операция $\bar{\omega}_i$ над операндом $\bar{\Theta}_{\ell-1}$ начинается в момент времени $T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_{\ell-1})$, что влечет $T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell}) = T_v(\bar{\omega}_{i-1}, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell}$. Из этого равенства и второго равенства (23) вытекает справедливость соотношений

$$T_v(\bar{\omega}_i, \bar{\Theta}_{\ell}) = \sum_{p=2}^{i-1} \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell-1}) + t_{\bar{\theta}_\ell} = \sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}_{\ell}),$$

так как $\max\{\tau_i, t_{\bar{\theta}_\ell}\} = t_{\bar{\theta}_\ell}$ при $\tau_i < t_{\bar{\theta}_1}$. Из полученных соотношений следует справедливость (22) во втором случае. Следовательно, теорема 1 доказана.

Прямым следствием лемм 1, 2 и теоремы 1 является

Теорема 2. *Время выполнения операций из $\bar{\Omega}$ над множеством операндов из $\bar{\Theta}$ в конвейерном режиме определяется равенством*

$$T_v(\bar{\Omega}, \bar{\Theta}) = T_v(\bar{\omega}_n, \bar{\Theta}) = \sum_{p=2}^n \max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta}). \quad (25)$$

Оценка возможного ускорения. Для оценки ускорения при конвейерном режиме выполнения последовательных вычислений используется коэффициент

$$K_{eff} = \frac{T_s(\Omega, \Theta)}{T_v(\bar{\Omega}, \bar{\Theta})}.$$

В реальных векторно-конвейерных ЭВМ длина векторного операнда составляет от 64 до 128 и более машинных слов, поэтому при оценке коэффициента ускорения можно полагать с учетом равенства (2), что верно соотношение

$$\max\{\tau_p, t_{\bar{\theta}_1}\} = t_{\bar{\theta}_1} = kt, \quad p = 2, 3, \dots, n. \quad (26)$$

Кроме того, время обработки каждой из компонент векторных операндов из $\bar{\Theta}$ векторными операциями из $\bar{\Omega}$ равно одному такту. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что для времен t_{ij} обработки скалярными операциями $\Omega_i \in \Omega$ скалярных операндов $\Theta_j \in \Theta$ выполняются неравенства $t_{ij} \gg t$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Используя равенства (1), (2), (25), (26) и неравенства $t_{\min} \geq t$ и $\tau_1 \leq kt$, в случае $N = mk$ получим следующую нижнюю оценку коэффициента ускорения:

$$K_{eff} = \frac{T_s(\Omega, \Theta)}{T_v(\bar{\Omega}, \bar{\Theta})} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N t_{ij}}{\sum_{p=2}^i \max\{\tau_p, t_{\theta_1}\} + T_v(\bar{\omega}_1, \bar{\Theta})} \geq \frac{nNt_{\min}}{\tau_1 + (n-1)kt + mkt} \geq \frac{nmkt}{\tau_1 + (n-1)kt + mkt} \geq \frac{nm}{n+m}.$$

Использование неравенства $\tau_1 \leq kt$ при получении оценки приемлемо, так как настройка векторных операций на выполнение составляет несколько машинных тактов, т. е. $\tau_1 / kt < 1$.

После умножения числителя и знаменателя отношения $\frac{nm}{n+m}$ на k найденную нижнюю оценку для K_{eff} можно записать в равносильном виде:

$$K_{eff} \geq \frac{nN}{nk + N}.$$

Для оценки качества векторизации программ или алгоритмов применяется показатель векторизуемости [1], определяемый равенством $v = \tilde{N} / \tilde{T}$, где \tilde{N} – число операций алгоритма, а \tilde{T} – число тактов векторно-конвейерной ЭВМ, требуемых для его выполнения. В зависимости от значения v предложена следующая схема классификации алгоритмов: $v \leq 1/4$ – алгоритм скалярный, $v \leq 1/2$ – полувекторный, $v \approx 1$ – векторный, $v \approx 2$ и более – супервекторный.

Полученная оценка позволяет классифицировать предложенную схему векторизации последовательных вычислений. Так как $\tilde{N} = nN$, $\tilde{T} = nk + N$, простая проверка показывает, что рассмотренный алгоритм векторизации последовательных вычислений является скалярным при $n = 5$, $k = 64$, $N = 20$, $v \approx 0,29$; векторным при $n = 5$, $k = 64$, $N = 100$, $v \approx 1,19$; супервекторным при $n = 5$, $k = 64$, $N = 150$, $v \approx 2,40$.

Закключение. Доказано, что при выполнении последовательных вычислений с использованием векторных операций возможно ускорение не менее чем в $nN/(nk + N)$ раз, где N – общее число обрабатываемых скалярных операндов, n – число скалярных и соответствующих им векторных операций, k – длина конвейера векторных операций, т. е. число машинных слов, одновременно обрабатываемых векторной операцией в последовательном режиме. Оценка коэффициента ускорения при конвейеризации вычислений приводится в сравнении с последовательным режимом их выполнения.

Вклад авторов. В. М. Демиденко провел анализ архитектурных и вычислительных особенностей современных векторно-конвейерных вычислительных систем и сделал расчет временных затрат, связанных с конвейеризацией трудных для распараллеливания последовательных вычислений. В. И. Бенедиктович получил нижние оценки временного ускорения при выполнении последовательных вычислений в векторном режиме.

Список использованных источников

1. Векторизация программ: теория, методы, реализация : сб. ст. / под ред. Г. Д. Чинина. – М. : Мир, 1991. – 271 с.
2. Воеводин, В. В. Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
3. Топорков, В. В. Модели распределенных вычислений / В. В. Топорков. – М. : Физматлит, 2004. – 320 с.

4. Миллер, Р. Последовательные и параллельные алгоритмы: общий подход / Р. Миллер, Л. Боксер ; пер. с англ. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 406 с.
5. Pllana, S. Programming multi core and many core computing system / S. Pllana, F. Xhafa. – John Wiley & Sons, 2017. – 528 p.
6. Демиденко, В. М. Библиотека базовых программных модулей решения комбинаторных задач упорядочения для векторно-конвейерной ЭВМ / В. М. Демиденко, П. С. Кляус, Н. С. Коваленко // Проблемы создания суперЭВМ, суперсистем и эффективность их применения : тез. докл. Первой Всесоюз. конф., Минск, 15–17 сент. 1987. – Минск, 1987. – Ч. 2. – С. 31–32.
7. Демиденко, В. М. О возможности эффективной конвейеризации одного комбинаторного алгоритма / В. М. Демиденко, П. С. Кляус // Вопросы кибернетики. Разработка и использование суперЭВМ : сб. науч. тр. – М. : Институт проблем кибернетики, 1987. – Вып. 7. – С. 96–104.
8. Демиденко, В. М. Базовые процедуры в алгоритмах лексикографической цифровой сортировки и их реализации на векторно-конвейерной ЭВМ / В. М. Демиденко, Л. И. Шевченко // Проблемы создания суперЭВМ, суперсистем и эффективность их применения : тез. докл. Первой Всесоюз. конф., Минск, 15–17 сент. 1987. – Минск, 1987. – Ч. 2. – С. 33–35.

Referenses

1. In Chinin G. D. (ed.) Vektorizatsiya programm: teoriya, metody, realizatsiya : sbornik statej. *Vectorization of Programs: Theory, Methods, Implementation: Collection of Articles*. Moscow, Mir, 1991, 271 p. (In Russ.).
2. Voyevodin V. V., Voyevodin V. V. Parallelnyye vychisleniya. *Parallel Computing*. Saint Petersburg, BHV-Peterburg, 2002, 608 p. (In Russ.).
3. Toporkov V. V. Modeli raspredelennykh vychisleniy. *Distributed Computing Models*. Moscow, Fizmatlit, 2004, 320 p. (In Russ.).
4. Miller R., Boxer L. *Algorithms Sequential and Parallel: A Unified Approach*. 1st ed. Prentice Hall, 1999, 330 p.
5. Pllana S., Xhafa F. *Programming Multi Core and Many Core Computing System*. John Wiley & Sons, 2017, 528 p.
6. Demidenko V. M., Klyaus P. S., Kovalenko N. S. *Library of basic software modules for solving combinatorial ordering problems for a vector-conveyor computer*. Problemy sozdaniya superEVM, supersistem i effektivnost' ikh primeneniya : tezisy dokladov Pervoy Vsesoyuznoy konferentsii, Minsk, 15–17 sentyabrya 1987 [*Problems of Creating supercomputers, Supersystems and the Effectiveness of Their Application: Abstracts of the Report of the First All-Union Conference, Minsk, 15–17 September 1987*]. Minsk, 1987, part 2, pp. 31–32 (In Russ.).
7. Demidenko V. M., Klyaus P. S. *On the possibility of efficient pipelining of one combinatorial algorithm*. Voprosy kibernetiki. Razrabotka i ispol'zovaniye superEVM [*Questions of Cybernetics. Development and use of Supercomputers*]. Moscow, Institute of Problems of Cybernetics, 1987, iss. 7, pp. 96–104 (In Russ.).
8. Demidenko V. M., Shevchenko L. I. *Basic procedures in lexicographic digital sorting algorithms and their implementation on a vector-conveyor computer*. Problemy sozdaniya superEVM, supersistem i effektivnost' ikh primeneniya : tezisy dokladov Pervoy Vsesoyuznoy konferentsii, Minsk, 15–17 sentyabrya 1987 [*Problems of Creating supercomputers, Supersystems and the Effectiveness of Their Application: Abstracts of the Report of the First All-Union Conference, Minsk, 15–17 September 1987*]. Minsk, 1987, part 2, pp. 33–35 (In Russ.).

Информация об авторах

Демиденко Виталий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный экономический университет.
E-mail: vmdemidenko@yandex.ru

Бенедиктович Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси.
E-mail: benedvi@gmail.com

Information about the authors

Vitaly M. Demidenko, D. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Belarusian State Economic University.
E-mail: vmdemidenko@yandex.ru

Vladimir I. Benedictovich, Ph. D. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus.
E-mail: benedvi@gmail.com