ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

LOGICAL DESIGN

УДК 519.711
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-3-44-53

Поступила в редакцию 06.05.2020
Received 06.05.2020

Принята к публикации 04.06.2020
Accepted 04.06.2020

Эвристический метод алгебраической декомпозиции частичных булевых функций

Ю. В. Поттосин

Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
E-mail: pott@newman.bas-net.by

Аннотация. Задача декомпозиции булевой функции заключается в представлении заданной булевой функции в виде суперпозиции некоторых булевых функций, каждая из которых имеет меньшее число аргументов, чем исходная. Алгебраическая декомпозиция (в англоязычной литературе bi-decomposition) представляет заданную функцию в виде некоторой заданной операции алгебры логики над двумя булевыми функциями, и эта задача сводится к их определению. Предлагается эвристический метод алгебраической декомпозиции для не полностью определенных (частичных) булевых функций. Исходная булева функция задается двумя множествами, одно из которых представляет собой область булева пространства аргументов, где функция имеет значение 1, а другое – область булева пространства, где функция имеет значение 0. Рассматривается полный граф ортогональности булевых векторов, составляющих область определения заданной функции. В нем выделяются ребра, концы каждого ребра соответствуют элементам булева пространства, на которых функция имеет различные значения. Задача алгебраической декомпозиции сводится к задаче о двухблочном взвешенном покрытии множества выделенных ребер указанного графа его полными двудольными подграфами (бикликами). Каждой биклике приписывается определенным образом дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), и весом биклики считается пара некоторых параметров соответствующей ДНФ. По каждой из биклик полученного покрытия строится булева функция, аргументы которой – переменные из элементарной конъюнкции минимального ранга соответствующей ДНФ, что является решением задачи алгебраической декомпозиции. Предлагается методика получения указанного покрытия для двух видов выходной функции.

Ключевые слова: частичная булева функция, декомпозиция булевой функции, суперпозиция функций, операции алгебры логики, задача о покрытии, полный двудольный подграф графа, эвристический метод

Для цитирования. Поттосин, Ю. В. Эвристический метод алгебраической декомпозиции частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2020. − Т. 17, № 3. – С. 44–53. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-3-44-53

A heuristic method for bi-decomposition of partial Boolean functions

Yuri V. Pottosin

The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
E-mail: pott@newman.bas-net.by

Abstract. The problem of decomposition of a Boolean function is to represent a given Boolean function in the form of a superposition of some Boolean functions whose number of arguments are less than the number of given function. The bi-decomposition represents a given function as a logic algebra operation, which is also given, over two Boolean functions. The task is reduced to specification of those two functions. A method for bi-decomposition of incompletely specified (partial) Boolean function is suggested. The given Boolean function is specified by two sets, one of which is the part of the Boolean space of the arguments of the function where its value is 1, and the other set is the part of the space where the function has the value 0. The complete graph of orthogonality of Boolean vectors that constitute the definitional domain of the given function is considered. In the graph, the edges are picked out, any of which has its ends corresponding the elements of Boolean space where the given function has different values. The problem of bi-decomposition is reduced to the problem of a weighted two-block covering the set of picked out edges of considered graph by its complete bipartite subgraphs (bicliques). Every biclique is assigned with a disjunctive normal form (DNF) in definite way. The weight of a biclique is a pair of certain parameters of assigned DNF. According to each biclique of obtained cover, a Boolean function is constructed whose arguments are the variables from the term of minimal rank on the DNF. A technique for constructing the mentioned cover for two kinds of output function is described.

Keywords: partial Boolean function, Boolean function bi-decomposition, superposition of functions, logic algebra operations, covering problem, complete bipartite subgraph, heuristic method

For citation. Pottosin Yu. V. A heuristic method for bi-decomposition of partial Boolean functions. *Informatics,* 2020, vol. 17, no. 3, pp. 44‒53 (in Russian). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-3-44-53

Введение. Под декомпозицией булевой функции понимается ее представление в виде суперпозиции двух или более функций, каждая из которых в некотором смысле проще исходной. Задача декомпозиции булевых функций является одной из важных и сложных задач в области логического проектирования, успешное решение которой непосредственно влияет на качество и стоимость проектируемых цифровых устройств, а также дает возможность в ряде случаев заменить сложную задачу аппаратной реализации булевой функции от большого числа переменных на более простую задачу реализации нескольких функций с гораздо меньшим числом аргументов.

Существует довольно много различных видов декомпозиции булевой функции [1]. Одним из таких видов является алгебраическая декомпозиция (англ. bi-decomposition). Задача алгебраической декомпозиции ставится следующим образом. Для заданной булевой функции $y = f(\mathbf{x})$, где компонентами вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ являются булевы переменные, составляющие множество X, требуется найти суперпозицию $f(\mathbf{x}) = \varphi\,(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2))$, где компонентами векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ являются переменные из множеств $Z_1 \subset X$ и $Z_2 \subset X$ соответственно. Вид функции φ от двух переменных также задан. Это может быть любая из десяти булевых функций, существенно зависящих от обеих переменных и представляемых операциями алгебры логики. Обычно множества Z_1 и Z_2 заданы и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Такая декомпозиция называется *разделительной* в отличие от *неразделительной* декомпозиции, где условие $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ необязательно, но при этом на мощности множеств Z_1 и Z_2 могут быть наложены ограничения.

Известны примеры применения методов алгебраической декомпозиции для повышения быстродействия схем [2, 3] и при синтезе схем на базе программируемой вентильной матрицы (FPGA) [4]. Задача алгебраической декомпозиции при функции φ, выражаемой операцией сложения по модулю 2, при заданном разбиении (Z_1, Z_2) рассматривается в работе [5], где для ее решения предлагается использовать логические уравнения. Вероятность существования какой-либо декомпозиции для полностью определенных булевых функций весьма низка, но по-другому дело обстоит, когда рассматриваемые функции являются не полностью определенными (частичными), особенно когда они определены только на небольшой части булева пространства аргументов. Такой случай разделительной алгебраической декомпозиции при заданном разбиении (Z_1, Z_2) подробно исследован в работе [6].

Далее рассматривается задача алгебраической декомпозиции не полностью определенной (частичной) булевой функции. В этом случае для заданной частичной булевой функции $y = f(\mathbf{x})$ надо найти суперпозицию $\varphi\,(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2)) \succ f(\mathbf{x})$, где символ $\succ$ обозначает отношение реализации. Функция φ, частичная или полностью определенная, реализует частичную функцию f, если значения функции φ совпадают со значениями функции f везде, где они определены. Так же, как в поставленной выше задаче, компонентами векторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ являются переменные из множеств $Z_1 \subset X$ и $Z_2 \subset X$ соответственно. Множества Z_1 и Z_2 не задаются и определяются в процессе решения задачи. Они могут пересекаться, но естественно потребовать, чтобы сумма их мощностей была минимальной. Существуют разнообразные методы решения как разделительной, так и неразделительной алгебраической декомпозиции [7–10]. В настоящей статье излагается метод алгебраической декомпозиции, использующий подход к решению задачи параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций, предложенный в работе [11] и развитый в статье [12] применительно к задаче алгебраической декомпозиции. Более удобный метод для случая, когда функция φ представляется операцией сложения по модулю 2, описан в статье [13]. Методы в статьях [12, 13] минимизируют мощности множеств Z_1 и Z_2 при полном переборе возможных ситуаций в процессе решения, что значительно ограничивает их практическое применение. Предлагаемый здесь метод не гарантирует абсолютного минимума этих мощностей, но позволяет решить задачу за более короткое время, поскольку не обращается к полному перебору.

Особого внимания заслуживает проблема существования нетривиальной декомпозиции, при которой мощность любого из множеств Z_1 и Z_2 меньше мощности множества X. Эта проблема довольно легко решается, когда разбиение (Z_1, Z_2) задано [1, 14]. Не при любом таком разбиении возможна нетривиальная декомпозиция заданной булевой функции. Вопрос определения множеств Z_1 и Z_2, для которых она существует, вызывает естественный интерес. Среди работ, где рассматривается данный вопрос, можно назвать работы [1, 5, 15–18]. При этом используется полный перебор, но даются некоторые способы уменьшения объема вычислений при рассмотрении вариантов. В предлагаемой статье, как уже отмечалось, множества Z_1 и Z_2 определяются в процессе решения задачи: либо выдается решение, либо делается заключение, что декомпозиции не существует.

Предлагаемый подход. Положим, что не полностью определенная булева функция $f(\mathbf{x})$ задана двумя множествами: M^1 – область булева пространства, где функция имеет значение 1, и M^0 – область булева пространства, где она имеет значение 0. Эти множества будем представлять соответственно булевыми матрицами $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{M}^0$. Область определения функции $f(\mathbf{x})$ обозначим символом M ($M = M^1 \cup M^0$). Рассмотрим полный граф $G = (V, E)$, у которого множество вершин V соответствует множеству M. Каждому ребру графа G припишем аргументы заданной функции из множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, по которым ортогональны строки матриц $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{M}^0$, соответствующие концам данного ребра.

Полному двудольному подграфу, или *биклике*, графа G припишем множество переменных из X, взятых по одной из каждого ребра, принадлежащего данной биклике. Это множество определяется следующим образом. Пусть $\{x_i, x_j, ..., x_k\}$ – множество переменных, по которым ортогональны два вектора из M, соответствующие концам ребра из множества E. Образуем элементарную дизъюнкцию $x_i \vee x_j \vee ... \vee x_k$ из этих переменных. Для биклики графа G получим конъюнктивную нормальную форму (КНФ), членами которой будут указанные дизъюнкции, взятые по всем ребрам, входящим в данную биклику. После удаления возможных поглощаемых элементарных дизъюнкций преобразуем полученную КНФ, раскрыв скобки, в дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Множество переменных, приписанных биклике, составят переменные, входящие в элементарную конъюнкцию минимального ранга полученной ДНФ.

Пусть требуется выразить заданную функцию $f(\mathbf{x})$ как $f(\mathbf{x}) \prec \varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2))$, где φ может быть любой булевой функцией от двух переменных, которые являются функциями соответственно от векторных переменных $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$, представляющих части вектора $\mathbf{x}$.

Построим функции g_1 и g_2 следующим образом. В графе G выделим две биклики $B_1 = (V_1^1, V_1^0, E_1)$ и $B_2 = (V_2^1, V_2^0, E_2)$ так, чтобы любое ребро графа G, которое связывает вершину, соответствующую элементу из множества M^1, с вершиной, соответствующей элементу из множества M^0, присутствовало хотя бы в одном из множеств E_1 или E_2. Биклики достаточно задать парами множеств (V_1^1, V_1^0) и (V_2^1, V_2^0), так как в бикликах каждая вершина из одной доли связана ребрами со всеми вершинами другой доли. Аргументами функции g_i (i = 1, 2) являются переменные, приписанные биклике B_i. Множество M_i^1 значений векторной переменной $\mathbf{z}_i$, где функция g_i имеет значение 1, составляют части векторов из M^1 или из M^0, соответствующих вершинам из множества V_i^1. Части этих векторов определяются переменными, приписанными биклике B_i, т. е. эти переменные являются компонентами вектора $\mathbf{z}_i$. Аналогично формируется множество M_i^0 из частей векторов, соответствующих вершинам из множества V_i^0. Таким образом, каждому вектору из M^1 или M^0 соответствует пара значений функций g_1 и g_2. Если эта пара соответствует вектору из M^1, то она является элементом множества $M_\varphi^{\ 1}$, где функция φ имеет значение 1. Если она соответствует вектору из M^0, то она является элементом множества $M_\varphi^{\ 0}$. Так будет задана функция φ, если вид ее не задан заранее. Заметим, что пары (V_1^1, V_1^0) и (V_2^1, V_2^0) следует считать упорядоченными, поскольку они связаны со значениями функций g_1 и g_2.

Таким образом, получение функций φ, g_1 и g_2 сводится к выделению в графе G пары биклик, покрывающих некоторые его ребра. Естественно потребовать, чтобы функции g_1 и g_2 имели как можно меньше аргументов. Для этого каждой биклике B_i (i = 1, 2) приписывается вес, представляемый упорядоченной парой (r_j, s_j), где r_j – минимальный ранг элементарной конъюнкции, а s_j – число таких конъюнкций в соответствующей ДНФ. Получаемая пара биклик должна обладать как можно лучшим весом. Вес пары биклик B_1 и B_2 определяется как упорядоченная пара (R, S), где $R = r_1 + r_2$ и $S = s_1 \times s_2$. Вес (R, S) считается лучшим, если R минимально, а среди весов, обладающих равным минимальным R, лучшим считается вес с наибольшим S. Ясно, что R должно быть минимальным, так как эта сумма равна для окончательно построенных биклик сумме чисел аргументов функций g_1 и g_2, которую надо минимизировать. Чем больше элементарных конъюнкций минимального ранга в ДНФ, соответствующей строящейся биклике B_i, тем больше возможность, что этот ранг r_i увеличится на минимальную величину или останется прежним при добавлении ребер к биклике. Поэтому при нескольких вариантах с одинаковыми значениями R следует выбирать тот, для которого S максимально.

Задание вида функции φ осуществляется приданием строкам матриц M^1 и M^0 булевых или троичных двухкомпонентных векторов, представляющих возможные значения функций g_1 и g_2. Например, если φ – сложение по модулю 2, то строкам матрицы M^1 приписываются векторы (0, 1) и (1, 0), а строкам матрицы M^0 – векторы (0, 0) и (1, 1). Если φ – стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции), то строкам матрицы M^1 приписывается вектор (0, 0), а строкам матрицы M^0 – векторы (1, –) и (–, 1).

Если вид функции φ задан, следует рассмотреть линейные и нелинейные функции по отдельности, как это сделано в работе [6], ввиду того, что в этих случаях множества рассматриваемых биклик имеют свои особенности. Из всех булевых функций, существенно зависящих от двух переменных, к линейным относятся функции, выражаемые операциями сложения по модулю 2, и эквиваленции, к нелинейным – все остальные.

В работах [12, 13] для получения решения используется полный перебор пар биклик. Как было отмечено выше, это значительно ограничивает практическое применение предлагаемой методики. В настоящей статье используется целенаправленный поиск подходящих пар биклик, избегающий полного перебора. Поэтому оптимальное решение не гарантировано, но близкое к нему во многих случаях удается получить за приемлемое время.

Алгебраическая декомпозиция с линейной функцией. В качестве линейной функции φ рассмотрим сложение по модулю 2, т. е. декомпозицию вида $f(\mathbf{x}) \prec g_1(\mathbf{z}_1) \oplus g_2(\mathbf{z}_2)$. Согласно значениям заданной функции f, как было указано выше, строкам матрицы M^1 припишем векторы (0, 1) и (1, 0), а строкам матрицы M^0 – векторы (0, 0) и (1, 1) в качестве возможных наборов значений функций g_1 и g_2. В случае эквиваленции эти векторы меняются местами, и поэтому действия, используемые в ходе решения при сложении по модулю 2, применимы и в случае эквиваленции. Ход решения удобно пояснить на примере. Пусть не полностью определенная функция $f(\mathbf{x})$ задана следующими матрицами:

$$\mathbf{M}^1 = \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0&1 \\ 0&0&1&1&1&1&1&0 \\ 0&1&1&1&1&0&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}, \quad \mathbf{M}^0 = \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&1 \\ 1&0&0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 9\\10\\11\\12\\13\\14\\15 \end{array}.$$

Для удобства дальнейшего изложения используем единую нумерацию строк матриц $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{M}^0$. В этом случае нумерация вершин графа G совпадает с нумерацией соответствующих строк матриц. Множества переменных, приписываемых ребрам, перечислять не будем ввиду большого количества ребер графа G. Они легко определяются по строкам матриц $\mathbf{M}^1$ и $\mathbf{M}^0$. Например, ребру v_1v_2 приписано множество $\{x_1, x_2, x_5, x_7\}$, а ребру v_1v_{15} – $\{x_2, x_4, x_8\}$.

На первом этапе получения искомых биклик B_1 и B_2 выделяется ребро v_iv_j с максимальным количеством приписанных переменных, оба конца которого присутствуют в множестве вершин графа G, соответствующем множеству M^1. Таким ребром является v_1v_8, и биклики на этом этапе приобретают значения $B_1 = (\{v_1\}, \{v_8\})$ и $B_2 = (\{v_8\}, \{v_1\})$ с элементарной дизъюнкцией $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7)$.

Следующий этап – получение биклик с двумя ребрами путем добавления новых вершин с инцидентными им ребрами. Для каждой вершины v_i из множества, соответствующего множеству M^0, формируются пары биклик $(V_1^1 \cup \{v_i\}, V_1^0)$ и $(V_2^1 \cup \{v_i\}, V_2^0)$. Из всех таких пар выбирается пара с наилучшим весом. Рассмотрим следующие варианты пар биклик с соответствующими КНФ и ДНФ, справа показано значение критерия (R, S):

$(\{v_1, v_9\}, \{v_8\}) – x_2,$
$(\{v_8, v_9\}, \{v_1\}) – x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7;$ 2, 5

$(\{v_1, v_{10}\}, \{v_8\}) – (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7 \vee x_8) =$
$= x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_7 \vee x_5x_8,$
$(\{v_8, v_{10}\}, \{v_1\}) – (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7)(x_5 \vee x_8) =$
$= x_5 \vee x_1x_8 \vee x_2x_8 \vee x_3x_8 \vee x_4x_8 \vee x_7x_8;$ 2, 5

…

$(\{v_1, v_{15}\}, \{v_8\}) – (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_7 \vee x_8) =$
$= x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_7 \vee x_2x_8 \vee x_4x_8,$
$(\{v_8, v_{15}\}, \{v_1\}) – (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7)(x_2 \vee x_4 \vee x_8) =$
$= x_2 \vee x_4 \vee x_1x_8 \vee x_2x_8 \vee x_5x_8 \vee x_7x_8.$ 2, 8

Первой в процессе перебора парой с наилучшим весом (2, 9) оказалась пара

$(\{v_1, v_{13}\}, \{v_8\}) – x_1 \vee x_5 \vee x_7,$
$(\{v_8, v_{13}\}, \{v_1\}) – x_2 \vee x_3 \vee x_4.$

Переходим к последнему этапу построения пары биклик B_1 и B_2, который состоит в последовательном внесении в множества V_1^1, V_1^0, V_2^1, V_2^0 оставшихся вершин с выбором варианта с наилучшим весом. При этом для вершины v_i из множества, соответствующего множеству M^0, формируют пары биклик вида $(V_1^1 \cup \{v_i\}, V_1^0)$, $(V_2^1 \cup \{v_i\}, V_2^0)$ и $(V_1^1, V_1^0 \cup \{v_i\})$, $(V_2^1, V_2^0 \cup \{v_i\})$, а для вершины v_j из множества, соответствующего множеству M^1, – пары вида $(V_1^1 \cup \{v_j\}, V_1^0)$, $(V_2^1, V_2^0 \cup \{v_j\})$ и $(V_1^1, V_1^0 \cup \{v_j\})$, $(V_2^1 \cup \{v_j\}, V_2^0)$. Так, для вершины v_2 получим пару

$(\{v_1, v_2, v_{13}\}, \{v_8\}) – (x_1 \vee x_5 \vee x_7)(x_3 \vee x_4) = x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_3x_5 \vee x_3x_7 \vee x_4x_5 \vee x_4x_7,$
$(\{v_8, v_{13}\}, \{v_1, v_2\}) – x_3 \vee x_4,$

$(\{v_1, v_{13}\}, \{v_2, v_8\}) – x_1 \vee x_5 \vee x_7,$
$(\{v_2, v_8, v_{13}\}, \{v_1\}) – (x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_5 \vee x_7) =$
$= x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2 \vee x_3x_5 \vee x_3x_7 \vee x_4x_5 \vee x_4x_7,$

а для вершины v_9 –

$(\{v_1, v_9, v_{13}\}, \{v_8\}) – x_2(x_1 \vee x_5 \vee x_7) = x_1x_2 \vee x_2x_5 \vee x_2x_7,$
$(\{v_8, v_9, v_{13}\}, \{v_1\}) – (x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7) = x_1x_2 \vee x_2x_5 \vee x_2x_7 \vee x_3 \vee x_4,$

$(\{v_1, v_{13}\}, \{v_8, v_9\}) - x_1 \vee x_5 \vee x_7$,
$(\{v_8, v_{13}\}, \{v_1, v_9\}) - x_2$.

Наилучшим вариантом по критерию (R, S) оказался вариант присоединения вершины v_5, для которого $(R, S) = (2, 6)$:

$(\{v_1, v_{13}\}, \{v_5, v_8\}) - x_1 \vee x_5 \vee x_7$,
$(\{v_5, v_8, v_{13}\},\{v_1\}) - (x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7) =$
$= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_5 \vee x_2 x_6 \vee x_2 x_7 \vee x_3 \vee x_4$.

Далее, перебирая все оставшиеся вершины, выбираем каждый раз ту из них, внесение которой в данные биклики дает лучший по критерию (R, S) результат. Окончательно получаем следующую пару биклик с их КНФ и ДНФ:

$(\{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}\}, \{v_2, v_5, v_8, v_9, v_{12}, v_{15}\}) - (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_6 \vee x_7) \wedge$
$\wedge (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_4 \vee x_5)(x_2 \vee x_4 \vee x_8)(x_2 \vee x_5 \vee x_7)(x_2 \vee x_6 \vee x_8)(x_3 \vee x_4 \vee x_7)(x_5 \vee x_6)(x_7 \vee x_8) =$
$= (x_1 x_2 x_3 x_6 x_7 \vee x_1 x_2 x_3 x_6 x_8 \vee x_1 x_3 x_4 x_6 x_7 \vee x_2 x_3 x_5 x_7 \vee x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \vee x_3 x_5 x_8)$,
$(\{v_2, v_5, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}\}, \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_{12}, v_{15}\}) - x_2 x_4 x_6 x_8$.

Биклика $B_1 = (\{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}\}, \{v_2, v_5, v_8, v_9, v_{12}, v_{15}\})$ определяет функцию $g_1(x_3, x_5, x_8)$, поскольку минимальный ранг, равный трем, имеет элементарная конъюнкция $x_3 x_5 x_8$ соответствующей ДНФ. Матрица $\mathbf{M}_1^1$ из задания функции g_1 строится как конкатенация минора матрицы $\mathbf{M}^1$, образованного строками 1, 3, 4, 6, 7 и столбцами x_3, x_5, x_8, и минора матрицы $\mathbf{M}^0$, образованного строками 10, 11, 13, 14 и столбцами x_3, x_5, x_8. Аналогично строится матрица $\mathbf{M}_1^0$ из строк 2, 5, 8 матрицы $\mathbf{M}^1$, строк 9, 12, 15 матрицы $\mathbf{M}^0$ и одноименных столбцов этих матриц. Переменная x_1 оказалась здесь несущественным аргументом.

Функция $g_2(x_2, x_4, x_6, x_8)$ определяется аналогично по биклике $B_2 = (\{v_2, v_5, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}\}, \{v_1\, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_{12}, v_{15}\})$ и соответствующей ДНФ. Таким образом, функции g_1 и g_2 представляются следующими матрицами:

$$\mathbf{M}_1^1 = \begin{array}{c} x_3\ x_5\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 1&0&1\\0&0&0\\1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\0&0&1\\0&0&1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_1^0 = \begin{array}{c} x_3\ x_5\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad \mathbf{M}_2^1 = \begin{array}{c} x_2\ x_4\ x_6\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_2^0 = \begin{array}{c} x_2\ x_4\ x_6\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Удалив из матриц повторяемые строки, получим задание функций g_1 и g_2:

$$\mathbf{M}_1^1 = \begin{array}{c} x_3\ x_5\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 1&0&1\\0&0&0\\1&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_1^0 = \begin{array}{c} x_3\ x_5\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 1&1&1\\0&1&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad \mathbf{M}_2^1 = \begin{array}{c} x_2\ x_4\ x_6\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_2^0 = \begin{array}{c} x_2\ x_4\ x_6\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

После минимизации ДНФ получим выражение

$$g_1 = \bar{x}_3\,\bar{x}_5 \vee x_3 x_5 \bar{x}_8 \vee \bar{x}_5 x_8, \quad g_2 = x_2\,\bar{x}_4\,\bar{x}_8 \vee \bar{x}_2 x_8 \vee x_6 x_8, \quad \varphi = g_1(x_3, x_5, x_8) \oplus g_2(x_2, x_4, x_6, x_8).$$

Алгебраическая декомпозиция с нелинейной функцией. Заметим, что при любой нелинейной функции φ строкам одной из матриц M^1 или M^0 приписывается один булев вектор возможных значений функций g_1 и g_2, а строкам другой из них – два троичных вектора. Для нелинейных функций удобно вместо полного графа G рассматривать полный двудольный граф $B = (V^1, V^0, E_B)$, где вершины из множества V^1 соответствуют элементам булева пространства из множества M^1, а вершины из множества V^0 – элементам из множества M^0.

Пусть функцию φ представляет стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции), т. е. рассмотрим декомпозицию вида $f(\mathbf{x}) \prec g_1(\mathbf{z}_1) \uparrow g_2(\mathbf{z}_2) = \overline{g_1 \vee g_2}$. Тогда в качестве возможных наборов значений функций g_1 и g_2 строкам матрицы M^1 приписывается вектор (0, 0), а строкам матрицы M^0 – векторы (1, –) и (–, 1). Пусть задана та же функция $f(\mathbf{x})$, что и в предыдущем разделе. Ясно, что $V_1^0 = V_2^0 = V^1$.

На первом этапе формирования пары биклик (B_1, B_2) выбирается пара $(\{u\}, V_1^0)$, $(\{v\}, V_2^0)$ с наилучшим весом, где $u, v \in V^0$ и $u \neq v$. Биклики такого вида с соответствующими КНФ и ДНФ для рассмотренного примера функции представлены ниже:

$(\{v_9\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_2 x_6 (x_1 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_7 \vee x_8) =$
$= x_1 x_2 x_6 \vee x_2 x_3 x_6 \vee x_2 x_6 x_7 \vee x_2 x_4 x_6 x_8 \vee x_2 x_5 x_6 x_8;$
$(\{v_{10}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_4 (x_5 \vee x_8)(x_1 \vee x_2) = x_1 x_4 x_5 \vee x_1 x_4 x_8 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_8;$
$(\{v_{11}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - (x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_3 \vee x_6 \vee x_8)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_5 \vee x_8) \wedge$
$\wedge (x_5 \vee x_6 \vee x_8) = x_1 x_4 x_8 \vee x_1 x_6 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_4 x_7 x_8 \vee x_3 x_4 x_5 \vee x_3 x_4 x_8 \vee x_3 x_6 x_8 \vee$
$\vee x_4 x_5 x_8 \vee x_5 x_6 \vee x_6 x_7;$
$(\{v_{12}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_8 (x_3 \vee x_4 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_6 \vee x_7)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_7) =$
$= x_1 x_4 x_8 \vee x_2 x_4 x_6 x_8 \vee x_3 x_8 \vee x_7 x_8;$
$(\{v_{13}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_8(x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_5 \vee x_7) =$
$= (x_1 x_2 x_8 \vee x_1 x_3 x_8 \vee x_1 x_4 x_8 \vee x_2 x_5 x_8 \vee x_3 x_5 x_8 \vee x_4 x_5 x_8 \vee x_2 x_7 x_8 \vee x_3 x_7 x_8 \vee x_4 x_7 x_8);$
$(\{v_{14}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_6 \vee x_8)(x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_8) \wedge$
$\wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_8)(x_5 \vee x_6 \vee x_7) = x_1 x_2 x_6 \vee x_1 x_3 x_7 \vee x_1 x_4 x_7 \vee x_1 x_5 \vee x_1 x_6 x_7 \vee$
$\vee x_1 x_7 x_8 \vee x_2 x_3 x_6 \vee x_2 x_5 x_8 \vee x_2 x_6 x_8 \vee x_2 x_7 x_8 \vee x_3 x_5 x_8 \vee x_3 x_6 x_7 \vee x_3 x_7 x_8 \vee x_4 x_5 x_8 \vee$
$\vee x_4 x_7 x_8 \vee x_5 x_6 \vee x_6 x_7 x_8;$
$(\{v_{15}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_3 (x_2 \vee x_4 \vee x_8)(x_1 \vee x_5)(x_5 \vee x_6) =$
$= x_1 x_2 x_3 x_6 \vee x_1 x_3 x_4 x_6 \vee x_1 x_3 x_6 x_8 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 x_5 \vee x_3 x_5 x_8.$

Из них выбираем следующую пару биклик с весом $(R, S) = (4, 4)$:

$(\{v_{12}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_8 (x_3 \vee x_4 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_6 \vee x_7)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_7) =$
$= x_1 x_4 x_8 \vee x_2 x_4 x_6 x_8 \vee x_3 x_8 \vee x_7 x_8,$
$(\{v_{14}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_6 \vee x_8)(x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_8) \wedge$
$\wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_8)(x_5 \vee x_6 \vee x_7) = x_1 x_2 x_6 \vee x_1 x_3 x_7 \vee x_1 x_4 x_7 \vee x_1 x_5 \vee x_1 x_6 x_7 \vee$
$\vee x_1 x_7 x_8 \vee x_2 x_3 x_6 \vee x_2 x_5 x_8 \vee x_2 x_6 x_8 \vee x_2 x_7 x_8 \vee x_3 x_5 x_8 \vee x_3 x_6 x_7 \vee x_3 x_7 x_8 \vee x_4 x_5 x_8 \vee$
$\vee x_4 x_7 x_8 \vee x_5 x_6 \vee x_6 x_7 x_8.$

Далее выполняется многошаговый процесс, на каждом шаге которого выбирается вершина, не присутствующая в бикликах, и вносится в какую-либо из них. Выбирается тот вариант внесения вершины, который дает лучший результат по критерию (R, S). На первом шаге выбираем вершину v_{11} и получаем следующую пару биклик:

$(\{v_{12}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_8 (x_3 \vee x_4 \vee x_7)(x_1 \vee x_3 \vee x_6 \vee x_7)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_7) =$
$= x_1 x_4 x_8 \vee x_2 x_4 x_6 x_8 \vee x_3 x_8 \vee x_7 x_8,$
$(\{v_{11}, v_{14}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - (x_1 \vee x_6 \vee x_8)(x_2 \vee x_5 \vee x_7)(x_5 \vee x_6 \vee x_7)(x_4 \vee x_6) \wedge$
$\wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_6 \vee x_8)(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_7)(x_1 \vee x_5 \vee x_8)(x_5 \vee x_6 \vee x_8) =$
$= x_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_6 \vee x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_6 x_7 \vee x_2 x_3 x_6 x_8 \vee x_4 x_5 x_8 \vee x_4 x_7 x_8 \vee x_5 x_6 \vee x_6 x_7 x_8.$

Остальные вершины вносятся в порядке $v_{13}, v_{10}, v_9, v_{15}$, и окончательно получаем пару биклик с соответствующими КНФ и ДНФ:

$$(\{v_{10}, v_{12}, v_{13}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_8\,(x_1 \vee x_3 \vee x_6 \vee x_7)\,(x_1 \vee x_5 \vee x_7)\,x_4\,(x_1 \vee x_2) =$$
$$= x_1 x_4 x_8 \vee x_2 x_4 x_5 x_6 x_8 \vee x_2 x_3 x_4 x_5 x_8 \vee x_2 x_4 x_7 x_8,$$
$$(\{v_9, v_{11}, v_{14}, v_{15}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}) - x_2 x_6 x_3 (x_1 \vee x_5) = x_1 x_2 x_3 x_6 \vee x_2 x_3 x_5 x_6.$$

Функции g_1 и g_2 строятся точно так же, как это делалось в предыдущем разделе. Можно рассматривать два варианта функции g_2 с различными множествами аргументов: $g_2(x_1, x_2, x_3, x_6)$ и $g_2(x_2, x_3, x_5, x_6)$. Если выбрать вариант разделительной декомпозиции, то после удаления из матриц повторяемых строк, получим следующее задание функций g_1 и g_2:

$$\mathbf{M}_1{}^1 = \begin{array}{c} x_1\ x_4\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_1{}^0 = \begin{array}{c} x_1\ x_4\ x_8 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad \mathbf{M}_2{}^1 = \begin{array}{c} x_2\ x_3\ x_5\ x_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{M}_2{}^0 = \begin{array}{c} x_2\ x_3\ x_5\ x_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

После минимизации ДНФ имеем следующие выражения для полученных функций:

$$g_1 = x_1 x_4 \bar{x}_8 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_8 \vee \bar{x}_1 x_4 x_8,\ \ g_2 = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_6 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_5 x_6,\ \ \varphi = g_1(x_1, x_4, x_8) \uparrow g_2(x_2, x_3, x_5, x_6).$$

Заключение. Описанный способ алгебраической декомпозиции отличается от многих известных методов прежде всего тем, что не требует задания разбиения множества аргументов исходной функции. Представленный в статье [12] подход может послужить указанием направления ускоренного поиска решения рассматриваемой задачи. Данный метод использует такой подход. Оптимальным решением задачи являются функции g_1 и g_2 с минимальной суммой чисел их аргументов. Метод не гарантирует такого минимума, но во многих случаях позволяет получить решение, близкое или совпадающее с решением, получаемым точным методом.

Список использованных источников

1. Perkowski, M. A. A Survey of Literature on Functional Decomposition, Version IV (Technical Report) / M. A. Perkowski, S. Grygiel. – Portland, USA : Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995. – 188 p.

2. Cortadella, J. Timing-driven logic bi-decomposition / J. Cortadella // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2003. – Vol. 22, no. 6. – P. 675–685.

3. Mishchenko, A. An algorithm for bi-decomposition of logic functions / A. Mishchenko, B. Steinbach, M. Perkowski // Proc. of the 38th Annual Design Automation Conf. (DAC’2001), 18–22 June 2001, Las Vegas, USA. – Las Vegas, 2001. – P. 103–108.

4. Chang, S.-C. Technology mapping for TLU FPGA’s based on decomposition of binary decision diagrams / S.-C. Chang, M. Marek-Sadowska, T. Hwang // IEEE Trans. Computer-AidedDesign. – 1996. – Vol. 15, no. 10. – P. 1226–1235.

5. Бибило, П. Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений / П. Н. Бибило. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 211 с.

6. Zakrevskij, A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions / A. D. Zakrevskij // Second Intern. Conf. on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD’97), 12–14 Nov. 1997, Minsk, Belarus / National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics. – Minsk, 1997. – Vol. 1. – P. 36–41.

7. Cheng, D. Bi-decomposition of logical mappings via semi-tensor product of matrices / D. Cheng, X. Xu // Automatica. – 2013. – Vol. 49, no. 7. – P. 1979–1985.

8. Choudhury, M. Bi-decomposition of large Boolean functions using blocking edge graphs / M. Choudhury, K. Mohanram // 2010 IEEE/ACM Intern. Conf. on Computer-Aided Design (ICCAD'2010). – San Jose : IEEE Press, 2010. – P. 586–591.

9. Fišer, P. Small but nasty logic synthesis examples / P. Fišer, J. Schmidt ; ed. by B. Steinbach // Proc. of the 8th Intern. Workshop on Boolean Problems (IWSBP'8), Freiberg, Germany, 18–19 Sept. 2008. – Freiberg, 2008. – P. 183–190.

10. Steinbach, B. Vectorial bi-decomposition for lattices of Boolean functions / B. Steinbach, C. Posthoff ; ed. by B. Steinbach // Further Improvements in the Boolean Domain. – Cambridge Scholars Publishing, 2018. – P. 175–198.

11. Поттосин, Ю. В. Декомпозиция системы частичных булевых функций с помощью покрытия графа полными двудольными подграфами / Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур : докл. Второй Всерос. конф., Екатеринбург, 2–5 нояб. 1998. – Екатеринбург : УрО РАН, 1998. – С. 185–189.

12. Поттосин, Ю. В. Метод бидекомпозиции частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 77–87.

13. Pottosin, Yu. V. A method for bi-decomposition of partial Boolean functions / Yu. V. Pottosin // Прикладная дискретная математика. – 2020. – № 47. – С. 108–116.

14. Kravets, V. N. Sequential logic synthesis using symbolic bi-decomposition / V. N. Kravets, A. Mishchenko // Advanced Techniques in Logic Synthesis, Optimizations and Applications. – New York, Dordrecht, Heidelberg, London : Springer, 2011. – P. 31–46.

15. Józwiak, L. An effective and efficient method for functional decomposition of Boolean functions based on information relationship measures / L. Józwiak, A. Chojnacki // Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systams: Proc. of 3rd DDECS Workshop, Smolenice castle, Slovakia, 5–7 April 2000. – Bratislava : Institute of Informatics, Slovak Academy of Sciences, 2000. – P. 242–249.

16. Закревский, А. Д. Декомпозиция частичных булевых функций – проверка на разделимость по заданному разбиению / А. Д. Закревский // Информатика. – 2007. – № 1(13). – С. 16–21.

17. Поттосин, Ю. В. Применение аппарата покрытий троичных матриц для поиска разбиения множества аргументов при декомпозиции булевых функций / Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков // Вестник Томского гос. университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 3(16). – P. 100–107.

18. Taghavi Afshord, S. An input variable partitioning algorithm for functional decomposition of a system of Boolean functions based on the tabular method / S. Taghavi Afshord, Yu. V. Pottosin, B. Arasteh // Discrete Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 185. – P. 208–219.

References

1. Perkowski M. A., Grygiel S. *A Survey of Literature on Functional Decomposition, Version IV (Technical Report).* Portland, USA, Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995, 188 p.

2. Cortadella J. Timing-driven logic bi-decomposition. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2003, vol. 22, no. 6, pp. 675–685.

3. Mishchenko A., Steinbach B., Perkowski M. An algorithm for bi-decomposition of logic functions. *Proceedings of the 38th Annual Design Automation Conference (DAC'2001), 18–22 June 2001, Las Vegas, USA*. Las Vegas, 2001, pp. 103–108.

4. Chang S.-C., Marek-Sadowska M., Hwang T. Technology mapping for TLU FPGA's based on decomposition of binary decision diagrams. *IEEE Transactions Computer-Aided Design*, 1996, vol. 15, no. 10, pp. 1226–1235.

5. Bibilo P. N. Dekompozicija bulevyh funkcij na osnove reshenija logicheskih uravnenij. *Decomposition of Boolean functions on the base of solving logical equations*. Minsk, Belaruskaja navuka, 2009, 211 p. (in Russian).

6. Zakrevskij A. D. On a special kind decomposition of weakly specified Boolean functions. *Second International Conference on Computer-Aided Design of Discrete Devices (CAD DD'97), Minsk, Belarus, 12–14 November 1997*. National Academy of Sciences of Belarus, Institute of Engineering Cybernetics, Minsk, 1997, vol. 1, pp. 36–41.

7. Cheng D., Xu X. Bi-decomposition of logical mappings via semi-tensor product of matrices. *Automatica*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 1979–1985.

8. Choudhury M., Mohanram K. Bi-decomposition of large Boolean functions using blocking edge graphs. *2010 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD'2010)*. San Jose, IEEE Press, 2010, pp. 586–591.

9. Fišer P., Schmidt J. Small but nasty logic synthesis examples. *Proceedings* of the *8th International Workshop on Boolean Problems (IWSBP'8), Freiberg, Germany, 18–19 September 2008*. Freiberg, 2008, pp. 183–190.

10. Steinbach B., Posthoff C. Vectorial bi-decomposition for lattices of Boolean functions. *Further Improvements in the Boolean Domain*, in B. Steinbach (ed.). Cambridge Scholars Publishing, 2018, pp. 175–198.

11. Pottosin Yu. V., Shestakov E. A. Dekompozicija sistemy chastichnyh bulevyh funkcij s pomoshch'ju pokrytij grafa polnymi dvudol'nymi podgrafami [Decomposition of a system of partial Boolean functions using covering graph with bipartite complete subgraphs]. Doklady Vtoroj Vserossijskoj konferencii "Novye informacionnye tehnologii v issledovanii diskretnyh struktur" [*Proceedings of the Second All-Russian Conference "Novel Information Technologies in the research of Discrete Structures"*]. Ekaterinburg, Ural'skoe otdelenie Rossijskoi akademii nauk, 1998, pp. 185–189 (in Russian).

12. Pottosin Yu. V. Metod bidekompozicii chastichnyh bulevyh funkcij [A method for bi-decomposition of partial Boolean functions]. Informatika [*Informatics*], 2019, vol. 16, no. 4, pp. 77–87 (in Russian).

13. Pottosin Yu. V. A method for bi-decomposition of partial Boolean functions. Prikladnaja diskrjetnaja matematika [*Applied Discrete Mathematics*], 2020, no. 47, pp. 108–116.

14. Kravets V. N., Mishchenko A. Sequential logic synthesis using symbolic bi-decomposition. *Advanced Techniques in Logic Synthesis, Optimizations and Applications*. New York, Dordrecht, Heidelberg, London, Springer, 2011, pp. 31–46.

15. Jóžwiak L., Chojnacki A. An effective and efficient method for functional decomposition of Boolean functions based on information relationship measures. *Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems: Proceedings of 3rd DDECS Workshop, Smolenice castle, Slovakia, 5–7 April 2000.* Bratislava, Institute of Informatics, Slovak Academy of Sciences, 2000, pp. 242–249.

16. Zakrevskij A. D. Dekompozicija chastichnyh bulevyh funkcij – proverka na razdielimost' po zadannomu razbieniju [Decomposition of partial Boolean functions: checking decomposability at a given partition]. Informatika [*Informatics*], 2007, no. 1(13), pp. 16–21 (in Russian).

17. Pottosin Yu. V., Shestakov E. A. Primjenjenie apparata pokrytij troichnyh matric dlja poiska razbienija mnozhestva argumentov pri dekompozicii buljebyh funkcij [Application of the apparatus of covering ternary matrices for searching partition of argument set at decomposition of Boolean functions]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universitjeta. Upravlenie, vychislitjel'naja tehnika i informatika [*Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*], 2011, no. 3(16), pp. 100–107 (in Russian).

18. Taghavi Afshord S., Pottosin Yu. V., Arasteh B. An input variable partitioning algorithm for functional decomposition of a system of Boolean functions based on the tabular method. *Discrete Applied Mathematics*, 2015, vol. 185, pp. 208–219.

Информация об авторе

Поттосин Юрий Васильевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
E-mail: pott@newman.bas-net.by

Information about the author

Yuri V. Pottosin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
E-mail: pott@newman.bas-net.by