



УДК 537.87:519.688
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-3-48-58>

Оригинальная статья
Original Paper

Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном в присутствии цилиндра

Г. Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22, Гродно, 230023, Беларусь
E-mail: gsys@grsu.by

Аннотация. Построено аналитическое решение граничной задачи, описывающей процесс проникновения низкочастотного магнитного поля через тонкостенный цилиндрический экран в присутствии цилиндра, с использованием приближенных граничных условий. Источником поля является тонкая нить бесконечно малой длины с бесконечно малым поперечным сечением, по которой циркулирует ток. Нить расположена в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического экрана, во внешней области по отношению к экрану. Первоначально потенциал исходного магнитного поля был представлен в виде сферических гармонических функций, затем с помощью теорем сложения, связывающих сферические и цилиндрические гармонические функции, стал представлен в виде суперпозиции цилиндрических гармонических функций. Вторичные потенциалы магнитного поля также представлены в виде суперпозиции цилиндрических гармонических функций в трехмерном пространстве. Показано, что решение поставленной граничной задачи сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, входящих в представление вторичных полей. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента экранирования внешнего магнитного поля при прохождении через цилиндрический экран из меди в присутствии цилиндра. Результаты вычислений представлены в виде графиков. Полученные результаты могут быть использованы для экранирования технических устройств и биологических объектов от воздействия магнитных полей и обеспечения экологической среды вокруг работающих электроустановок и устройств.

Ключевые слова: граничная задача, потенциал, магнитное поле, тонкостенный цилиндрический экран, теоремы сложения, гармонические функции

Благодарности. Работа выполнялась в рамках подпрограммы «Математические модели и методы» ГПНИ «Конвергенция 2025».

Для цитирования. Шушкевич, Г. Ч. Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном в присутствии цилиндра / Г. Ч. Шушкевич // Информатика. – 2021. – Т. 18, № 3. – С. 48–58. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-3-48-58>

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию | Received 16.06.2021
Подписана в печать | Accepted 19.07.2021
Опубликована | Published 29.09.2021

Analytical solution of problem of shielding low-frequency magnetic field by thin-walled cylindrical screen in presence of cylinder

Gennady Ch. Shushkevich

*Yanka Kupala State University of Grodno,
st. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus
E-mail: gsys@grsu.by*

Abstract. The analytical solution of boundary value problem describing the process of penetration of low-frequency magnetic field through thin-walled cylindrical screen with cylindrical inclusion is constructed by use of approximate boundary conditions. The source of the field is a thin thread of infinitely small length with an infinitely small cross-section where current circulates. Thread is located in a plane which is perpendicular to axis of cylindrical screen, in outer region with respect to a screen. Initially the potential of initial magnetic field is represented as spherical harmonic functions, then using addition theorems connecting spherical and cylindrical harmonic functions, it became as cylindrical harmonic functions superposition. Secondary potentials of magnetic field are also presented as superposition of cylindrical harmonic functions in three-dimensional space. It is shown that the solution of formulated boundary value problem is reduced to the solution of linear algebraic equations system for coefficients included in the representation of secondary fields. The influence of some aspects of the problem on the value of the screening coefficient of an external magnetic field when passing through a cylindrical copper screen in the presence of a cylindrical inclusion is studied numerically. Calculation results are presented in graphs form. Obtained results can be used to shield technical devices and biological objects against the effects of magnetic fields to provide ecological surrounding of operating electrical installations and devices.

Keywords: boundary value problem, potential, magnetic field, thin-walled cylindrical screen, addition theorems, harmonic functions

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the "Mathematical Models and Methods" subprogram of the State Pedagogical Research Institute "Convergence 2025".

For citation. Shushkevich G. Ch. Analytical solution of problem of shielding low-frequency magnetic field by thin-walled cylindrical screen in presence of cylinder. *Informatics*, 2021, vol. 18, no. 3, pp. 48–58 (In Russ.). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2021-18-3-48-58>

Conflict of interest. The author declare of no conflict of interest.

Введение. В условиях широкого использования во всех сферах человеческой деятельности электротехнических, электронных и радиоэлектронных приборов и оборудования актуальной задачей является формирование электромагнитной обстановки. Электромагнитная обстановка представляет собой совокупность электромагнитных полей в заданной области пространства, которая может влиять как на биологические объекты, так и на конкретные электронные устройства. Для создания благоприятной электромагнитной обстановки осуществляется электромагнитное экранирование^{1,2} [1].

Источниками низкочастотных электромагнитных излучений являются линии электропередач, силовые и трансформаторные подстанции, приборы и электроустановки на предприятиях, в научно-исследовательских лабораториях, лечебных и профилактических заведениях [2].

Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы: конечных разностей, конечных элементов, интегральных уравнений³ [3–5]. Между тем актуальность разработки новых аналитических и численно-

¹Electromagnetic Shielding [Electronic resource]. – Mode of access: https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_shielding. – Date of access: 10.04.2021.

²Practical EM Shielding [Electronic resource]. – Mode of access: <https://learnemc.com/practical-em-shielding>. – Date of access: 10.04.2021.

³Modeling and Optimizing Electromagnetic Shielding with COMSOL Multiphysics [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.simtcsolution.fr/en/client-cases/security-strength-of-materials/modeling-and-optimizing-electromagnetic-shielding-with-comsol-multiphysics>. – Date of access: 10.04.2021.

аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Аналитические методы по-прежнему остаются главными средствами решения фундаментальных проблем, создают основу для тестирования решений краевых задач, полученных численными методами.

Метод разделения переменных и аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики [5]. При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применяется метод теорем сложения⁴ [6]. Для моделирования процесса проникновения магнитных полей через тонкостенные экраны используют усредненные граничные условия, которые связывают магнитное поле по обе стороны тонкостенного проводящего экрана и исключают рассмотрение поля внутри экрана [7–11]. В работе [12] численно показано, что усредненные граничные условия достаточно точно описывают процесс проникновения поля через тонкостенный цилиндрический экран в широком диапазоне частот (плоскопараллельная задача).

В статье [13] разработана математическая модель экранирования магнитного поля цилиндрическим тонкостенным экраном, выполненным из материала с магнитной проницаемостью, которая нелинейно зависит от напряженности магнитного поля. Трехмерная математическая модель сплошного цилиндрического экрана для защиты от действия переменного электромагнитного поля построена в программном продукте ANSYS NFSS [14].

В настоящей статье представлена методика аналитико-численного решения граничной трехмерной задачи, описывающей процесс проникновения низкочастотного магнитного поля через тонкостенный цилиндрический экран с цилиндрическим включением, с использованием теории сферических, цилиндрических функций и Python-библиотек Numpy, Scipy, Matplotlib [15].

Постановка задачи. Пусть в пространстве R^3 находится тонкостенный цилиндрический экран Γ толщиной Δ и бесконечный круговой металлический цилиндр радиуса b , ограниченный поверхностью S . Область пространства между экраном Γ и поверхностью S обозначим через D_1 , внешнюю область по отношению к экрану Γ – D_2 , область оболочки Γ – D . Плоскостное сечение геометрии задачи показано на рис. 1.

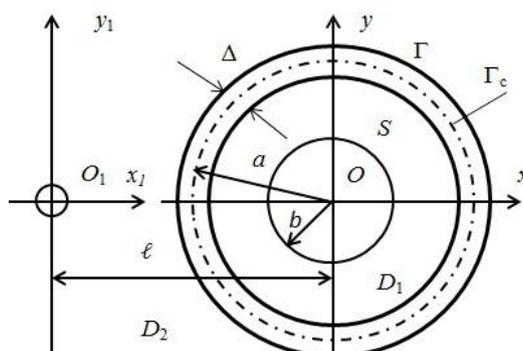


Рис. 1. Сечение цилиндрического экрана

Fig. 1. Section of cylindrical screen

Тонкостенный экран Γ выполнен из материала с тремя электромагнитными параметрами: ε – диэлектрическая проницаемость, μ – абсолютная магнитная проницаемость, γ – удельная электрическая проводимость. Область D_m , $m = 1, 2$, заполнена средой с магнитной проницаемостью μ_m .

⁴Ерофеевко, В. Т. Метод теорем сложения и теория усредненных граничных условий в краевых задачах электродинамики : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.03 / В. Т. Ерофеевко, БГУ. – Минск, 1993. – 29 с.

В точках O, O_1 введем декартовы координаты с одинаково направленными осями координат и соответствующие цилиндрические координаты $\{\rho, z, \varphi\}$ в точке O (в точке O_1 – аналогично):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leq \rho < \infty, -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty < z < \infty$. Точка O_1 лежит на оси Ox_1 , расстояние между точками O, O_1 обозначим через ℓ .

На плоскости $O_1x_1y_1$ расположен источник поля – тонкая нить с бесконечно малым поперечным сечением, по которой циркулирует ток I . В результате взаимодействия первичного магнитного поля с экраном Γ образуются вторичные магнитные поля. Обозначим потенциал вторичного магнитного поля в области D_2 через U_2 , в области D_1 – через U_1 , потенциал исходного магнитного поля – через U_0 . Реальный магнитный потенциал и вектор напряженности магнитного поля определяются формулами

$$U_m = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} U_m), \quad \vec{H}_m = -\operatorname{grad} U_m, \quad m = 0, 1, 2.$$

В случае тонкостенных экранов магнитное поле внутри экрана не исследуется, а сшивается с помощью специальных граничных условий на срединной поверхности экрана Γ_c .

Срединная поверхность экрана Γ_c и поверхность S в цилиндрической системе координат описываются следующим образом:

$$\Gamma_c = \{\rho = a, -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty < z < \infty\}, \quad S = \{\rho = b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}.$$

Постановка задачи. Требуется найти скалярные магнитные потенциалы U_m в области $D_m, m = 1, 2$, которые удовлетворяют:

– уравнению Лапласа

$$\Delta U_m \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_m + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U_m + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_m = 0;$$

– граничным условиям на срединной поверхности Γ_c [16]

$$\mu_2 \frac{\partial(U_0 + U_2)}{\partial \rho} - \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial \rho} = -pF(U_0 + U_1 + U_2), \quad (1)$$

$$\mu_2 \frac{\partial(U_0 + U_2)}{\partial \rho} + \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial \rho} = qF(U_0 + U_2 - U_1), \quad (2)$$

где $p = \mu\delta/2, q = 2/i\omega\delta\gamma, \delta = 2\operatorname{tg}(k\Delta/2)/k, k = \omega\sqrt{i\omega\mu\gamma}, 0 \leq \arg k < \pi;$

– граничному условию на поверхности S

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U_1 = 0, \quad \rho = b; \quad (3)$$

– условию на бесконечности

$$U_2(M) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где M – произвольная точка пространства.

Граничный оператор в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$F(u) = (\vec{n}, \text{rot}[\vec{n}, \text{grad} u]) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Решение задачи. Потенциал исходного магнитного поля можно представить равенством [17]

$$U_0 = P \left(\frac{\ell}{r_1} \right)^2 P_1(\cos \theta_1), \quad P = \frac{M_z}{4\pi \ell^2}, \quad (6)$$

где M_z – магнитный момент, $P_n(x)$ – полиномы Лежандра [18].

Далее воспользуемся следующими теоремами сложения (формулами), которые связывают сферические и цилиндрические гармонические функции в системе координат с началом в точке O_1 и цилиндрические гармонические функции в системе координат с началом в точках O и O_1 [19]:

$$r_1^{-n-1} P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi} = \frac{(-j)^{n+m}}{\pi(n-m)!} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \tilde{K}_n(\lambda \rho_1) e^{i(\lambda z_1 + m\varphi_1)} d\lambda, \quad \rho_1 > 0,$$

$$\tilde{K}_n(\lambda \rho_1) e^{i(\lambda z_1 + m\varphi_1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell) e^{i(m-k)\varphi_0} I_n(\lambda \rho) e^{i\lambda z + ik\varphi} d\lambda, \quad \rho < \ell,$$

где $\{\ell, 0, \varphi_0\}$ – цилиндрические координаты точки O в системе координат с началом в точке O_1 .

На основании приведенных выше формул ($\varphi_0 = 0$) представим потенциал исходного магнитного поля в цилиндрической системе координат с началом в точке O :

$$U_0(\rho, z, \varphi) = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\lambda) I_n(\lambda \rho) e^{i\lambda z} d\lambda \right] e^{in\varphi}, \quad (7)$$

где $g_n(\lambda) = i(-1)^{n+1} \frac{\ell^2}{\pi} \lambda \tilde{K}_n(\lambda \ell)$.

В связи с отсутствием осевой симметрии в представлении исходного магнитного поля потенциалы вторичного магнитного поля U_m , $m = 1, 2$, запишем в виде рядов Фурье так, чтобы выполнялись условия на бесконечности (4):

$$U_1(\rho, z, \varphi) = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (X_n(\lambda) \tilde{K}_n(\lambda \rho) + Y_n(\lambda) I_n(\lambda \rho)) e^{i\lambda z} d\lambda \right] e^{in\varphi}, \quad (8)$$

$$U_2(\rho, z, \varphi) = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} Z_n(\lambda) \tilde{K}_n(\lambda \rho) e^{i\lambda z} d\lambda \right] e^{in\varphi}, \quad (9)$$

где $\tilde{K}_n(x) = (\text{sgn})^n K_n(|x|)$, $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, $K_n(x)$ – функция Макдональда [18].

Физическая размерность потенциалов в системе СИ – А.

Неизвестные функции $X_n(\lambda)$, $Y_n(\lambda)$, $Z_n(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий (1)–(3).

Вычислим частные производные $\frac{\partial}{\partial \rho} U_0(\rho, z, \varphi)$, $\frac{\partial}{\partial \rho} U_1(\rho, z, \varphi)$, $\frac{\partial}{\partial \rho} U_2(\rho, z, \varphi)$, принимая во

внимание представления (7)–(9), и выполним граничные условия (1)–(3), учитывая граничный оператор (5). На основании ортогональности функций $\exp(in\varphi)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и преобразования Фурье получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения функций $X_n(\lambda)$, $Y_n(\lambda)$, $Z_n(\lambda)$:

$$\begin{cases} a_{11}(n, \lambda)Z_n(\lambda) + a_{12}(n, \lambda)Y_n(\lambda) + a_{13}(\lambda)X_n(\lambda) = f_1(n, \lambda), \\ a_{21}(n, \lambda)Z_n(\lambda) + a_{22}(n, \lambda)Y_n(\lambda) + a_{23}(\lambda)X_n(\lambda) = f_2(n, \lambda), \\ a_{32}(n, \lambda)Y_n(\lambda) + a_{33}(n, \lambda)X_n(\lambda) = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(n, \lambda) &= \mu_2 \lambda \frac{d}{d\xi} \tilde{K}_n(\xi) - pG_n(\lambda) \tilde{K}_n(\xi), & a_{12}(n, \lambda) &= -\mu_1 \lambda \frac{d}{d\xi} I_n(\xi) - pG_n(\lambda) I_n(\xi), \\ a_{13}(n, \lambda) &= -\mu_1 \lambda \frac{d}{d\xi} \tilde{K}_n(\xi) - pG_n(\lambda) \tilde{K}_n(\xi), & a_{21}(\lambda) &= \mu_2 \lambda \frac{d}{d\xi} \tilde{K}_n(\xi) + qG_n(\lambda) \tilde{K}_n(\xi), \\ a_{22}(\lambda) &= \mu_1 \lambda \frac{d}{d\xi} I_n(\xi) - qG_n(\lambda) I_n(\xi), & a_{23}(n, \lambda) &= \mu_1 \lambda \frac{d}{d\xi} \tilde{K}_n(\xi) - qG_n(\lambda) \tilde{K}_n(\xi), \\ a_{32}(\lambda) &= \frac{d}{d\zeta} I_n(\zeta), & a_{33}(\lambda) &= \frac{d}{d\zeta} \tilde{K}_n(\zeta), & f_1(n, \lambda) &= \left(-\mu_2 \lambda \frac{d}{d\xi} I_n(\xi) + pG_n(\lambda) I_n(\xi) \right) g_n(\lambda), \\ f_2(n, \lambda) &= \left(-\mu_2 \lambda \frac{d}{d\xi} I_n(\xi) - qG_n(\lambda) I_n(\xi) \right) g_n(\lambda), & \xi &= \lambda a, & \zeta &= \lambda b, & G_n(\lambda) &= n^2 / a^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

Вычисление коэффициента экранирования. Коэффициент экранирования исходного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном с цилиндрическим включением в любой точке области D_1 определим как отношение значения вторичного магнитного потенциала U_1 в области D_1 к исходному значению потенциала U_0 :

$$Ke(\rho, z, \varphi) = \frac{|U_1(\rho, z, \varphi)|}{|U_0(\rho, z, \varphi)|}, \quad a + \Delta < \rho < b. \quad (10)$$

Используя Python-библиотеки Numpy, Scipy и Matplotlib [15], проведем вычисления коэффициента экранирования (10) для некоторых параметров задачи. Все сходящиеся бесконечные суммы определим с точностью 10^{-5} . Несобственные интегралы вычислим по методике, предложенной в работе [20, с. 503].

Представим некоторые результаты расчетов. Пусть область D_2 заполнена воздухом ($\mu_2 = 1,0000004\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м), область D_1 – стеклом ($\mu_1 = 0,999987\mu_0$), материал тонкостенного экрана – медь ($\mu = 0,9999904\mu_0$, $\gamma = 5,8 \cdot 10^7$ См/м). Возьмем следующие геометрические параметры задачи: $a = 0,05$ м, $b = 0,02$ м, $\Delta = 0,0025$ м, $\ell = 0,2$ м. На рис. 2 показаны графики значений коэффициента экранирования $Ke(0,035, z, \pi)$ в области D_1 для $0,01$ м $< z < 1$ м и некоторых значений $f = 2\pi\omega$. Из приведенных вычислений следует, что с увеличением частоты

ты исходного поля коэффициент экранирования уменьшается для данных геометрических параметров задачи, т. е. поле практически не проникает через экранирующую систему при увеличении частоты исходного поля.

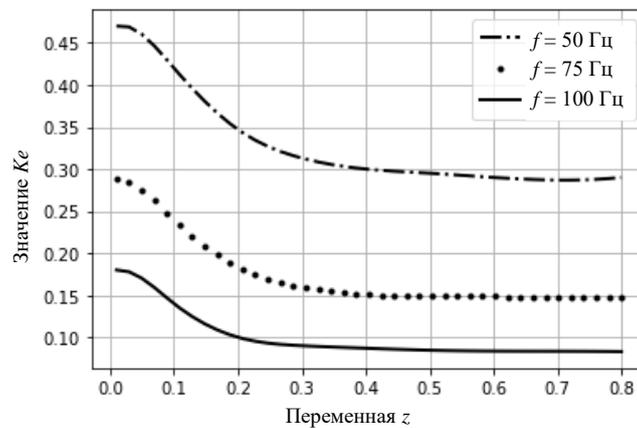


Рис. 2. Графики значений коэффициента экранирования $Ke(0,035, z, \pi)$ для некоторых частот исходного поля

Fig. 2. Shielding coefficient values $Ke(0,035, z, \pi)$ plot for some frequencies of original field

На рис. 3 показано, как изменяются значения коэффициента экранирования $Ke(0,04, z, \pi)$ для различных значений радиуса внутреннего цилиндра при $f = 50$ Гц и тех же значениях геометрических параметров, что и в приведенном выше примере расчетов. Из вычислений следует, что с уменьшением радиуса внутреннего цилиндра коэффициент экранирования уменьшается ($0,01 < z < 0,8$ м). С увеличением значений переменной z ($z > 0,6$ м) различия в значениях коэффициента экранирования практически отсутствуют.

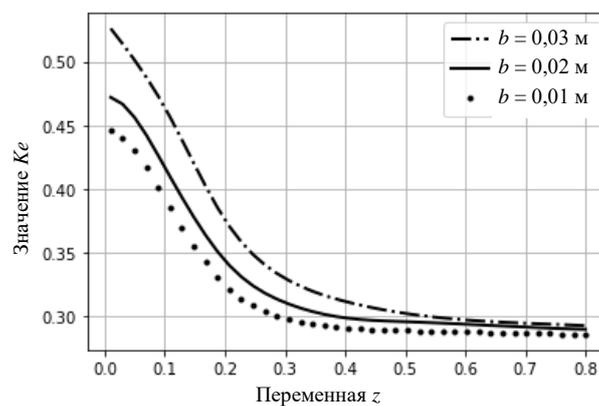


Рис. 3. Графики значений коэффициента экранирования $Ke(0,04, z, \pi)$ для некоторых значений радиуса цилиндра b и $f = 50$ Гц

Fig. 3. Shielding coefficient $Ke(0,04, z, \pi)$ plot for some values of cylinder radius b and $f = 50$ Hz

Пусть $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$, материал тонкостенного экрана – медь и геометрические параметры задачи: $a = 0,1$ м, $b = 0,02$ м, $\Delta = 0,0025$ м, $\ell = 0,2$ м. На рис. 4 изображены графики значений коэффициента экранирования $Ke(\rho, z, \pi)$ для $0,03 < \rho < 0,09$ м, $z = 0,01; 0,05; 0,1$ м и $f = 50$ Гц. Видно, что с увеличением значений переменной z коэффициент экранирования уменьшается.

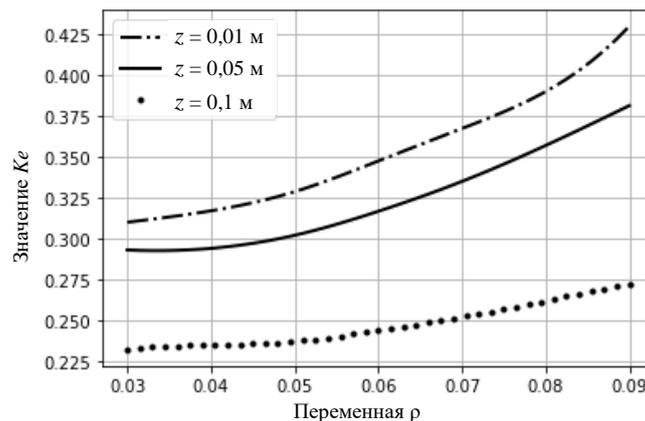


Рис. 4. Графики значений коэффициента экранирования $Ke(\rho, z, \pi)$ для некоторых значений переменной z и $f = 50$ Гц

Fig. 4. Shielding coefficient $Ke(\rho, z, \pi)$ plot for some values of variable z and $f = 50$ Hz

Пусть $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ и геометрические параметры задачи $a = 0,1$ м, $b = 0,02$ м, $\Delta = 0,0025$ м, $\ell = 0,2$ м. Материал тонкостенного экрана имеет удельную электрическую проводимость $\gamma = 5,5 \cdot 10^7$ См/м и различные значения относительной магнитной проницаемости: $\mu_r = 100, 150, 200, 500$. На рис. 5 изображены графики коэффициента экранирования $Ke(\rho, 0,01, \pi)$ для $0,03 < \rho < 0,09$ м и $f = 50$ Гц. Из приведенных вычислений следует, что с увеличением значения относительной магнитной проницаемости материала экрана магнитное поле не проникает через тонкостенный экран.

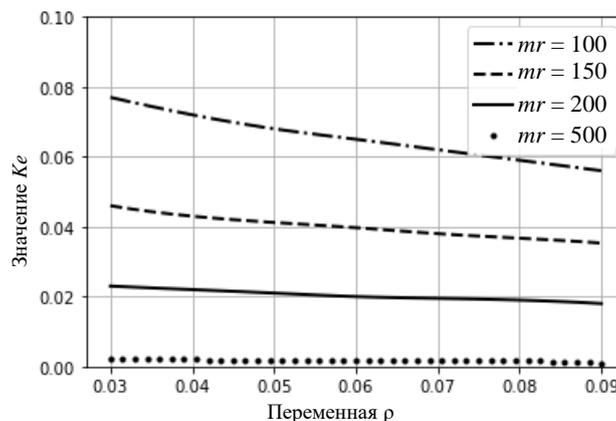


Рис. 5. Графики значений коэффициента экранирования $Ke(\rho, 0,01, \pi)$ для тонкостенного экрана с разными значениями относительной магнитной проницаемости экрана

Fig. 5. Shielding coefficient $Ke(\rho, 0,01, \pi)$ plot for thin-walled shield with different values of relative magnetic permeability of shield

Заключение. В статье разработан аналитико-численный алгоритм решения граничной трехмерной задачи, описывающей процесс проникновения низкочастотного магнитного поля через тонкостенный цилиндрический экран с цилиндрическим включением. В качестве источника поля рассмотрена тонкая нить с бесконечно малым поперечным сечением, по которой циркулирует ток. Нить расположена в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического экрана, во внешней области по отношению к экрану. С использованием соответствующих теорем сложения (формул) для гармонических функций решение поставленной задачи сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, входящих в пред-

ставление вторичных полей. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента экранирования внешнего магнитного поля при прохождении через цилиндрический экран в присутствии цилиндрического включения.

Вычислительные эксперименты показали следующие результаты. Если область D_2 заполнена воздухом, область D_1 – стеклом, а материал тонкостенного экрана – медь, то при геометрических параметрах задачи $a = 0,05$ м, $b = 0,02$ м, $\Delta = 0,0025$ м, $\ell = 0,2$ м коэффициент экранирования $Ke(0,035, z, \pi)$ уменьшается с увеличением частоты исходного поля и при $f > 100$ Гц поле практически не проникает через данную экранирующую систему (см. рис. 2). При $f = 50$ Гц и тех же значениях параметров задачи коэффициент экранирования $Ke(0,04, z, \pi)$ уменьшается с уменьшением радиуса внутреннего цилиндра (см. рис. 3). С увеличением значения относительной магнитной проницаемости материала экрана μ_r при $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$, $a = 0,1$ м, $b = 0,02$ м, $\Delta = 0,0025$ м, $\ell = 0,2$ м, $f = 50$ Гц, $\gamma = 5,5 \cdot 10^7$ См/м коэффициент экранирования $Ke(\rho, 0,01, \pi)$, $0,03 < \rho < 0,09$ м, уменьшается и магнитное поле практически не проникает через цилиндрический экран при $\mu_r > 500$ (см. рис. 5).

Полученные результаты могут быть использованы для экранирования технических устройств и биологических объектов от воздействия магнитных полей и обеспечения экологической среды вокруг работающих электроустановок и устройств.

Список использованных источников

1. Кечиев, Л. Н. Экранирование радиоэлектронной аппаратуры. Инженерное пособие / Л. Н. Кечиев. – М. : Грифон, 2019. – 720 с.
2. Makarov, S. N. Low-Frequency Electromagnetic Modeling for Electrical and Biological Systems Using MATLAB / S. N. Makarov, G. M. Noetscher, A. Nazarian. – New Jersey : Wiley, 2015. – 616 p.
3. Дмитриев, В. И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
4. Ильин, В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В. П. Ильин. – Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2000. – 345 с.
5. Pierrus, J. Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments / J. Pierrus. – Oxford : Oxford University Press, 2018. – 638 p. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198821915.001.0001>
6. Шушкевич, Г. Ч. Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.
7. Erofeenko, V. T. Shielding of a low-frequency electric field by a multilayer circular disk / V. T. Erofeenko, G. H. Shushkevich // Technical Physics. – 2013. – Vol. 58, no. 6. – P. 866–871. <https://doi.org/10.1134/1.1562255>
8. Шушкевич, Г. Ч. Проникновение низкочастотного магнитного поля через плоский слой со сфероидальным включением, тонкостенными слоями / Г. Ч. Шушкевич, А. И. Куц // Веснік Гродз. дзярж. універсітэта. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2012. – № 3. – С. 45–52.
9. Ерофеенко, В. Т. Экранирование низкочастотного электрического поля тонкостенной незамкнутой сферической оболочкой с учетом емкостных свойств / В. Т. Ерофеенко, Г. Ч. Шушкевич // Электричество. – 2011. – № 6. – С. 57–61.
10. Erofeenko, V. T. Screening of low-frequency magnetic fields by an open thin-wall spherical shell / V. T. Erofeenko, I. S. Kozlovskaya, G. Ch. Shushkevich // Technical Physics. – 2010. – Vol. 55, no. 9. – P. 1240–1247. <https://doi.org/10.1134/S1063784210090021>
11. Аполлонский, С. М. Экранирование низкочастотного магнитного поля / С. М. Аполлонский, Г. Ч. Шушкевич // Электричество. – 2005. – № 4. – С. 57–61.
12. Глушцов, А. И. Численное исследование усредненных граничных условий для тонких цилиндрических электромагнитных оболочек / А. И. Глушцов, В. Т. Ерофеенко // Вес. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 4. – С. 110–114.
13. Ерофеенко, В. Т. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для моделирования магнитных полей в цилиндрических пленочных оболочках / В. Т. Ерофеенко, Г. Ф. Громько, Г. М. Заяц // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 7. – С. 962–975. <https://doi.org/10.1134/S037406411707010X>

14. Щербинин, А. Г. Численное исследование эффективности цилиндрического электромагнитного экрана / А. Г. Щербинин, А. С. Мансуров // *Электротехника*. – 2017. – № 11. – С. 33–37.
15. Johansson, R. *Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib* / R. Johansson. – N. Y. : Apress, 2019. – 700 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4842-4246-9>
16. Аполлонский, С. М. Эквивалентные граничные условия в электродинамике / С. М. Аполлонский, В. Т. Ерофеев. – СПб. : Безопасность, 1999. – 416 с.
17. Теоретические основы электротехники : в 3 т. / К. С. Демирчян [и др.]. – СПб. : Питер, 2003. – Т. 3. – 377 с.
18. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
19. Ерофеев, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.
20. Вержицкий, В. М. Основы численных методов / В. М. Вержицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 848 с.

References

1. Kechiev L. N. *Ekranirovanie radioelektronnoi apparatury. Inzhenernoe posobie. Shielding of Electronic Equipment. Engineering Manual*. Moscow, Grifon, 2019, 720 p. (In Russ.).
2. Makarov S. N., Noetscher G. M., Nazarian A. *Low-Frequency Electromagnetic Modeling for Electrical and Biological Systems Using MATLAB*. New Jersey, Wiley, 2015, 616 p.
3. Dmitriev V. I., Zakharov E. V. *Metod integral'nykh uravnenii v vychislitel'noi elektrodinamike. The Method of Integral Equations in Computational Electrodynamics*. Moscow, MAKS Press, 2008, 316 p. (In Russ.).
4. Piyin V. P. *Metody konechnykh raznostei i konechnykh ob'emov dlia ellipticheskikh uravnenii. Finite Difference and Finite Volume Methods for Elliptic Equations*. Novosibirsk, Institut matematiki imeni S. L. Soboleva Sibirskogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk, 2000, 345 p. (In Russ.).
5. Pierrus J. *Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments*. Oxford, Oxford University Press, 2018, 638 p. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198821915.001.0001>
6. Shushkevich G. Ch. *Modelirovanie polei v mnogosvyaznykh oblastiakh v zadachakh elektrostati. Modeling Fields in Multiply Connected Domains in Electrostatic Problems*. Saarbruchen, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015, 228 p. (In Russ.).
7. Erofeenko V. T., Shushkevich G. H. *Shielding of a low-frequency electric field by a multilayer circular disk. Technical Physics*, 2013, vol. 58, no. 6, pp. 866–871. <https://doi.org/10.1134/1.1562255>
8. Shushkevich G. Ch., Kuts A. I. *Penetration of a low-frequency magnetic field through a flat layer with a spheroidal inclusion, thin-walled layers. Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaynaga Źniversiteta. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne [Bulletin of Grodno State University. Ser. 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Engineering and Management]*, 2012, no. 3. pp. 45–52 (In Russ.).
9. Erofeenko V. T., Shushkevich G. Ch. *Shielding of a low-frequency electric field by a thin-walled open spherical cover taking into account capacitive properties. Elektrichestvo [Electricity]*, 2011, no. 6, pp. 57–61 (In Russ.).
10. Erofeenko V. T., Kozlovskaya I. S., Shushkevich G. Ch. *Screening of low-frequency magnetic fields by an open thin-wall spherical shell. Technical Physics*, 2010, vol. 55, no 9, pp. 1240–1247. <https://doi.org/10.1134/S1063784210090021>
11. Apollonskii, S. M., Shushkevich G. Ch. *Low frequency magnetic field shielding. Elektrichestvo [Electricity]*, 2005, no. 4, pp. 57–61 (In Russ.).
12. Glushtsov A. I., Erofeenko V. T. *Numerical study of averaged boundary conditions for thin cylindrical electromagnetic shells. Vestsi akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk [Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series]*, 1996, no. 4, pp. 110–114 (In Russ.).
13. Erofeenko V. T., Gromyko G. F., Zayats G. M. *Boundary value problems with integral boundary conditions for modeling magnetic fields in cylindrical film shells. Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*, 2017, vol. 53, no. 7, pp. 962–975 (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S037406411707010X>
14. Shcherbinin A. G., Mansurov A. S. *Numerical study of the efficiency of a cylindrical electromagnetic shield. Elektrotehnika [Electrical engineering]*, 2017, no. 11, pp. 33–37 (In Russ.).
15. Johansson R. *Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib*. New York, Apress, 2019, 700 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4842-4246-9>

16. Apollonsky S. M., Erofeenko V. T. Ekvivalentnye granichnye usloviia v elektrodinamike. *Equivalent Boundary Conditions in Electrodynamics*. Saint Petersburg, Bezopasnost', 1999, 416 p. (In Russ.).
17. Demirchyan K. S., Neiman L. R., Korovkin N. V., Chechurin V. L. Teoreticheskie osnovy elektrotehniki : v 3 tomah. *Theoretical Foundations of Electrical Engineering : in 3 volumes*. Saint Petersburg, Piter, 2003, vol. 3, 377 p. (In Russ.).
18. In Abramovitz M., Stigan I. (eds.). Spravochnik po spetsial'nym funktsiiam s formulami, grafikami i tablitsami. *Handbook of Special Functions with Formulas, Graphs and Tables*. Moscow, Nauka, 1979, 830 p. (In Russ.).
19. Erofeenko V. T. Teoremy slozheniya. *Addition Theorems*. Minsk, Nauka i tekhnika, 1989, 240 p. (In Russ.).
20. Verzhbitsky V. M. Osnovy chislennykh metodov. *Fundamentals of Numerical Methods*. Moscow, Vysshaya shkola, 2002, 848 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Шушкевич Геннадий Чеславович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры современных технологий программирования, Гродненский государственный университет им. Янки Купалы.
E-mail: gsys@grsu.by

Information about the author

Gennady Ch. Shushkevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Modern Programming Technologies Department, Yanka Kupala State University of Grodno.
E-mail: gsys@grsu.by