

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**MATHEMATICAL MODELING**

УДК 517.958:532.5; 517.957; 681.513.8; 001.891.57:53  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-3-7-24>

Поступила в редакцию 01.04.2020  
Received 01.04.2020

Принята к публикации 06.05.2020  
Accepted 06.05.2020

**Моделирование и нелинейный анализ хаотических волновых процессов в электрохимически активных нейронных средах на основе матричной декомпозиции**

**А. М. Крот, С. И. Павлов**✉

*Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*  
✉E-mail: [staspavlov008@gmail.com](mailto:staspavlov008@gmail.com)

**Аннотация.** Разработана общая модель возникновения и эволюции хаотических волновых процессов в электрохимически активных нейронных средах на основе предложенного метода матричной декомпозиции операторов нелинейных систем. Рассмотрены математические модели Ходжкина – Хаксли и ФитцХью – Нагумо электрохимически активной нейронной среды. Определены необходимые условия самоорганизации хаотических автоколебаний в модели ФитцХью – Нагумо. Компьютерное моделирование на основе матричной декомпозиции хаотических волновых процессов в электрохимически активных нейронных средах показало взаимодействие нелинейных процессов высших порядков, приводящее к стабилизации (конечной величине) амплитуды хаотического волнового процесса. Математически это выражается в синхронном «противодействии» нелинейных процессов четных и нечетных порядков в общей векторно-матричной модели электрохимически активной нейронной среды, находящейся в хаотическом режиме. Отмечено, что режим жесткого самовозбуждения нелинейных колебаний в электрохимически активной нейронной среде приводит к появлению хаотического аттрактора в пространстве состояний. Вместе с тем предложенная векторно-матричная модель позволила найти более общие условия возникновения и эволюции хаотических волновых процессов по сравнению с моделью начальной турбулентности Ландау и, как следствие, объяснить возникновение согласованных нелинейных явлений в электрохимически активной нейронной среде.

**Ключевые слова:** электрохимически активная нейронная среда, модель ФитцХью – Нагумо, необходимые условия самоорганизации автоколебаний, хаотический аттрактор, матричный ряд в пространстве состояний, векторно-матричная модель хаотических волновых процессов, режим жесткого самовозбуждения нелинейных колебаний, стабилизация амплитуды хаотического процесса

**Для цитирования.** Крот, А. М. Моделирование и нелинейный анализ хаотических волновых процессов в электрохимически активных нейронных средах на основе матричной декомпозиции / А. М. Крот, С. И. Павлов // Информатика. – 2020. – Т. 17, № 3. – С. 7–24. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-3-7-24>

**Modeling and nonlinear analysis of chaotic wave processes in electrochemically active neuronal media based on matrix decomposition**

**Alexander M. Krot, Stanislav I. Pavlov**✉

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy  
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*  
✉E-mail: [staspavlov008@gmail.com](mailto:staspavlov008@gmail.com)

**Abstract.** A general model of the origin and evolution of chaotic wave processes in electrochemically active neuronal media based on the proposed method of matrix decomposition of operators of nonlinear systems has been developed. The mathematical models of Hodgkin – Huxley and FitzHugh – Nagumo of an electrochemically

active neuronal media are considered. The necessary conditions for self-organization of chaotic self-oscillations in the FitzHugh – Nagumo model are determined. Computer modeling based on the matrix decomposition of chaotic wave processes in electrochemically active neuronal media has shown the interaction of higher-order nonlinear processes leading to stabilization (to a finite value) of the amplitude of the chaotic wave process. Mathematically, this is expressed in the synchronous “counteraction” of nonlinear processes of even and odd orders in the general vector-matrix model of an electrochemically active neuronal media being in a chaotic mode. It is noted that the state of hard self-excitation of nonlinear oscillations in an electrochemically active neuronal media leads to the appearance of a chaotic attractor in the state space. At the same time, the proposed vector-matrix model made it possible to find more general conditions for the appearance and evolution of chaotic wave processes in comparison with the initial Landau turbulence model and, as a result, to explain the occurrence of consistent nonlinear phenomena in an electrochemically active neuronal media.

**Keywords:** electrochemically active neuronal media, FitzHugh – Nagumo model, necessary conditions for self-organization of self-oscillations, chaotic attractor, matrix series in state-space, vector-matrix model of chaotic wave processes, mode of hard self-excitation of nonlinear oscillations, stabilization of the amplitude of chaotic process

**For citation.** Krot A. M., Pavlov S. I. Modeling and nonlinear analysis of chaotic wave processes in electrochemically active neuronal media based on matrix decomposition. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 7–24 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-3-7-24>

**Введение.** Изучение распространения электрических сигналов возбуждения по нервным клеткам и сетям представляет большой интерес для современной нейронауки, включая диагностику нервно-мышечных патологий. Нервное волокно (аксон) является типичным примером активной среды, в которой имеется распределенный запас потенциальной энергии. Распространение сигналов по нервному волокну можно рассматривать как автоволновой процесс [1, 2], который представляет собой электрохимическую волну перехода между состоянием покоя и активным состоянием. При распространении нервного импульса в каждой точке возбудимой мембраны высвобождается энергия, исходно запасенная в виде неравновесных концентраций ионов калия и натрия по обе стороны мембраны. В живых организмах помимо одномерных активных сред и нервных волокон существуют двух- и трехмерные активные среды (головной и спинной мозг, сердечная мышца, гладкомышечные стенки кишечника и т. д.). Распространяющиеся по ним автоволны имеют ту же физическую природу, что и нервный импульс, отличаясь от последнего лишь длительностью и скоростью, а также значением в процессах жизнедеятельности организма. Вообще говоря, автоволны – это обобщенное понятие, позволяющее систематизировать экспериментальные факты и теоретические представления о некоторых нелинейных процессах, наблюдаемых в активных средах в физике, химии и биологии. Автоволны представляют собой наблюдаемые структуры, которые поддерживаются процессами локального высвобождения запасенной в среде энергии, идущей на запуск аналогичных процессов в соседних областях.

Развитие теории хаотических волновых процессов (в частности, теории турбулентности в аэрогидродинамических потоках) важно с точки зрения понимания процессов самоорганизации в электрохимически активных нейронных средах. Л. Д. Ландау в своей статье «К проблеме турбулентности» [3] разработал теорию начальной турбулентности. Идея использования неортогональных базисных функций в спектральном представлении хаотических процессов рассмотрена в статье [4]. Э. Лоренц [5], исследуя динамическое поведение вязкой жидкости в условиях конвекции (течение Рэлея – Бенара), предложил модель турбулентности, для построения которой использовался метод Галеркина с целью редуцирования системы уравнений Навье – Стокса и теплопроводности. В результате редуцированная модель Лоренца, описываемая тремя обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями, позволила выявить хаотическое поведение системы, приведшее к открытию хаотического (странного) аттрактора в пространстве состояний. Математическое понятие «хаотический аттрактор» было сформулировано Д. Рюэлем и Ф. Такенсом [6] как ключевой элемент в интерпретации иррегулярного поведения, описываемого детерминистскими уравнениями для понимания главным образом турбулентности. Тем самым было положено начало исследованиям явления, которое теперь именуется детерминированным хаосом. Впоследствии И. Пригожин [7], Г. Хакен [8]

и др., заложившие основы познания общих законов эволюции сложных динамических систем, показали, что новый порядок (самоорганизация) в сложной системе различной физической природы возникает через детерминированный хаос – хаотический режим функционирования сложной системы. Прогресс, достигнутый в этой области, способствовал интенсивным исследованиям различных сценариев перехода динамики сложных систем от периодического режима функционирования к хаотическому: через квазипериодичность, субгармонический каскад, перемежаемость и т. п. (см., например, [9]).

Несмотря на достигнутые успехи, остаются не до конца выясненными вопросы, касающиеся стабилизации хаотических волновых процессов, которая позволяет достаточно долго поддерживать незатухающие хаотические колебания в сложных системах при неизменности их управляющих параметров (например, характеристических чисел Рейнольдса  $Re$ , Рэлея  $Ra$  и т. д. для случая аэрогидродинамических систем). В этой связи в работе [10] была предложена эволюционная модель возникновения и стабилизации хаотических волновых процессов на основе матричной декомпозиции. Цель настоящей работы – раскрытие механизмов амплитудной стабилизации и эволюции хаотических волновых процессов в электрохимически активных нейронных средах, моделируемых системой нелинейных уравнений ФитцХью – Нагумо.

**Математические модели Ходжкина – Хаксли и ФитцХью – Нагумо электрохимически активной среды биологического нейрона.** Во многих случаях активную среду можно рассматривать как энергетически двухуровневую систему, которая может находиться в двух существенно различных состояниях: высоко- и низкоэнергетическом. Активные среды без восстановления после перехода остаются на низкоэнергетическом уровне, и автоволна по ним повторно распространяться не может. В этой связи автоволны по своим свойствам существенно отличаются от волн, распространяющихся в обычных диссипативных средах, например от электромагнитных или механических волн. Две автоволны, сталкиваясь, аннигилируют, т. е. уничтожают, друг друга. Для автоволн не имеют значения интерференция и отражение от границ среды или препятствий. Общее свойство обычных волн и автоволн – способность к дифракции. В активных средах с восстановлением (нервное волокно или активная среда лазера) автоволны могут распространяться повторно, так как любой элемент такой среды возвращается на высокоэнергетический уровень вследствие процессов восстановления – накачки энергии. В мембране нервного волокна накачка осуществляется за счет ионного обмена, при котором из волокна откачиваются ионы натрия, а поступают внутрь ионы калия [1, 2, 11].

**Уравнения, описывающие модель Ходжкина – Хаксли.** Модель Ходжкина – Хаксли описывает генерацию биоэлектрических потенциалов на уровне токов ионных каналов клеточной мембраны и является отправной точкой как для упрощенных, так и для более детальных моделей нейрона, которые включают большее число ионных каналов, различные типы синапсов и учитывают пространственную геометрию отдельного нейрона [12]. Важнейшую роль в процессе возникновения нервных импульсов играет клеточная мембрана. Мембрана – это двойной слой жировых молекул (липидов толщиной 3–4 нм), который препятствует перемещению заряженных ионов. Способность к изоляции заставляет мембрану функционировать как конденсатор, отделяя заряды во внутреннем пространстве клетки от зарядов во внеклеточной жидкости. Многочисленные ионопроводящие каналы, пронизывающие мембрану, имеют эффективное сопротивление ионному току, приблизительно в 10 000 раз меньше, чем слой липидов [12–14]. Таким образом, мембранная проводимость определяется плотностью и типом ионных каналов. Типичный нейрон может иметь более 10 различных типов каналов с плотностью размещения от нескольких десятков до нескольких сотен каналов на квадратном микроне мембраны.

Таким образом, мембрану можно представить в виде конденсатора. Входной ток, попадая в клетку, может увеличивать заряд конденсатора или проходить через мембранные каналы наружу. Потенциал Нернста, вызванный различием в концентрации ионов, можно изобразить в виде батареи, а ионные каналы – в виде регулируемых сопротивлений (рис. 1). На рис. 1 приняты следующие обозначения:  $C$  – емкость мембраны;  $\varepsilon_{Na}$ ,  $\varepsilon_K$  и  $\varepsilon_L$  – электродвижущие силы, возникающие за счет разности концентраций ионов натрия снаружи и внутри клетки, ионов калия и остальных видов ионов соответственно;  $R_{Na}$  – сопротивление натриевых каналов в за-

висимости от потенциала мембраны, приходящееся на единицу площади мембраны;  $R_K$  – сопротивление калиевых каналов;  $R_L$  – сопротивление канала утечки.

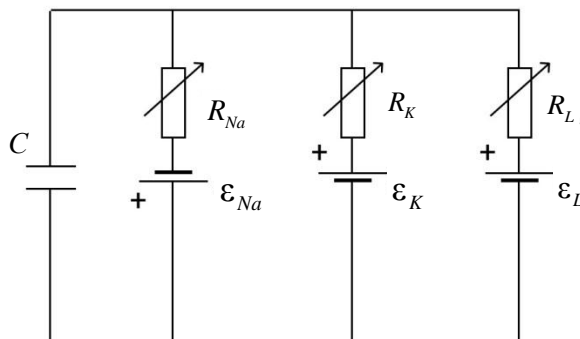


Рис. 1. Схематическое изображение модели Ходжкина – Хаксли

Опишем поведение модели Ходжкина – Хаксли посредством математических уравнений. Входной ток  $I(t)$  может быть представлен как емкостной ток  $I_C$ , заряжающий конденсатор  $C$ , и сумма токов  $I_K$ , проходящих через ионные каналы [12–14]:

$$I(t) = I_C(t) + \sum_l I_l(t). \quad (1)$$

Сумма берется по всем ионным каналам, причем стандартная модель Ходжкина – Хаксли включает только три типа каналов: натриевый, калиевый и канал утечки, т. е.  $l = K, Na, L$  (см. рис. 1). Из определения емкости  $C = Q/V$ , где  $Q$  – заряд и  $V$  – напряжение на конденсаторе, нетрудно найти ток заряда  $I_C = C dV/dt$ . Следовательно, верно равенство

$$C \frac{dV}{dt} = -\sum_l I_l(t) + I(t), \quad (2)$$

где  $V$  – напряжение на мембране;  $C$  – емкость мембраны;  $\sum_l I_l(t)$  – сумма ионных токов, проходящих через мембрану клетки. Все три канала могут быть характеризованы их сопротивлением (или проводимостью). Канал утечки не зависит от напряжения с проводимостью  $g_L = 1/R$ . Проводимость других ионных каналов определяется временем и напряжением. Если все каналы открыты, то они пропускают токи с максимальной проводимостью  $g_{Na}$  или  $g_K$ . Между тем некоторые из каналов обычно бывают заблокированы. Вероятность того, что канал является открытым, описывается дополнительными переменными  $m$ ,  $n$  и  $h$ . Пусть  $n$  – вероятность прохода одной управляющей частицы, тогда  $n^4$  – вероятность прохода четырех частиц одновременно. Совместное действие переменных  $m$  и  $h$  управляет каналом ионов натрия  $Na^+$ , а за ионы калия  $K^+$  отвечает  $n$ . Ходжкин и Хаксли определили три компоненты суммарного ионного тока следующим образом [11, 12]:

$$i(V, m, n, h) = \sum_l I_l(t) = g_{Na} m^3 h (V - \varepsilon_{Na}) + g_K n^4 (V - \varepsilon_K) + g_L (V - \varepsilon_L), \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{Na}$ ,  $\varepsilon_K$  и  $\varepsilon_L$  – потенциалы покоя. Потенциалы покоя и проводимость являются эмпирическими параметрами. Величина потенциала покоя для ионов натрия  $\varepsilon_{Na} = 50$  мВ, а для ионов калия  $\varepsilon_K = -77$  мВ [14].

Математическая модель аксона Ходжкина – Хаксли (т. е. гладкого нервного волокна, лишенного миелиновой оболочки) может быть записана в виде [11, 15]

$$D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i(u, m, n, h)}{C}, \quad (4)$$

где  $D_u$  – коэффициент диффузии,  $D_u = 1/RC$ ,  $R$  и  $C$  – соответственно сопротивление и емкость на единицу мембраны;  $u$  – напряжение нервного импульса;  $x$  – координата, вдоль которой распространяется импульс;  $m$ ,  $n$ ,  $h$  – параметры, независимо релаксирующие к своим равновесным значениям. Переменные  $m$ ,  $n$  и  $h$  называются переменными селекции и удовлетворяют следующим уравнениям [11, 12, 14]:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m, \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n, \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h. \end{cases} \quad (5)$$

Функции  $\alpha$  и  $\beta$  являются эмпирическими функциями напряжения  $V$ , которые были подобраны Ходжкиным и Хаксли [12] для аксона кальмара в соответствии с данными наблюдений. Для лучшего понимания эти уравнения удобно переписать в другой форме, разделив на  $\alpha_s(V) + \beta_s(V)$ :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-1}{\tau_s(V)} [s - q_s(V)], \quad (6)$$

где  $s$  заменяется на  $m$ ,  $n$  или  $h$ , предельное значение  $q_s(V) = \alpha_s(V) / [\alpha_s(V) + \beta_s(V)]$  и постоянная времени  $\tau_s(V) = [\alpha_s(V) + \beta_s(V)]^{-1}$ . Как видно из уравнения (6), для фиксированного значения напряжения  $V$  переменная  $s$  аппроксимируется предельным значением  $q_s(V)$  с постоянной времени  $\tau_s(V)$ . Уравнения (1)–(3) и (5)–(6) вместе с эмпирическими данными определяют полную модель Ходжкина – Хаксли, называемую также канонической моделью электрогенеза нервной клетки.

При распространении нервного импульса отмечается лавинообразное нарастание мембранного тока, в основном потока ионов  $Na^+$ , что обусловлено в первую очередь нарастанием проводимости мембраны для этих ионов. Данный процесс полностью аналогичен процессу возбуждения генератора с положительной обратной связью [11], и его обычно называют возбуждением мембраны. Процесс же установления равновесного мембранного потенциала  $V \rightarrow V_R$  ( $V_R = -65$  мВ), т. е. возврата мембраны в состояние покоя, обычно называют процессом релаксации, или рефрактерности. Процесс рефрактерности происходит в основном благодаря наличию выходящего из мембраны калиевого тока. Данные электрохимические процессы весьма точно описываются моделью Ходжкина – Хаксли.

**Исследование автоволновых процессов на основе модели ФитцХью – Нагумо.** Необходимо отметить, что математическая модель Ходжкина – Хаксли является очень громоздкой и сложной для качественного анализа распространения импульса по нервному волокну. В связи

с этим ФитцХью предложил приближенное описание возникновения и распространения нервного импульса, смысл которого заключается в следующем. У аксона Ходжкина – Хаксли время релаксации для натриевого включения  $\tau_m$  на порядок меньше, чем время релаксации  $\tau_n$  и  $\tau_h$  для калиевого включения и натриевого выключения соответственно. Таким образом, имеет смысл рассмотреть приближение, когда выполняются условия

$$\tau_m \rightarrow 0, \tau_n \rightarrow \infty, \tau_h \rightarrow \infty, \quad (7)$$

в результате чего ионный ток становится кубической функцией напряжения [11]. Это приближение справедливо только для процессов с характерными временами, существенно большими, чем  $\tau_m$ , и малыми по сравнению с  $\tau_n$  и  $\tau_h$ . Длительность фронта импульса в аксоне Ходжкина – Хаксли как раз близка к удовлетворению данных требований.

Переписывая выражение (4) с учетом (3) и (7) (переменную  $u$  при этом заменяя на  $u_1$ ) и дополняя его «восстанавливающей» переменной  $u_2$ , приходим к уравнению [2, 11]

$$D_{u_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} = \varphi(u_1) + u_2, \quad (8)$$

причем релаксационное уравнение

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \hat{\varepsilon} (u_1 + \hat{a} - \hat{b}u_2) \quad (9)$$

моделирует восстановление мембраны, т. е. процесс рефрактерности [11]. В уравнении (8) функция  $\varphi(u_1)$  представляет собой кубичный полином;  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  – постоянные.

Система уравнений (8), (9) носит название модели ФитцХью – Нагумо (ФХН) и позволяет описывать многие качественные свойства автоволн без необходимости детализировать конкретные особенности динамической системы. Данная модель дает возможность исследовать стационарное распространение и формирование импульса, деление фронтов импульса, автоволновые режимы «эх» и другие явления [2, 11]. Модель ФХН широко применяется при анализе автоволновых процессов как в одномерных, так и в двух- и трехмерных активных средах, особенно при изучении вихревых процессов, приводящих к образованию пространственно-неоднородных спиральных структур в активных средах, а также при исследовании нейронных осцилляторов [1, 15, 16].

При  $D_{u_1} = 0$  соотношения (8), (9) сводятся к уравнениям, описывающим точечную кинетику автоволновых процессов. Эти уравнения носят название «система Ван дер Поля» (по аналогии с аналогичной моделью в теории колебаний [11]). Для моделей ФХН существуют две основные формы записи [17, 18], одна из которых может быть представлена в виде системы [16, 19]

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = c(u_1 - \frac{u_1^3}{3} \mp u_2 + g), \\ \dot{u}_2 = -\frac{1}{c}(\pm u_1 - a \mp b u_2), \end{cases} \quad (10)$$

где  $u_1, u_2$  – переменные, описывающие кинетику автоволнового процесса;  $a, b, c$  – параметры. Параметр  $g$  служит здесь бифуркационной характеристикой и является пороговым значением возникновения диффузионной неустойчивости в исследуемой системе. Значения  $a, b, c$  в работе [19] были выбраны на основе экспериментальных исследований  $a = 0,7$ ;  $b = 0,8$ ;  $c = 3,0$ . На основании численного анализа (10) при помощи метода Рунге – Кутты в работе [19] было

показано, что при  $-1,4023 < g < -0,3452$  стационарное состояние становится неустойчивым, а фазовые траектории сходятся к аттрактору типа предельного цикла [7].

Применим методику бифуркационного анализа к кинетической модели ФХН, для чего переписем (10) в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = f_1(u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 = f_2(u_1, u_2). \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим матрицу  $L_{2 \times 2}^{(1)}$  линеаризованной системы, соответствующей (11):

$$L_{2 \times 2}^{(1)} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $l_{ij}^{(1)} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{u_j^*}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – элементы матрицы  $L_{2 \times 2}^{(1)}$ . След и определитель линеаризованной матрицы (12) находим согласно формулам

$$SpL_{2 \times 2}^{(1)}(u_1^*) = l_{11} + l_{22}, \quad \det L_{2 \times 2}^{(1)}(u_1^*) = l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21}. \quad (13)$$

Известно [7], что нетривиальные решения линеаризованной системы уравнений существуют при выполнении условия

$$\det [L_{2 \times 2}^{(1)} - \omega E_{2 \times 2}] = 0,$$

определяющего характеристическое уравнение

$$\omega^2 - SpL_{2 \times 2}^{(1)}\omega + \det L_{2 \times 2}^{(1)} = 0. \quad (14)$$

Для потери устойчивости при выходе системы из стационарного состояния необходимо, чтобы хотя бы один корень (14) имел положительную действительную часть, т. е. выполнялись условия

$$\operatorname{Re} \omega_i > 0; \quad (15)$$

$$\omega_i = \frac{1}{2} SpL_{2 \times 2}^{(1)} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{2} SpL_{2 \times 2}^{(1)} \right)^2 - \det L_{2 \times 2}^{(1)}}, \quad (16)$$

где  $i = 1, 2$ . В работе [7] показано, что это имеет место лишь в том случае, если на фазовой плоскости стационарное состояние представляет собой неустойчивый узел или фокус, причем данную особую точку окружает, как правило, фазовая траектория типа предельного цикла. Если  $\det L_{2 \times 2}^{(1)} > 0$ , то из выражений (14), (16) следует, что для выполнения (15) должно иметь место условие  $SpL_{2 \times 2}^{(1)} > 0$ . Данное неравенство определяет необходимое условие неустойчивости, приводящее к возникновению явления самоорганизации в активной среде [20]. При этом, как правило, происходит бифуркация особой точки, соответствующей стационарному состоянию, т. е. экспериментально наблюдается наличие «двойного» автоволнового процесса. В нервном волокне, например, начинают распространяться два импульса с различными скоростями, причем автоволна, распространяющаяся с меньшей скоростью, достаточно быстро затухает.

Для моделей ФХН (10) диагональные элементы линеаризованной матрицы  $l_{11} = c(1 - u_1^{*2})$  и  $l_{22} = \pm b/c$ , поэтому необходимое условие самоорганизации можно записать следующим образом [20]:

$$\mp \frac{b}{c^2} < 1 - u_1^{*2}, \quad (17)$$

если

$$\det L_{2 \times 2}^{(1)} > 0.$$

Согласно выражению (16) в случае  $\det L_{2 \times 2}^{(1)} < 0$  условие (15) выполняется, если  $SpL_{2 \times 2}^{(1)} < 0$ , т. е. с учетом диагональных элементов необходимое условие самоорганизации принимает вид

$$1 - u_1^{*2} < \mp \frac{b}{c^2}, \quad (17a)$$

если

$$\det L_{2 \times 2}^{(1)} < 0.$$

Следуя работе [19], рассмотрим модель ФХН при выборе верхних знаков при переменных  $u_1$  и  $u_2$  в системе (10). Тогда значение переменной  $u_1$ , соответствующее стационарному состоянию нелинейных динамических систем (НДС), может быть определено с помощью решения системы уравнений, которое получается из (10) при  $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$ :

$$\begin{cases} u_2 + u_1 - \frac{u_1^3}{3} + g = 0, \\ u_1 - a - bu_2 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Найдем решения системы (18), т. е. определим состояния равновесия. Приравнивая правые части уравнений (18), получим кубическое уравнение [20]

$$u_1^3 + 3 \frac{1-b}{b} u_1 - 3 \left( g + \frac{a}{b} \right) = 0, \quad (19)$$

или в более краткой форме

$$u_1^3 + pu_1 + q = 0. \quad (20)$$

При  $q = 0$  по аналогии с моделью, рассмотренной в [2], имеем нулевой порог возбудимости активной среды. Процесс возбуждения начинается из нулевого стационарного состояния  $u_1^* = 0, u_2^* = 0$ . Вместе с тем в реальных физических системах порог возбуждения всегда отличен от нуля и, соответственно,  $q \neq 0$ . При этом вместо нулевого решения будем рассматривать действительное решение уравнения (20), определяемое формулой Кардано:

$$u_1^* = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad (21)$$

причем дискриминант кубического уравнения  $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ .

Из уравнений (19), (20) следует, что  $p = 3 \frac{1-b}{b}$ ,  $q = -3 \left( g + \frac{a}{b} \right)$ . Подставляя величины  $p$  и  $q$  в (21), для равновесного значения переменной  $u_1$  получаем следующее выражение [20]:

$$u_1^* = \sqrt[3]{\frac{3\gamma_1}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{\frac{3\gamma_1}{2} - \sqrt{Q}}. \quad (22)$$



Здесь  $\gamma_1 = g + \frac{a}{b}$ , а дискриминант  $Q$  кубического уравнения (19) определяется по формуле [20]

$$Q = \sqrt{\frac{9\gamma_1^2}{4} + \gamma_2^3}, \quad (23)$$

где  $\gamma_2 = \frac{1-b}{b}$ .

Как упоминалось выше, в работе [19] было показано, что в окрестности значения бифуркационного параметра  $g = -1$  состояние равновесия кинетической модели (10) становится неустойчивым. Воспользовавшись формулами (22) и (23), нетрудно определить значения параметра  $g$ , при которых выполняется условие (17). Так, в случае  $g = -1$  величина  $1 - u_1^{*2} = 0,9551198$ , в то время как значение левой части (17) не зависит от  $g$  и равно  $b/c^2 = 0,0889$ . Другими словами, на основании результатов численных расчетов можно сделать вывод о том, что в окрестности значения бифуркационного параметра  $g = -1$ , а именно при  $-1,4034 \leq g \leq -0,3466$  действительно выполняется необходимое условие самоорганизации (17). Данный отрезок с высокой точностью совпадает с отрезком, рассчитанным в работе [19] при помощи численного решения системы дифференциальных уравнений (10).

**Нелинейный анализ хаотической динамики системы ФХН на основе матричной декомпозиции.** Вообще говоря, хаотические волновые процессы возникают в сложных системах самой различной физической природы (например, в гидродинамических, химических и физиологических системах [7]). В этой связи в статье [10] построена общая модель возникновения и стабилизации хаотических волновых процессов с использованием метода матричной декомпозиции в пространстве состояний сложной системы.

**Построение общей модели возникновения хаотических волновых процессов в сложных динамических системах с использованием метода матричной декомпозиции.** Известно [7], что механизмы возникновения пространственных и временных структур в сложных НДС могут быть выявлены при анализе системы нелинейных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\{u_j\}, \{\nabla u_j\}, \{\nabla^2 u_j\}, \dots, \{c_j\}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

где  $f_i$  – нелинейная функция;  $u_i = u_i(t, \vec{r})$  – функция временной  $t$  переменной и пространственных  $\vec{r}$  переменных, удовлетворяющая начальным и граничным условиям;  $\nabla$  – дифференциальный оператор Гамильтона;  $c_i$  – параметры системы. С помощью метода Галеркина система нелинейных уравнений в частных производных сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [8], поэтому в дальнейшем не будем учитывать явную зависимость  $u_i$  от пространственного вектора  $\vec{r}$ , считая, что  $u_i = u_i(t)$ .

Часто необходимо изучать поведение решения уравнения (24) вблизи конкретного стандартного состояния  $\{u_i^*\}$ , причем  $u_i^* = u_i^*(t)$  рассматривается как невозмущенное решение (24), постоянно возмущаемое внешними воздействиями или внутренними флуктуациями на величину  $v_i = v_i(t)$  [7]. В результате вместо  $u_i^*$  возникает новое решение

$$u_i = u_i^* + v_i. \quad (25)$$

Из соотношений (24) и (25) получим систему уравнений для  $\{v_i\}$ :

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i(\{u_j^* + v_j\}) - f_i(\{u_j^*\}). \quad (26)$$

Вблизи начала отсчета, т. е. при  $|v_i/u_i^*| \ll 1$ , можно линеаризовать функцию  $f_i$  в окрестности нулевых значений  $v_i$ , используя первые члены кратного ряда Тейлора [7]. Теорема Ляпунова устанавливает связь между устойчивостью систем уравнений (24) и (26): если тривиальное решение ( $v_i = 0$ ) уравнения (26) асимптотически устойчиво, то  $u_i^*$  является асимптотически устойчивым решением уравнения (24). Однако линейная теория устойчивости не позволяет сделать точный прогноз в случае сложных НДС.

В векторно-матричном виде система обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная из (24), может рассматриваться как задача Коши в  $N$ -мерном пространстве состояний  $U$  сложной НДС:

$$\dot{\bar{u}} = \bar{f}(\bar{u}(t), \bar{u}_0, \{c_i\}), \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{u}(t) \in U, \quad (27)$$

где  $\bar{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$ ,  $T$  – символ транспонирования,  $\bar{u}_0$  – вектор начальных данных,  $\{c_i\}$  – множество параметров системы. Решение  $\bar{u}(t)$  уравнения (27) задает некоторую кривую в пространстве состояний (фазовом пространстве)  $U = \mathfrak{R}^N$ , называемую фазовой траекторией. Аналогично запишем систему (26) в векторно-матричном виде:

$$\dot{\bar{v}} = \Delta \bar{f}(\bar{v}(t), \bar{u}^*, \{c_i\}), \quad (28)$$

где  $\bar{v}(t) = (v_1(t), \dots, v_N(t))^T$ ,  $\Delta \bar{f}$  – приращение векторной функции,  $\bar{u}^*$  – вектор невозмущенного (стандартного) состояния,  $\{c_i\}$  – набор параметров системы.

В работах [21–26] предложен метод матричной декомпозиции операторов сложных НДС на основе матричного ряда в пространстве состояний и рассмотрены многочисленные примеры применения данного метода для анализа сложных систем. В их числе аттракторы сложных НДС [23, 24], а также искусственная нейронная сеть Хопфилда и электрическая цепь Чжуа [26]. Согласно этому методу приращение векторной функции  $\Delta \bar{f}$  сложной НДС в пространстве состояний описывается матричным рядом [21–23]

$$\begin{aligned} \Delta \bar{f}(\bar{v}, \bar{u}^*) &= \bar{f}(\bar{u}^* + \bar{v}) - \bar{f}(\bar{u}^*) = L_{N \times N}^{(1)} \bar{v} + \frac{1}{2!} L_{N \times N^2}^{(2)} (\bar{v} \otimes \bar{v}) + \\ &+ \frac{1}{3!} L_{N \times N^3}^{(3)} (\bar{v} \otimes \bar{v} \otimes \bar{v}) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} L_{N \times N^k}^{(k)} \cdot \bar{v}^{\otimes k}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $L_{N \times N^k}^{(k)} = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial \bar{v}^T} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial \bar{v}^T} \otimes \dots \otimes \left( \frac{\partial}{\partial \bar{v}^T} \otimes \bar{f} \right) \dots \right) \right)}_k \Big|_{\bar{u}^*}$  – матричные ядра однородных нелинейных операторов системы;  $\bar{v}^{\otimes k} = \underbrace{(\bar{v} \otimes \bar{v} \otimes \dots \otimes \bar{v})}_k$  –  $k$ -я кронекеровская степень вектора возмущений  $\bar{v}$ , а  $\bar{u}^*$  рассматривается как вектор стандартного состояния в  $\mathfrak{R}^N$ .

Применяя матричное разложение (29) к правой части уравнения (28), получим уравнение

$$\dot{\bar{v}} = L_{N \times N}^{(1)} \bar{v} + \frac{1}{2!} L_{N \times N^2}^{(2)} (\bar{v} \otimes \bar{v}) + \frac{1}{3!} L_{N \times N^3}^{(3)} (\bar{v} \otimes \bar{v} \otimes \bar{v}) + \dots \quad (30)$$

Как отмечено в работе [10], уравнение (30) обобщает модель Ландау начальной турбулентности [3] после срыва стационарного режима течения жидкости с точностью до членов третьего порядка:

$$\dot{S} = 2\gamma_1 S - \alpha_L S^2 - \beta_L S^3 - \dots, \quad (31)$$

где  $\gamma_1$  – коэффициент затухания,  $\alpha_L$  – постоянная Ландау [27],  $\beta_L$  – положительная или отрицательная постоянная,  $S = |A|^2$  – квадрат амплитуды нестационарного процесса. В работе [3] показано, что в случае выполнения условий

$$\gamma_1 > 0, \alpha_L > 0, \beta_L = 0 \quad (31a)$$

реализуется нестационарный режим конечной амплитуды с дополнительной частотой  $\omega_1$ , причем  $\omega_1 \gg \gamma_1$ . Этот режим при критическом значении управляющего параметра – числа Рейнольдса  $Re_{cr1}$  – становится неустойчивым даже по отношению к бесконечно малым возмущениям и поэтому соответствует системе с мягким самовозбуждением.

По мере изменения управляющего параметра возможен новый хаотический режим, при котором выполняются условия

$$\gamma_1 > 0, \alpha_L < 0, \beta_L > 0. \quad (31б)$$

В этом режиме стационарные колебания не могут существовать вовсе, т. е. при  $Re_{cr2}$  возмущение скачком возрастает до конечной амплитуды с появлением новой дополнительной частоты  $\omega_2$ . В интервале  $Re_{cr1} < Re < Re_{cr2}$  основное движение метастабильно устойчиво по отношению к бесконечно малым величинам, но неустойчиво по отношению к возмущению конечной амплитуды [27]. Следует отметить, что феноменологическая теория Ландау, построенная на интуитивно-логическом выводе уравнения (31) и результатах гидродинамических экспериментов Рейнольдса, пригодна исключительно для объяснения возникновения начальной турбулентности в движущейся вязкой жидкости. Следовательно, уравнение (30) можно рассматривать в качестве общей модели возникновения и эволюции хаотических волновых процессов в сложных НДС [10].

**Выявление синхронизации нелинейных компонент хаотических колебаний в системе ФХН на основе матричной декомпозиции.** Как показано в работе [10], несмотря на различие физических явлений, описываемых разными сложными системами, хаотическая динамика их поведения в пространстве состояний должна иметь схожий сценарий, выражающийся в синхронном «противодействии» нелинейных процессов четных и нечетных порядков, порожденных соответствующими ядрами  $L_{N \times N^{2k}}^{(2k)}$  и  $L_{N \times N^{2k+1}}^{(2k+1)}$  в общей векторно-матричной модели (30) сложной НДС. В этой связи рассмотрим общую модель (30) возникновения хаотических процессов применительно к сложной НДС ФХН (10). Как показано в работах [22, 23], динамика сложной НДС ФХН описывается на основе линейного (11), квадратичного и кубического ядер:

$$L_{2 \times 2}^{(1)}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} c - cu_1^{*2} & c \\ -1 & b \\ c & c \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$L_{2 \times 4}^{(2)}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} -2cu_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (33)$$

$$L_{2 \times 8}^{(3)}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} -2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

поэтому векторное уравнение (30) для сложной НДС ФХН принимает вид

$$\dot{\vec{v}} = L_{2 \times 2}^{(1)} \vec{v} + \frac{1}{2!} L_{2 \times 4}^{(2)} (\vec{v} \otimes \vec{v}) + \frac{1}{3!} L_{2 \times 8}^{(3)} (\vec{v} \otimes \vec{v} \otimes \vec{v}) = \dot{\vec{v}}^{(1)} + \dot{\vec{v}}^{(2)} + \dot{\vec{v}}^{(3)}. \quad (35)$$

С учетом (32)–(35) уравнение для эволюции первой компоненты  $v_1$  векторной переменной  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  для НДС ФХН запишется в виде уравнения

$$\dot{v}_1 = cv_2 + c(1 - u_1^{*2})v_1 - cu_1^*v_1^2 - \frac{1}{3}cv_1^3. \quad (36)$$

Вводя обозначения, аналогичные модели Ландау [3, 27]:  $2\gamma_1 = c(1 - u_1^{*2})$ ,  $\alpha_L = cu_1^*$ ,  $\beta_L = c/3$ , при заданных параметрах  $a = 0,7$ ,  $b = 0,8$ ,  $c = 3,0$  и  $u_1^* = -0,45$  получаем неравенства  $\gamma_1 > 0$ ,  $\alpha_L < 0$ ,  $\beta_L > 0$ , соответствующие условию жесткого самовозбуждения системы [27]. В этом случае наблюдаются переходы от стационарного режима сложной НДС к нестационарному режиму с возникновением сначала частоты  $\omega_1$ , а затем второй частоты  $\omega_2$  согласно теориям Ландау [3, 27] и Рюэля – Такенса [6], которые в последующем определяют циклы хаотического аттрактора в пространстве состояний НДС ФХН (рис. 2). Заметим, что НДС ФХН при вышеуказанных параметрах полностью соответствует необходимому условию возникновения неустойчивости вида (17), которое, как оказывается, приводит к жесткому самовозбуждению этой системы.

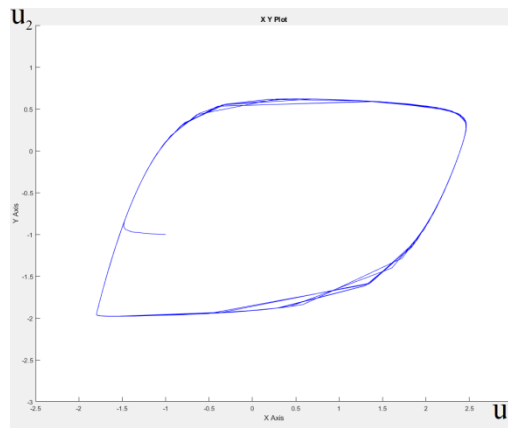


Рис. 2. Аттрактор, формирующийся на основе предельного цикла в пространстве состояний НДС ФХН

С целью детального исследования динамики НДС ФХН построим по результатам разложения в матричный ряд оператора этой системы (35) электронную модель (рис. 3).

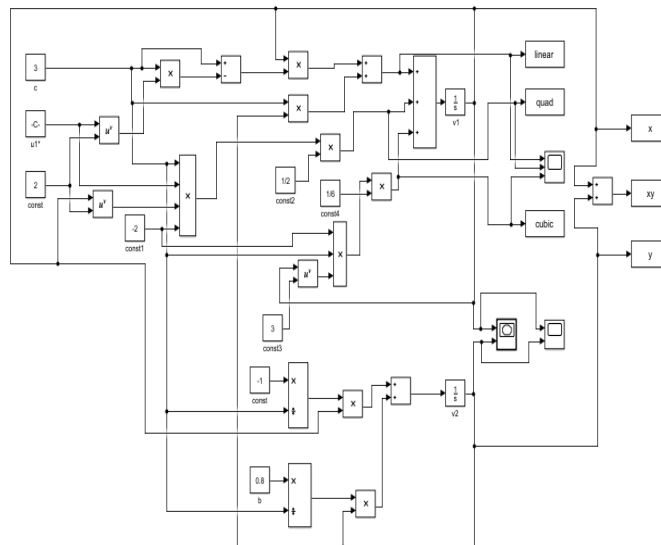


Рис. 3. Simulink-модель НДС ФХН, полученной методом матричной декомпозиции

На рис. 4 аттракторы НДС ФХН, сформированные на основе предельного цикла при заданных выше параметрах, построены на основе непосредственно численного интегрирования системы (10) и матричного разложения (35).

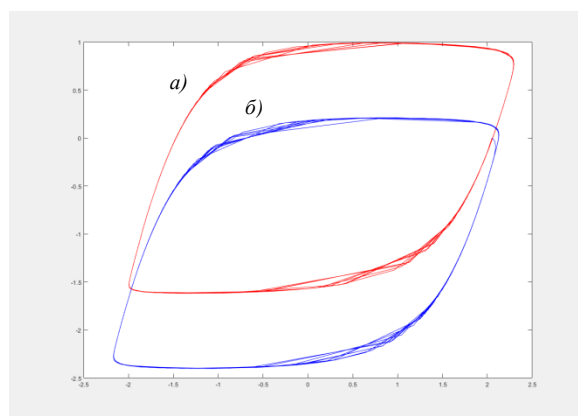


Рис. 4. Аттракторы НДС ФХН, построенные на основе матричной декомпозиции (а) и без ее использования (б)

Исследуем скорость изменения во времени первой компоненты  $v_1$  векторной переменной  $\vec{v} \in \mathfrak{R}^3$  для НДС ФХН. Синтезированная электронная модель демонстрирует разнообразные динамические режимы работы (рис. 5). Следовательно, согласно рис. 5 скорость изменения первой компоненты  $\dot{v}_1$  векторной переменной  $\vec{v} \in \mathfrak{R}^3$  для НДС ФХН эволюционирует таким образом, что выходные сигналы от кубического и квадратичного ядер, находясь в противофазе, частично компенсируют друг друга только на одном полупериоде, а на другом полупериоде эти же выходные сигналы синфазно складываются, чтобы синхронно «противодействовать» выходному сигналу от линейного ядра (рис. 5, б). Точнее, на одном полупериоде сигналы от ядер высших порядков  $L_{2 \times 4}^{(2)}$  и  $L_{2 \times 8}^{(3)}$  складываются и частично компенсируют сигнал от первого ядра  $L_{2 \times 2}^{(1)}$ , а на другом полупериоде сигналы от ядер низших порядков  $L_{2 \times 2}^{(1)}$  и  $L_{2 \times 4}^{(2)}$  складываются и частично компенсируют сигнал от третьего ядра  $L_{2 \times 8}^{(3)}$ , что в целом приводит к стабилизации амплитуды хаотического процесса.

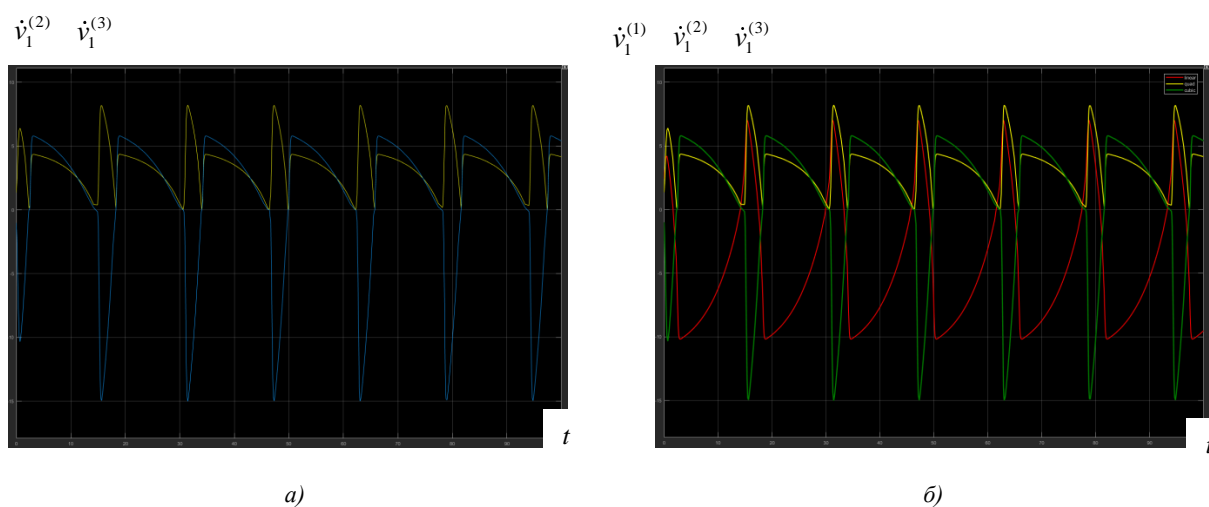


Рис. 5. Вид сигналов, порожденных квадратичным  $L_{2 \times 4}^{(2)}$  и кубическим  $L_{2 \times 8}^{(3)}$  ядрами (а) и линейным  $L_{2 \times 2}^{(1)}$ , квадратичным  $L_{2 \times 4}^{(2)}$  и кубическим  $L_{2 \times 8}^{(3)}$  ядрами (б) в общей модели (35) возникновения хаотических волновых процессов в сложной НДС ФХН

Итак, применение метода матричной декомпозиции позволило получить новые знания о динамике системы ФХН, в частности выявить эффект синхронизации сигналов с выходов четных и нечетных ядер. Кроме того, учет в электронной схеме (см. рис. 3) дополнительного управляющего параметра  $u_1^*$  открывает новые возможности для исследования ее динамики. Действительно, при  $u_1^* = 1,942\ 908\ 996$  наблюдается качественно иной хаотический аттрактор в пространстве состояний НДС ФХН (рис. 6), нежели представленный на рис. 4, а. Причина состоит в том, что НДС ФХН при заданных параметрах  $a = 0,7$ ,  $b = 0,8$ ,  $c = 3,0$  и  $u_1^* = 1,942\ 908\ 996$  удовлетворяет второму необходимому условию неустойчивости (17а), приводящему к неравенствам  $\gamma_1 < 0$ ,  $\alpha_L > 0$ ,  $\beta_L > 0$  в модели Ландау.

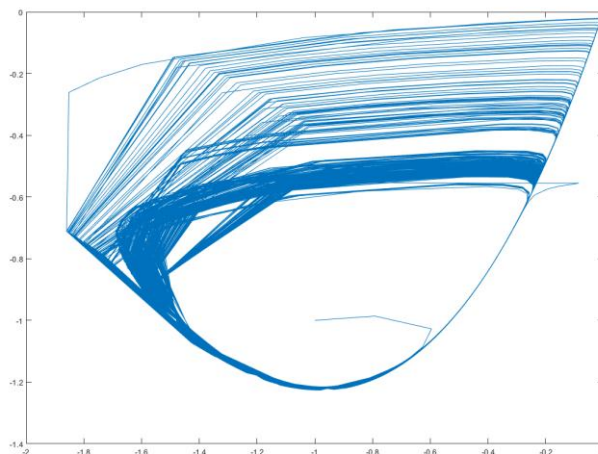


Рис. 6. Хаотический аттрактор НДС ФХН, полученный при значениях параметров  $b = 0,8$ ,  $c = 3,0$  и  $u_1^* = 1,942\ 908\ 996$

На рис. 6 видно, что при наборе параметров  $b = 0,8$ ,  $c = 3,0$  и  $u_1^* = 1,942\ 908\ 996$  возникает аperiodический режим, аналогичный аperiodическому режиму в химической модели реакции Белоусова – Жаботинского [9, 28].

Графики переменных с выходов линейного, квадратичного и кубического ядер при тех же значениях параметров показаны на рис. 7.

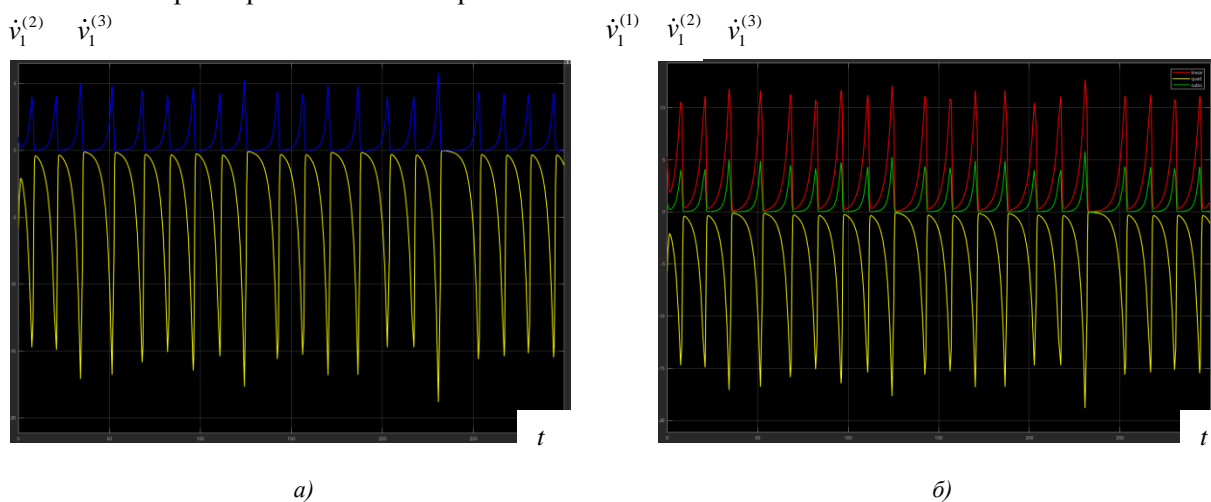


Рис. 7. Вид сигналов, порожденных квадратичным  $L_{2 \times 4}^{(2)}$  и кубическим  $L_{2 \times 8}^{(3)}$  ядрами (а) и линейным  $L_{2 \times 2}^{(1)}$ , квадратичным  $L_{2 \times 4}^{(2)}$  и кубическим  $L_{2 \times 8}^{(3)}$  ядрами (б) в общей модели (35) возникновения хаотических волновых процессов в сложной НДС ФХН

Сигналы с выходов ядер матричного разложения НДС ФХН (рис. 7, б) демонстрируют общее свойство сложной системы в хаотическом режиме – синхронное «противодействие» нелинейных процессов четных и нечетных порядков [10]. Таким образом, вычислительные эксперименты, проводимые при двух наборах параметров  $u_1^* = -0,45$  и  $u_1^* = 1,942\ 908\ 996$ , показали, что в первом случае наблюдался предельный цикл (см. рис. 4, а), а во втором – хаотический аттрактор (см. рис. 6). Именно хаотическая динамика порождает самосинхронизацию автоколебаний как фактор самоорганизации НДС ФХН.

Другими словами, динамика системы различалась при разных условиях возникновения неустойчивости (17) и (17а), что видно из графиков на рис. 5 и 7, т. е. экспериментальные исследования показывают существенное влияние величины  $u_1^*$  на динамику системы. Результаты компьютерного моделирования показали, что применение метода матричной декомпозиции к сложной НДС ФХН позволяет получить новые данные о ее динамике (в частности, выявлена зависимость от величины  $u_1^*$ ), а также оценить влияние нелинейностей высших порядков на хаотический режим функционирования системы, проявляющееся в эффекте самосинхронизации нелинейных автоколебаний с выходов ядер четных и нечетных порядков.

**Заключение.** Разработаны аналитические и имитационные модели возникновения процессов самоорганизации в активных электрохимических средах, моделируемых сложной НДС ФХН [11, 16–18, 28], на основе теории матричной декомпозиции А. М. Крота [10, 21–26]. Проведен нелинейный анализ аттракторов НДС ФХН на основе матричного ряда в пространстве состояний. Показано, что оператор системы дифференциальных уравнений ФХН представляется посредством линейного, квадратичного и кубического членов матричного ряда. Полученные члены матричного ряда положены в основу имитационной модели, использованной для проведения вычислительных экспериментов. По результатам экспериментов определены значения управляющих параметров, при которых возникают квазипериодический и хаотический режимы, и осуществлен бифуркационный анализ возникновения неустойчивости в НДС ФХН. Проведенные исследования позволили сделать вывод о том, что процесс возникновения хаотических автоколебаний в активной среде ФХН при выполнении необходимого условия неустойчивости (17) соответствует модели начальной турбулентности Л. Д. Ландау, приводящей к жесткому самовозбуждению этой системы. Однако при выполнении второго необходимого условия неустойчивости (17а) в статье найдено дополнительное условие возникновения и эволюции хаотических волновых процессов по сравнению с моделью Ландау. Это позволило установить, что при хаотическом режиме функционирования НДС ФХН возникает эффект самосинхронизации нелинейных автоколебаний с выходов четных и нечетных ядер матричного разложения. Таким образом, при достижении НДС ФХН хаотического режима наблюдается самосинхронизация автоколебаний как фактор самоорганизации активной среды ФХН.

#### Список использованных источников

1. Иваницкий, Г. Р. Автоволновые процессы: общие закономерности биологических, химических и физических активных сред / Г. Р. Иваницкий, В. И. Кринский // I Всесоюз. биофизический съезд. Секция 20. – Пушкино : НЦБИ, 1982. – 28 с.
2. Васильев, В. А. Автоволновые процессы / В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. – М. : Наука, 1987. – 240 с.
3. Ландау, Л. Д. К проблеме турбулентности / Л. Д. Ландау // Доклады АН СССР. – 1944. – Т. 44, № 8. – С. 339–342.
4. Крот, А. М. О классе дискретных квазистационарных линейных динамических систем / А. М. Крот // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 313, № 6. – С. 1376–1380.
5. Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // J. of Atmospheric Sciences. – 1963. – Vol. 20, March. – P. 130–141.
6. Ruelle, D. On the nature of turbulence / D. Ruelle, F. Takens // Communications in Mathematical Physics. – 1971. – Vol. 20. – P. 167–192.
7. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации / Г. Николис, И. Пригожин. – М. : Мир, 1979. – 512 с.
8. Хакен, Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. – М. : Мир, 1985. – 423 с.

9. Берже, П. Порядок в хаосе: о детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М. : Мир, 1991. – 368 с.
10. Крот, А. М. Эволюционная модель хаотических волновых процессов в сложных динамических системах на основе теории матричной декомпозиции / А. М. Крот // Доп. Нац. акад. наук України. – 2019. – № 9. – С. 12–19. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.09.012>
11. Скотт, Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт. – М. : Сов. радио, 1977. – 368 с.
12. Hodgkin, A. L. A quantitative description of ion currents and its applications to conduction and excitation in nerve membranes / A. L. Hodgkin, A. F. Huxley // *J. of Physiology*. – 1952. – Vol. 117. – P. 500–544.
13. Fuortes, M. G. F. Interpretation of the repetitive firing of nerve cells / M. G. F. Fuortes, F. Mantegazzini // *J. of General Physiology*. – 1962. – Vol. 45. – P. 1163–1179.
14. Koch, C. Do neurons have a voltage or a current threshold for action potential initiation? / C. Koch, O. Bernander, R. J. Douglas // *J. of Computational Neuroscience*. – 1995. – No. 2. – P. 63–82.
15. Nandapurcar, P. J. Dynamically stability of untwisted scroll rings in excitable media / P. J. Nandapurcar, A. T. Winfree // *Physica D*. – 1989. – Vol. 35, no. 3. – P. 277–288.
16. Courtemanche, M. Stable tree-dimensional action potential calculation in the FitzHugh – Nagumo model / M. Courtemanche, W. Scaggs, A. T. Winfree // *Physica D*. – 1990. – Vol. 41, no. 1. – P. 173–182.
17. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // *Biophysical J*. – 1961. – Vol. 1. – P. 445–446.
18. Nagumo, J. S. An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. S. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshisawa // *Proc. of the IRE*. – 1962. – Vol. 50. – P. 2061–2070.
19. Paydarfar, D. Dysrhythmias of the respiratory oscillator / D. Paydarfar, D. M. Buerkel // *Chaos*. – 1995. – Vol. 5, no. 1. – P. 18–29.
20. Дайлюденко, В. Ф. Моделирование процессов самоорганизации в активных средах / В. Ф. Дайлюденко, А. М. Крот // *Интеллектуальные системы : сб. науч. тр. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1998. – Вып. 1. – С. 32–45.*
21. Krot, A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system / A. M. Krot // *EUSIPCO–2000 : Proc. X European Signal Processing Conf., Tampere, Finland, 4–8 Sept. 2000. – Tampere, 2000. – Vol. 3. – P. 2453–2456.*
22. Krot, A. M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system / A. M. Krot // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2001. – Vol. 4, no. 2. – P. 106–115.
23. Крот, А. М. Анализ аттракторов сложных нелинейных динамических систем на основе матричных рядов в пространстве состояний / А. М. Крот // *Информатика*. – 2004. – № 1(1). – С. 7–16.
24. Krot, A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals / A. M. Krot // *DSP–2009 : Proc. 16th IEEE Intern. Conf. on Digital Signal Processing, Thira, Santorini, Greece, 5–7 July 2009. – Santorini, 2009. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2009.5201123>*
25. Krot, A. M. Bifurcation analysis of attractors of complex systems based on matrix decomposition theory / A. M. Krot // *IEM 2011 : Proc. of IEEE Intern. Conf. on Industrial Engineering and Management, Zhengzhou, China, 12–14 Aug. 2011. – Zhengzhou, 2011. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icmss.2011.5999350>*
26. Крот, А. М. Анализ хаотических режимов функционирования схемы Чжуа с гладкой нелинейностью на основе метода матричной декомпозиции / А. М. Крот, В. А. Сычев // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук*. – 2018. – Т. 63, № 4. – С. 501–512. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512>
27. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для студентов физ. специальностей ун-тов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под ред. Л. П. Питаевского. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, 1986. – Т. 6 : Гидродинамика. – 736 с.
28. Ерофеенко, В. Т. Основы математического моделирования : курс лекций / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2002. – 195 с.

---

## References

1. Ivanitsky G. R., Krinsky V. I. Avtovolnovye processy: obshhie zakonomernosti biologicheskikh, himicheskikh i fizicheskikh aktivnykh sred [Autowave processes: general laws of biological, chemical and physical active media]. I Vsesojuznyj biofizicheskij s"ezd. Sekcija 20 [*1st USSR Biophysical Congress. Section 20*]. Pushchino, Nauchnyj centr biologicheskikh issledovanij, 1982, 28 p. (in Russian).



2. Vasiliev V. A., Romanovsky Yu. M., Yakhno V. G. *Avtovolnovnye processy. Autowave Processes*. Moscow, Nauka, 1987, 240 p. (in Russian).
3. Landau L. D. K probleme turbulentnosti [To the problem of turbulence]. *Doklady Akademii nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of USSR]*, 1944, vol. 44, no. 8, pp. 339–342 (in Russian).
4. Krot A. M. O klasse diskretnykh kvazistacionarnykh linejnykh dinamicheskikh sistem [On a class of discrete quasistationary linear dynamic systems]. *Doklady Akademii nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of USSR]*, 1990, vol. 313, no. 6, pp. 1376–1380 (in Russian).
5. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, March, pp. 130–141.
6. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 1971, vol. 20, pp. 167–192.
7. Nicolis G., Prigogine I. *Self-organization in Nonequilibrium Systems: from Dissipative Structures to Order through Fluctuation*. New York, John Wiley&Sons, 1977, 512 p.
8. Haken H. *Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1983, 356 p.
9. Bergé P., Pomeau Y., Vidal C. *L'ordre Dans le Chaos: Vers une Approche Déterministe de la Turbulence*. Paris, Hermann, 1988.
10. Krot A. M. Jevoljucionnaja model' haoticheskikh volnovykh processov v slozhnykh dinamicheskikh sistemah na osnove teorii matrichnoj dekompozicii [An evolutionary model of chaotic wave processes in complex dynamical systems based on the matrix decomposition theory]. *Dopovidi Nacional'noï akademii nauk Ukraïni [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]*, 2019, no. 9, pp. 12–19 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.09.012>
11. Scott A. *Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics*. New York, London, etc., John Wiley&Sons, 1970, 326 p.
12. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of ion currents and its applications to conduction and excitation in nerve membranes. *The Journal of Physiology*, 1952, vol. 117, pp. 500–544.
13. Fuortes M. G. F., Mantegazzini F. Interpretation of the repetitive firing of nerve cells. *The Journal of General Physiology*, 1962, vol. 45, pp. 1163–1179.
14. Koch C., Bernardier O., Douglas R. J. Do neurons have a voltage or a current threshold for action potential initiation? *Journal of Computational Neuroscience*, 1995, no. 2, pp. 63–82.
15. Nandapurcar P. J., Winfree A. T. Dynamically stability of untwisted scroll rings in excitable media. *Physica D*, 1989, vol. 35, no. 3, pp. 277–288.
16. Courtemanche M., Scaggs W., Winfree A. T. Stable tree-dimensional action potential calculation in the FitzHugh – Nagumo model. *Physica D*, 1990, vol. 41, no. 1, pp. 173–182.
17. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1961, vol. 1, pp. 445–446.
18. Nagumo J. S., Arimoto S., Yoshisawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, vol. 50, pp. 2061–2070.
19. Paydarfar D., Buerkel D. M. Dysrhythmias of the respiratory oscillator. *Chaos*, 1995, vol. 5, no. 1, pp. 18–29.
20. Dailudenko V. F., Krot A. M. Modelirovanie processov samoorganizacii v aktivnykh sredah [Modeling of processes of self-organization in active media]. *Intellektual'nye sistemy [Intelligent systems]*, Minsk, Institute of Technical Cybernetics of the National Academy of Sciences of Belarus, 1998, vol. 1, pp. 32–45 (in Russian).
21. Krot A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system. *EUSIPCO-2000: Proceedings X European Signal Processing Conference, Tampere, Finland, 4–8 September 2000*. Tampere, 2000, vol. 3, pp. 2453–2456.
22. Krot A. M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 106–115.
23. Krot A. M. Analiz attraktorov slozhnykh nelinejnykh dinamicheskikh sistem na osnove matrichnykh rjadov v prostranstve sostojanij [Analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems based on matrix series in the state-space]. *Informatica [Informatics]*, 2004, vol. 1, no. 1, pp. 7–16 (in Russian).
24. Krot A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals. *DSP-2009: Proceedings 16th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Thira, Santorini, Greece, 5–7 July 2009*. Santorini, 2009, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icdsp.2009.5201123>
25. Krot A. M. Bifurcation analysis of attractors of complex systems based on matrix decomposition theory. *IEM 2011: Proceedings of IEEE International Conference on Industrial Engineering and Management, Zhengzhou, China, 12–14 August 2011*. Zhengzhou, 2011, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/icmss.2011.5999350>

26. Krot A. M., Sychou U. A. Analiz haoticheskikh rezhimov funkcionirovaniya shemy Chzhua s gladkoj nelinejnost'ju na osnove metoda matrichnoj dekompozicii [The analysis of chaotic regimes in Chua's circuit with smooth nonlinearity based on the matrix decomposition method]. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-technichnykh navuk [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical Series]*, 2018, vol. 63, no. 4, pp. 501–512 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-4-501-512>

27. Landau L. D., Lifschitz E. M. *Fluid Mechanics*. Oxford, Pergamon, 1959, vol. 6, 539 p.

28. Erofeenko V. T., Kozlovskaya I. S. *Fundamentals of Mathematical Modeling*. Minsk, Belarusian State University, 2002, 195 p. (in Russian).

### Информация об авторах

*Крот Александр Михайлович*, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by

*Павлов Станислав Игоревич*, инженер-программист, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.  
E-mail: staspavlov008@gmail.com

### Information about the authors

*Alexander M. Krot*, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Laboratory of Self-Organization Systems Modeling, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by

*Stanislav I. Pavlov*, Software Engineer, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.  
E-mail: staspavlov008@gmail.com