

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 532.22:519.6

Ю.Н. Горбачева, В.К. Полевиков

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОЙ ПЕРЕМЫЧКИ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Рассматривается задача о равновесных формах и устойчивости осесимметричной жидкой перемычки между торцами двух коаксиальных вертикальных цилиндров одинакового радиуса в поле силы тяжести. Для численного решения задачи предлагается схема сплайнового типа. Конструкция схемы базируется на аппроксимации свободной поверхности параметрическими кубическими сплайнами, точно удовлетворяющими уравнениям дифференциальной задачи в узлах сетки. Находятся равновесные формы свободной поверхности в широком диапазоне параметров задачи и критические значения высоты перемычки в зависимости от числа Бонда, при которых происходит потеря устойчивости.

Введение

Интерес к задаче о равновесии и устойчивости жидкой перемычки (зоны), свободная поверхность которой опирается на кромки двух торцевых стенок коаксиальных цилиндров одинакового радиуса в поле силы тяжести, связан с ее приложениями к проблеме выращивания монокристаллов методом плавающей зоны в условиях слабой гравитации и на Земле. Метод позволяет избежать загрязнения расплава материалом тигля, а его эффективность зависит от устойчивости расплавленной зоны [1–3].

Теоретическое исследование устойчивости жидкой перемычки проводилось в [1–4] для чисел Бонда $2,5 \cdot 10^{-3} \leq \text{Bo} \leq 25$. Используемый в этих работах графический метод и опирающаяся на него линейная теория устойчивости сложны и трудоемки в реализации, недостаточно точны и позволяют получать лишь критические равновесные формы. Следует отметить, что методы численного моделирования равновесных форм капиллярной поверхности с нерегулярными граничными условиями, при которых свободная поверхность опирается на линию излома твердой стенки, до настоящего времени не разработаны.

Настоящая работа посвящена численному исследованию равновесных осесимметричных состояний жидкой перемычки между двумя коаксиальными цилиндрами в широком диапазоне чисел Бонда. Для этой цели разработан вычислительный алгоритм, позволяющий получать равновесные формы свободной поверхности, контактирующей с линией излома стенки. Построение алгоритма основано на аппроксимации свободной поверхности параметрическими кубическими сплайнами, точно удовлетворяющими уравнениям дифференциальной задачи в узлах сетки.

1. Математическая модель

Рассмотрим жидкую перемычку высотой H , свободная поверхность которой опирается на кромки двух торцевых стенок коаксиальных цилиндров одинакового радиуса R_0 . Будем считать, что в невозмущенном состоянии жидкая зона имеет форму кругового цилиндра объемом $V = \pi R_0^2 H$. Жидкость считается изотермичной и находящейся в состоянии равновесия под действием силы тяжести и сил поверхностного натяжения. Равновесная форма свободной поверхности определяется из условия Лапласа для капиллярного скачка давлений на линии раздела жидкости и воздуха [1, 2]:

$$\sigma K = p - p_0, \quad (1)$$

где $\sigma = \text{const}$ – коэффициент поверхностного натяжения; K – сумма главных кривизн поверхности; p – давление внутри жидкости; $p_0 = \text{const}$ – давление в окружающей воздушной среде.

Давление внутри жидкости определяется из уравнения гидростатики [1, 2]

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

где $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости; \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения.

Свободная поверхность предполагается поверхностью вращения, форма которой определяется равновесной линией меридиана. Введем цилиндрические координаты R и Z , совместив ось Z с осью симметрии и направив ее противоположно вектору $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ($g = \text{const}$). Интегрируя уравнение (2), имеем

$$p = -\rho g Z + p_1, \quad (3)$$

где p_1 – постоянная интегрирования. Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получаем

$$\sigma K = -\rho g Z + C, \quad (4)$$

где C – неопределенная константа.

Совместим начало координат с центром нижнего фронта раздела фаз. Обозначим через S длину дуги искомой равновесной линии, изменяющуюся от 0 до l и отсчитываемую от плоскости $Z=0$. Форма равновесной линии описывается параметрическими функциями $R(S)$, $Z(S)$. Расположение осей, а также другие введенные обозначения показаны на рис. 1.

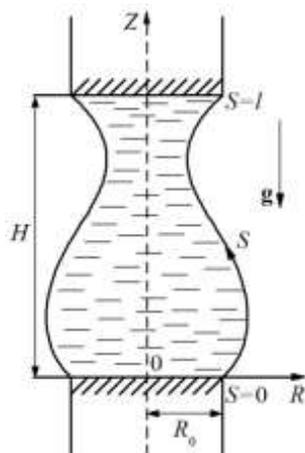


Рис. 1. Геометрия задачи

В осесимметричном случае сумма главных кривизн определяется по формуле [1, 2]

$$K = \frac{(RZ)'}{RR'},$$

где $R' = R'(S) = \frac{dR(S)}{dS}$; $Z' = Z'(S) = \frac{dZ(S)}{dS}$.

Подставляя выражение кривизны в уравнение (4), имеем

$$\begin{aligned} Z'' &= R'F, \quad 0 \leq S \leq l; \\ F &= f + C, \quad f = -\frac{\rho g}{\sigma} Z - \frac{Z'}{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Еще одним уравнением служит естественное условие

$$(R')^2 + (Z')^2 = 1. \quad (6)$$

Дифференцируя условие (6) и подставляя результат в уравнение (5), получаем

$$R'' = -Z'F, \quad 0 \leq S \leq l. \quad (7)$$

Чтобы естественное условие при этом не нарушалось, его следует удовлетворить хотя бы при одном значении S .

Дифференциальные уравнения (5), (7) дополняются граничными условиями контакта свободной поверхности с кромками торцевых стенок цилиндров

$$R(0) = R_0, \quad R(l) = R_0, \quad Z(0) = 0, \quad Z(l) = H \quad (8)$$

и интегральным условием сохранения объема жидкости

$$V = \pi \int_0^l Z'R^2 dS = \pi R_0^2 H. \quad (9)$$

Таким образом, математическая модель осесимметричной равновесной свободной поверхности жидкой перемычки состоит из нелинейных параметрических дифференциальных уравнений (5), (7), граничных условий (8), естественного условия (6) и интегрального условия (9).

2. Обезразмеривание модели

Особенность параметрической постановки (5)–(9) состоит в том, что длина равновесной линии меридиана l является неизвестной величиной, что создает дополнительные трудности для численного решения.

Проведем обезразмеривание переменных по радиусу R_0 :

$$s = \frac{S}{R_0} \in [0, L], \quad r = \frac{R}{R_0}, \quad z = \frac{Z}{R_0},$$

где $L = l/R_0$.

Задача (5)–(9) при новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} r'' &= -z'F, \quad z'' = r'F, \quad 0 \leq s \leq L; \\ F &= f + C, \quad f = -\text{Bo} z - z'/r; \\ r(0) &= 1, \quad r(L) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(L) = b; \\ (r')^2 &+ (z')^2 = 1, \quad \int_0^L z' r^2 ds = b, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\text{Bo} = \rho g R_0^2 / \sigma$ – число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к капиллярным силам; $b = H/R_0$. Безразмерные комплексы Bo и b являются определяющими параметрами задачи.

Теперь, следуя стратегии [5], осуществим замену переменных

$$\bar{s} = \frac{s}{L} \in [0, 1], \quad \bar{r} = \frac{r}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L},$$

которая позволяет получить явную формулу для безразмерной длины меридиана L и провести вычисления на фиксированном промежутке $[0, 1]$ в процессе итерационного решения задачи. В этих переменных задача (10) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \bar{r}'' &= -\bar{z}'\bar{F}, \quad \bar{z}'' = \bar{r}'\bar{F}, \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1; \\ \bar{F} &= \bar{f} + \bar{C}, \quad \bar{f} = -\text{Bo} L^2 \bar{z} - \bar{z}'/\bar{r}; \\ \bar{r}(0) &= 1/L, \quad \bar{r}(1) = 1/L, \quad \bar{z}(0) = 0, \quad \bar{z}(1) = b/L; \\ (\bar{r}')^2 &+ (\bar{z}')^2 = 1, \quad L = \left(b / \int_0^1 \bar{z}' \bar{r}^2 d\bar{s} \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\bar{r} = \bar{r}(\bar{s}) = \frac{1}{LR_0} R(R_0 L \bar{s})$; $\bar{z} = \bar{z}(\bar{s}) = \frac{1}{LR_0} Z(R_0 L \bar{s})$; $\bar{r}' = \frac{d\bar{r}(\bar{s})}{d\bar{s}}$; $\bar{z}' = \frac{d\bar{z}(\bar{s})}{d\bar{s}}$; \bar{C} – неопределенная константа.

Интегрируя второе из уравнений (11) на отрезке $[0, 1]$ и учитывая граничные и интегральные условия, получаем дополнительное свойство свободной поверхности:

$$\bar{z}'(1) = \bar{z}'(0).$$

3. Сплайн-схема численного решения задачи

Запишем задачу (11) в матричной форме, опустив для удобства верхнюю черту в обозначениях переменных:

$$\mathbf{x}'' = F\mathbf{I}\mathbf{x}', \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r(s) \\ z(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 1; \quad (12)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1/L \\ b/L \end{bmatrix}, \quad z'(1) = z'(0), \quad \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1;$$

$$F = f + C, \quad f = -\text{Bo}L^2 z - z'/r, \quad L = \left(b / \int_0^1 z' r^2 ds \right)^{1/3},$$

где $r(s)$, $z(s)$ – неизвестные параметрические функции.

Построение схемы сплайнового типа основано на аппроксимации функций $r(s)$, $z(s)$ кубическими сплайнами, точно удовлетворяющими уравнениям дифференциальной задачи (12) в узлах сетки $\{s_i = ih \mid i = \overline{0, N}; h = 1/N\}$.

Кубические сплайны, построенные по значениям функций $r(s)$, $z(s)$ в узлах сетки, можно записать в векторном виде [5]:

$$\mathbf{x}(s) \approx \mathbf{P}(s) = \left\{ \mathbf{m}_{i-1} \frac{(s_i - s)^3}{6h} + \mathbf{m}_i \frac{(s - s_{i-1})^3}{6h} + \left(\mathbf{x}_{i-1} - \frac{h^2}{6} \mathbf{m}_{i-1} \right) \frac{s_i - s}{h} + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{x}_i - \frac{h^2}{6} \mathbf{m}_i \right) \frac{s - s_{i-1}}{h} \mid s \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = \overline{1, N} \right\}, \quad (13)$$

$$\text{где } \mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} P_1(s) \\ P_2(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} r_i \\ z_i \end{bmatrix} = \mathbf{x}(s_i), \quad \mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} m_{1,i} \\ m_{2,i} \end{bmatrix} = \mathbf{P}''(s_i).$$

Во внутренних узлах неизвестные векторы \mathbf{x}_i и \mathbf{m}_i связаны условием непрерывности первой производной сплайна (13):

$$\mathbf{P}'(s_i) = \mathbf{x}_{s,i-0.5} + \frac{h}{6} \mathbf{m}_{i-1} + \frac{h}{3} \mathbf{m}_i = \mathbf{x}_{s,i+0.5} - \frac{h}{3} \mathbf{m}_i - \frac{h}{6} \mathbf{m}_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (14)$$

где $\mathbf{x}_{s,i-0.5} = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})/h$.

Будем считать, что скалярные сплайны $P_1(s)$ и $P_2(s)$ удовлетворяют уравнению (12) во всех узлах сетки, т. е. справедливы равенства $\mathbf{m}_i = F_i \mathbf{I} \mathbf{P}'(s_i)$ при всех $i = \overline{0, N}$. Запишем эти равенства, используя условие непрерывности (14):

$$\mathbf{m}_{i-1} = F_{i-1} \mathbf{I} \left(\mathbf{x}_{s,i-0.5} - \frac{h}{3} \mathbf{m}_{i-1} - \frac{h}{6} \mathbf{m}_i \right), \quad \mathbf{m}_i = F_i \mathbf{I} \left(\mathbf{x}_{s,i-0.5} + \frac{h}{6} \mathbf{m}_{i-1} + \frac{h}{3} \mathbf{m}_i \right), \quad i = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что пара уравнений (15) в каждом внутреннем узле ($i = \overline{1, N-1}$) представляет собой линейную систему относительно векторов \mathbf{m}_{i-1} , \mathbf{m}_i , и решая ее, находим

$$\begin{cases} m_{1,i-1} = -\frac{F_{i-1}(c_i - \rho_i d_i)}{c_i^2 + d_i^2} r_{s,i-0.5} - \frac{F_{i-1}(d_i + \rho_i c_i)}{c_i^2 + d_i^2} z_{s,i-0.5}; \\ m_{2,i-1} = \frac{F_{i-1}(d_i + \rho_i c_i)}{c_i^2 + d_i^2} r_{s,i-0.5} - \frac{F_{i-1}(c_i - \rho_i d_i)}{c_i^2 + d_i^2} z_{s,i-0.5}; \\ m_{1,i} = -\frac{F_i(c_i + \rho_{i-1} d_i)}{c_i^2 + d_i^2} r_{s,i-0.5} - \frac{F_i(d_i - \rho_{i-1} c_i)}{c_i^2 + d_i^2} z_{s,i-0.5}; \\ m_{2,i} = \frac{F_i(d_i - \rho_{i-1} c_i)}{c_i^2 + d_i^2} r_{s,i-0.5} - \frac{F_i(c_i + \rho_{i-1} d_i)}{c_i^2 + d_i^2} z_{s,i-0.5}, \end{cases} \quad (16)$$

где $\rho_i = \frac{1}{2} h F_i$, $c_i = \frac{2}{3} (\rho_i - \rho_{i-1})$, $d_i = 1 + \frac{1}{3} \rho_{i-1} \rho_i$.

Введем обозначения

$$u_{1,i} = d_i - \rho_{i-1} c_i, \quad u_{2,i} = c_i + \rho_{i-1} d_i, \quad v_{1,i} = d_i + \rho_i c_i, \quad v_{2,i} = c_i - \rho_i d_i;$$

$$\mathbf{U}_i = u_{1,i} \mathbf{E} + u_{2,i} \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}_i = v_{1,i} \mathbf{E} + v_{2,i} \mathbf{I},$$

где \mathbf{E} – единичная матрица; \mathbf{U}_i и \mathbf{V}_i – невырожденные матрицы размерности 2×2 . Тогда формулы (16) можно представить в виде

$$\mathbf{m}_i = \frac{F_i}{c_i^2 + d_i^2} \mathbf{U}_i \mathbf{I} \mathbf{x}_{s,i-0.5} = \frac{F_i}{c_{i+1}^2 + d_{i+1}^2} \mathbf{V}_{i+1} \mathbf{I} \mathbf{x}_{s,i+0.5}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (17)$$

Ввиду (17) и граничных условий задачи (12) получаем систему

$$\begin{cases} (c_i^2 + d_i^2) \mathbf{V}_{i+1} (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) - (c_{i+1}^2 + d_{i+1}^2) \mathbf{U}_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) = \mathbf{0}, & i = \overline{1, N-1}; \\ r_0 = 1/L, \quad r_N = 1/L, \quad z_0 = 0, \quad z_N = b/L, \end{cases} \quad (18)$$

где \mathbf{x}_i – неизвестные векторы.

Улучшим матрицу системы (18) умножением i -го уравнения системы ($i = \overline{1, N-1}$) на невырожденную матрицу

$$(c_{i+1}^2 + d_{i+1}^2) \mathbf{U}_i^T + (c_i^2 + d_i^2) \mathbf{V}_{i+1}^T.$$

В результате получаем эквивалентную систему с трехдиагональной матрицей

$$\begin{cases} A_i \mathbf{x}_{i-1} - (A_i + B_i) \mathbf{x}_i + B_i \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{\Phi}_i, & i = \overline{1, N-1}; \\ r_0 = 1/L, \quad r_N = 1/L, \quad z_0 = 0, \quad z_N = b/L, \end{cases} \quad (19)$$

где $A_i = (1 + \rho_{i-1}^2)(c_{i+1}^2 + d_{i+1}^2) + \psi_i^+ > 0$, $B_i = (1 + \rho_{i+1}^2)(c_i^2 + d_i^2) + \psi_i^+ > 0$,

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{1,i} \\ \Phi_{2,i} \end{bmatrix} = -\varphi_i \mathbf{I}(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}) - \psi_i^-(\mathbf{x}_{i-1} - 2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}),$$

$$\Psi_i = u_{1,i} v_{2,i+1} - u_{2,i} v_{1,i+1}, \quad \psi_i^\pm = 0,5(\psi_i \pm |\psi_i|), \quad \Psi_i = u_{1,i} v_{1,i+1} + u_{2,i} v_{2,i+1}.$$

Итерационный алгоритм решения задачи (19) построим, выбирая значения коэффициентов A_i , B_i , φ_i , ψ_i из предыдущей итерации. Получим две независимые трехдиагональные системы уравнений относительно сеточных параметрических функций r^{n+1} , z^{n+1} :

$$\begin{cases} A_i^n r_{i-1}^{n+1} - (A_i^n + B_i^n) r_i^{n+1} + B_i^n r_{i+1}^{n+1} = \Phi_{1,i}^n, & i = \overline{1, N-1}; \\ r_0^{n+1} = 1/L^n, & r_N^{n+1} = 1/L^n; \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} A_i^n z_{i-1}^{n+1} - (A_i^n + B_i^n) z_i^{n+1} + B_i^n z_{i+1}^{n+1} = \Phi_{2,i}^n, & i = \overline{1, N-1}; \\ z_0^{n+1} = 0, & z_N^{n+1} = b/L^n, \end{cases} \quad (21)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации.

Конструкция сплайн-схемы (20), (21) не обеспечивает выполнение естественного условия $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1$. Удовлетворить этому условию можно посредством вычисления константы C . Проинтегрируем равенство $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 1$ на интервале $[0, 1]$ с учетом уравнения (12):

$$\int_0^1 \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' ds = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')_0^1 - \int_0^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'' ds = \mathbf{x}(1) \cdot \mathbf{x}'(1) - \mathbf{x}(0) \cdot \mathbf{x}'(0) - \int_0^1 \mathbf{x} \cdot (f + C) \mathbf{I} \mathbf{x}' ds = 1.$$

Отсюда получаем выражение

$$C = \frac{\mathbf{x}(1) \cdot \mathbf{P}'(1) - \mathbf{x}(0) \cdot \mathbf{P}'(0) - \int_0^1 f \mathbf{P} \cdot (\mathbf{I} \mathbf{P}') ds - 1}{\int_0^1 \mathbf{P} \cdot (\mathbf{I} \mathbf{P}') ds}.$$

Учитывая граничные условия (12), приходим к следующей формуле для вычисления константы C :

$$C = \frac{(P'_{1,N} + bP'_{2,N} - P'_{1,0})/L - \int_0^1 f(P_2 P'_1 - P_1 P'_2) ds - 1}{\int_0^1 (P_2 P'_1 - P_1 P'_2) ds}. \quad (22)$$

Константу L и функцию f определяем с помощью сплайнов P_1 , P_2 , следуя (12):

$$L = \left(b / \int_0^1 P_2' P_1^2 ds \right)^{1/3}; \quad (23)$$

$$f = -\text{Bo} L^2 P_2 - \frac{P_2'}{P_1}. \quad (24)$$

Реализация схемы на каждой итерации сводится к решению прогоночных задач (20), (21). Метод прогонки устойчив на каждой итерации. Для улучшения сходимости итераций в алгоритм вводился параметр релаксации. В результате определяются новые итерационные прибли-

жения r_i^{n+1} , z_i^{n+1} для координат свободной поверхности, с помощью которых затем вычисляются L^{n+1} , f^{n+1} , C^{n+1} по формулам (23), (24), (22) соответственно. Точность итерационного решения выбиралась равной 10^{-7} .

4. Численные результаты

Расчеты осуществлялись на равномерной сетке с шагом 1/100. Известно, что существование равновесных состояний свободной поверхности ограничено безразмерными значениями высоты жидкой перемычки $b < b_{cr}$, а при $b = b_{cr}$ наступает кризис равновесия – происходит разрыв перемычки. Считалось, что значение высоты превышает критическое b_{cr} , если при этом значении итерации расходились. Значения b_{cr} вычислялись по методу дихотомии с погрешностью 10^{-4} .

В таблице приведены теоретические критические значения высоты перемычки b_{cr}^* , взятые из [4], и соответствующие им критические значения b_{cr} , полученные численно по схеме (20), (21).

Критические значения высоты перемычки, полученные численно и предсказанные линейной теорией устойчивости

Bo	b_{cr}^*	b_{cr}	Bo	b_{cr}^*	b_{cr}	Bo	b_{cr}^*	b_{cr}
0,0025	6,06	6,094	0,64	3,338	3,338	2,56	2,103	2,103
0,01	5,83	5,843	0,81	3,128	3,128	4	1,738	1,74
0,1	4,807	4,808	1	2,938	2,938	10	1,131	1,135
0,25	4,134	4,137	1,44	2,609	2,61	16	0,9	0,903
0,49	3,573	3,573	1,96	2,334	2,335	25	0,723	0,725

Таким образом, полученные численные результаты согласуются с теоретическими данными [4], а сплайн-схема адекватно реагирует на кризис равновесного состояния.

Анализ полученных форм (рис. 2) показал, что равновесная поверхность принимает S-образные профили, что также согласуется с [1, 2, 4]. При стремлении числа Бонда к нулю критическая равновесная поверхность стремится к свободной поверхности кругового цилиндра.

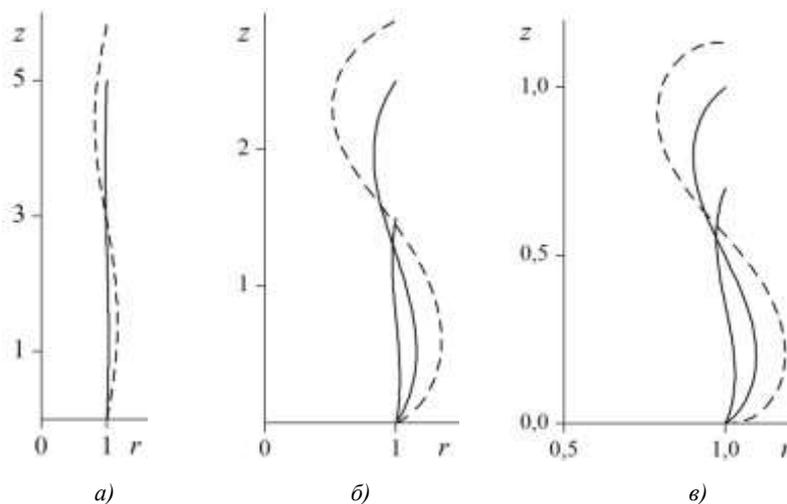


Рис. 2. Равновесные формы жидкой перемычки с увеличением высоты b :
а) $Bo = 0,01$; б) $Bo = 1$; в) $Bo = 10$; штриховые кривые – критические формы

Зависимость b_{cr} от числа Bo (рис. 3), построенная по численным результатам, для $Bo \geq 3$ хорошо описывается приближенной формулой $b_{cr} = 3,473 \cdot Bo^{-0,492}$, полученной методом наименьших квадратов. Максимальная погрешность приближенной формулы при $3 \leq Bo \leq 10^5$ не превышает 2,6 %.

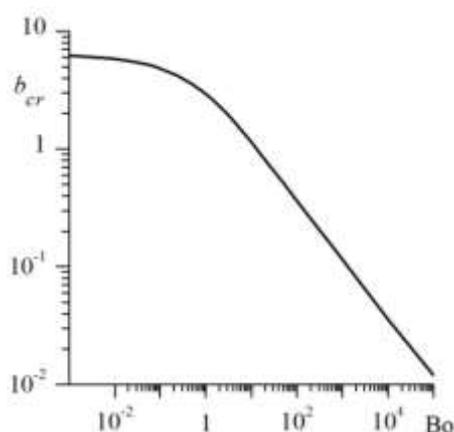


Рис. 3. Логарифмическая зависимость критической высоты перемычки от числа Бонда

В качестве физической интерпретации полученных результатов рассмотрим в условиях земного тяготения ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$) жидкие германий и кремний, свободная поверхность которых опирается на кромки двух торцевых стенок цилиндров одинакового радиуса $R_0 = 10^{-2} \text{ м}$. Эти материалы и размеры цилиндров являются типичными в технологии выращивания монокристаллов [1, 2, 4]. Жидкий германий при температуре $1100 \text{ }^\circ\text{C}$ имеет характеристики $\rho = 5,32 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma = 594 \text{ мН/м}$, а жидкий кремний при температуре $1550 \text{ }^\circ\text{C}$ – $\rho = 2,33 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma = 750 \text{ мН/м}$ [6]. При этих значениях получаем число Бонда $Bo = 8,786$, критическую высоту перемычки $H_{cr} = b_{cr} R_0 = 1,207 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ для германия и $Bo = 3,048$, $H_{cr} = 1,957 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ для кремния.

Заключение

В статье дано численное решение задачи о равновесных формах и устойчивости осесимметричной жидкой перемычки, свободная поверхность которой опирается на кромки двух торцевых стенок коаксиальных цилиндров одинакового радиуса в гравитационном поле. Задача имеет важное приложение в технологии получения чистых монокристаллов методом плавающей зоны. Для ее решения построена итерационная схема сплайнового типа. Она ориентирована на решение задач о равновесных формах свободной поверхности, при которых поверхность совпадает с линией излома твердой стенки. Разработанный метод позволил получить равновесные формы свободной поверхности жидкой перемычки в диапазоне чисел $10^{-3} \leq Bo \leq 10^5$ вплоть до момента потери устойчивости, когда перемычка разрушается. Построена зависимость критической высоты перемычки от числа Бонда. В диапазоне чисел Бонда $2,5 \cdot 10^{-3} \leq Bo \leq 25$, исследованном ранее графическим методом в рамках линейной теории устойчивости, полученные численные результаты согласуются с теоретическими.

Работа выполнена в рамках задания 1.5.03.2 подпрограммы «Математические методы» государственной программы научных исследований «Конвергенция» на 2011–2015 гг.

Список литературы

1. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А.Д. Мышкис [и др.]; под ред. А.Д. Мышкиса. – Киев : Наукова думка, 1992. – 592 с.
2. Low-gravity fluid mechanics. Mathematical theory of capillary phenomena / A.D. Myshkis [et al.]. – Springer-Verlag, 1987. – 583 p.
3. Слобожанин, Л.А. Гидростатика при слабой гравитации. Форма и устойчивость свободной поверхности : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05 / Л.А. Слобожанин; АН СССР. – Новосибирск, 1988. – 32 с.

4. Слобожанин, Л.А. Задачи гидростатики, возникающие при моделировании процесса очистки материалов и выращивания монокристаллов методом плавающей зоны. Ч. 3. Равновесие и устойчивость зоны в поле тяжести и в поле центробежных сил / Л.А. Слобожанин. – Харьков, 1984. – 57 с. – (Препринт / Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР ; № 25).

5. PolevikoV, V.K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces / V.K. PolevikoV // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, № 1. – P. 66–93.

6. Физические величины : справочник / А.П. Бабичев [и др.] ; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

Поступила 20.03.2013

*Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: gorbachevayun@gmail.com,
polevikov@bsu.by*

Yu.N. Gorbacheva, V.K. PolevikoV

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ON STABILITY OF A LIQUID BRIDGE BETWEEN TWO COAXIAL CYLINDERS

The problem on equilibrium shapes and stability of axially symmetric liquid bridge between the end faces of two coaxial vertical cylinders of equal radius in gravitational field is considered. A scheme of spline type for numerical solving of the problem is developed. Construction of the scheme is based on an approximation of the free surface by parametric cubic splines which exactly satisfy equations of the differential problem at grid nodes. Equilibrium free-surface shapes in a wide range of problem parameters are obtained. Critical values of the bridge height corresponding to the loss of equilibrium stability depending on the Bond number are determined.