ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

УДК 517.5
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-1-39-46

Поступила в редакцию 01.07.2019
Received 01.07.2019

Принята к публикации 23.10.2019
Accepted 23.10.2019

Локальные преобразования с сингулярным вейвлетом

В. М. Романчак

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
E-mail: Romanchak@bntu.by

Аннотация. Рассматривается локальное вейвлет-преобразование с сингулярным базисным вейвлетом. С помощью последовательности локальных вейвлет-преобразований решается задача непараметрической аппроксимации функции. Традиционно считается, что вейвлет должен иметь среднее значение, равное нулю. Ранее автором рассматривались сингулярные вейвлеты, для которых среднее значение не равно нулю. Например, в качестве вейвлета использовались дельтообразные функции, которые участвуют в оценках Парзена – Розенблатта и Надарая – Ватсона. Для сингулярных вейвлетов была построена последовательность вейвлет-преобразований для всей числовой оси и конечного интервала.
В работе предлагается последовательность локальных вейвлет-преобразований, дается определение локального вейвлет-преобразования и доказываются теоремы, которые формулируют его свойства. Для подтверждения эффективности алгоритма приводится пример аппроксимации функции с помощью суммы дискретных локальных вейвлет-преобразований.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, сингулярный вейвлет, окно Парзена − Розенблатта, непараметрическая аппроксимация, ядерная оценка Надарая – Ватсона

Для цитирования. Романчак, В. М. Локальные преобразования с сингулярным вейвлетом / В. М. Романчак // Информатика. – 2020. − Т. 17, № 1. – С. 39–46. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-1-39-46

Local transformations with a singular wavelet

Vasily M. Romanchak

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
E-mail: Romanchak@bntu.by

Abstract. The paper considers a local wavelet transform with a singular basis wavelet. The problem of nonparametric approximation of a function is solved by the use of the sequence of local wavelet transforms. Traditionally believed that the wavelet should have an average equal to zero. Earlier, the author considered singular wavelets when the average value is not equal to zero. As an example, the delta-shaped functions, participated in the estimates of Parzen – Rosenblatt and Nadara – Watson, were used as a wavelet. Previously, a sequence of wavelet transforms for the entire numerical axis and finite interval was constructed for singular wavelets.
The paper proposes a sequence of local wavelet transforms, a local wavelet transform is defined, the theorems that formulate the properties of a local wavelet transform are proved. To confirm the effectiveness of the algorithm an example of approximating the function by use of the sum of discrete local wavelet transforms is given.

Keywords: wavelet transform, singular wavelets, the Parzen – Rosenblatt window method, nonparametric estimator, Nadaraya − Watson kernel regression

For citation. Romanchak V. M. Local transformations with a singular wavelet. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 1, pp. 39−46 (in Russian). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-1-39-46

Введение. С целью обоснования методов непараметрической аппроксимации строят различные математические модели. Для этого в прикладных работах рассматриваются ядерные оценки [1−4] и теория вейвлетов [4−6]. Вейвлет-преобразования с сингулярным вейвлетом расширяют возможности теории вейвлетов и ядерных оценок типа Надарая – Ватсона [7−10]. Вейвлет-преобразования можно применять для построения рекуррентной последовательности с целью аппроксимации функции. В настоящей работе для этого рассматривается локальное интегральное вейвлет-преобразование с сингулярным вейвлетом.

Обозначим $\psi(t)$ базисный вейвлет [6]. В вейвлете варьируются значения параметра масштабирования a и параметра сдвига b:

$$\frac{1}{a}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{1}$$

Пусть для вейвлета $\psi(t)$ выполняется условие на бесконечности

$$\left|\psi(t)\right| \le \frac{q}{1+t^2}, \tag{2}$$

где q, $q > 0$, – некоторая константа, и для функции $\psi(t)$ существует конечное среднее значение

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt, \quad \left|C_\psi\right| < \infty. \tag{3}$$

Из условий (2) и (3) следует, что $\psi(t) \in L^1(R)$. Обычно считается, что базисный вейвлет должен иметь среднее значение, равное нулю: $C_\psi = 0$. Чтобы определить локальное вейвлет-преобразование, понадобятся вейвлеты со средним значением, не равным нулю, – сингулярные вейвлеты [7].

Регуляризованное вейвлет-преобразование для бесконечного промежутка определяется формулой [9]

$$W(f - f(b))(b,a) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(b))\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{4}$$

где $b \in R$. В качестве вейвлета в преобразовании (4) можно взять дельтообразные функции [2]. Например, вейвлетом может быть функция плотности стандартного нормального распределения. Если для вейвлета $\psi(t)$ среднее значение $C_\psi = 0$, то регуляризованное вейвлет-преобразование (4) совпадает с вейвлет-преобразованием

$$W(f)(b,a) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt. \tag{5}$$

В работе [10] рассматривается вейвлет-преобразование с сингулярным вейвлетом на конечном интервале

$$Wf(b,a) = \frac{1}{aC(b,a)}\int_A^B f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

и регуляризованное вейвлет-преобразование

$$W(f - f(b))(b,a) = \frac{1}{aC(b,a)}\int_A^B (f(t) - f(b))\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt,$$

где $b \in [A, B]$, $C(b, a) \neq 0$, $0 < a < a_0$, $\psi(t)$ − сингулярный вейвлет.

Целью настоящей работы является обоснование алгоритма локальной аппроксимации. Показано, что локальное вейвлет-преобразование может применяться в методе сингулярных вейвлетов. Это позволяет локально аппроксимировать функцию, заданную на бесконечном или конечном интервале.

Локальное вейвлет-преобразование. Будем считать, что вейвлет $\psi(t)$ удовлетворяет условиям на бесконечности (2) и имеет ненулевое среднее. Следовательно, $\psi(t) \in L^1(R)$.

Для определенности считаем, что постоянная $C_\psi > 0$. Пусть функция $f(t)$ принадлежит пространству L^1. Локальное вейвлет-преобразование зададим формулой

$$Wf(b,a) = \frac{1}{aC_M}\int_{b-aM}^{b+aM} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{6}$$

где $C_M = \frac{1}{a}\int_{b-aM}^{b+aM}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt = \int_{-M}^{M}\psi(u)du,\ b\in R,\ a>0$, $\psi(t)$ − сингулярный вейвлет, C_M – нормирующая постоянная.

Если $M \to \infty$ и параметр a фиксирован, то локальное вейвлет-преобразование (6) стремится к вейвлет-преобразованию для бесконечного интервала (5), поэтому будут использоваться одинаковые обозначения для того и другого вейвлет-преобразования. Аналогично для регуляризованного локального вейвлет-преобразования применяется обозначение

$$W(f-f(b))(b,a) = \frac{1}{aC_M}\int_{b-aM}^{b+aM}(f(t)-f(b))\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{7}$$

где $b\in R$, $C_M > 0$, $a > 0$.

Лемма. Если функция $f(x)$ принадлежит пространству L^1 и непрерывна в точке $x \in R$, то функция $F(x) = W(f - f(x))(x, a)$ непрерывна в точке $x \in R$ и принадлежит пространству L^1.

Доказательство. Запишем функцию $F(x)$, используя формулу (7), в виде выражения

$$F(x) = \frac{1}{aC_M}\int_{x-aM}^{x+aM}(f(t)-f(x))\psi\left(\frac{t-x}{a}\right)dt. \tag{8}$$

Выполнив замену переменных $x = au + t$ в выражении (8), получим равенство

$$F(x) = -f(x) + \frac{1}{C_M}\int_{-M}^{M} f(x+au)\psi(u)du, \tag{9}$$

где $C_M = \int_{-M}^{M}\psi(u)du$, $C_M > 0$. Пусть $F(x)$ – непрерывная в точке $x \in R$ функция и для определенности $\Delta x > 0$ (случай $\Delta x < 0$ рассматривается аналогично). Обозначим приращение функции $F(x)$ как $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$ и получим неравенство

$$|\Delta F| \le |f(x+\Delta x) - f(x)| + \frac{1}{C_M}\int_{-M}^{M}|f(x+\Delta x+au) - f(x+au)|\psi(u)du. \tag{10}$$

Докажем, что выражение ΔF можно сделать сколь угодно малым. Пусть $\omega_x(\delta) = = \sup\limits_{|\Delta x|\le\delta}|f(x+\Delta x) - f(x)|$, где x и $x+\Delta x \in R$. Тогда выполняется неравенство

$$|\Delta F| \le \omega_x(\Delta x) + \omega_x(\Delta x)\frac{1}{C_M}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|dt \le \varepsilon$$

для достаточно малого Δx $\psi(t) \in L^1(R)$.

Таким образом, показана непрерывность функции $F(x) = W(f-f(x))(x, a)$ в точке x. Теперь докажем, что $F(x)\in L^1$. На основании (9) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)\right|dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx + \frac{1}{C_M}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-M}^{M} f(x+au)\psi(u)dudx\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx + \frac{1}{C_M}\left|\int_{-M}^{M}\psi(u)\int_{-\infty}^{\infty} f(x+au)dxdu\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx + \frac{1}{C_M}\left|\int_{-M}^{M}\psi(u)du\right|\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\tau)\right|d\tau = 2\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx.$$

Из леммы следует, что последовательное применение вейвлет-преобразования приводит к последовательности непрерывных в точке x функций из пространства L^1. Пусть $\psi(t)$ – вейвлет, среднее значение которого $C_\psi > 0$. Покажем, что можно аппроксимировать функцию $f(x)$ с помощью последовательности регуляризованных локальных вейвлет-преобразований

$$F^{k+1}(x) = F^k(x) - WF^k(x, a_k), \tag{11}$$

где

$$WF^k(x,a_k) = \frac{1}{C_M}\int_{x-a_kM}^{x+a_kM} F^k(t)\psi\left(\frac{t-x}{a_k}\right)dt, \tag{12}$$

$F^0(x) = f(x)$ − начальное значение, $F^k(x)\in L^1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, K$, M – фиксированная постоянная, $M > 0$, $C_M > 0$, $F^k(x)$ – регуляризованное локальное вейвлет-преобразование (7) (с точностью до знака, $F^{k+1}(x) = -W(F^k - F^k(x))(x,a_k)$).

Теорема 1. *Если функция* $f(x)\in L^1$ *и непрерывна в точке* $x\in[A, B]$, *то справедливо вейвлет-разложение*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} WF^k(x,a_k) + F^K(x), \tag{13}$$

где a_k − *произвольные положительные действительные числа;*

$F^0(x) = f(x)$;

$F^k(x) \in L^1$, $F^k(x)$ − *последовательность рекуррентных вейвлет-преобразований (11);*

$F^K(x)$ – *остаточный член;*

k – *порядковый номер вейвлет-преобразования,* $0 \le k \le K$;

K – *порядок приближения,* $K \ge 1$.

Доказательство проиллюстрируем на примере приближения второго порядка, $K = 2$. Выберем M так, чтобы выполнялось $C_M > 0$. В этом случае согласно рекуррентным формулам (11) справедливы равенства

$$F^1(x) = F^0(x) - WF^0(x,a_0),$$

$$F^2(x) = F^1(x) - WF^1(x,a_1).$$

Складывая данные равенства, получим $F^2(x) = F^0(x) - WF^0(x,a_0) - WF^1(x,a_1)$. Учитывая, что $F^0(x) = f(x)$, будет выполняться выражение

$$f(x) = WF^0(x,a_0) + WF^1(x,a_1) + F^2(x). \tag{14}$$

Таким образом доказано, что равенство (13) выполняется тождественно для случая $K = 1$. Для произвольного порядка K формула (13) доказывается аналогично.

Формула остаточного члена. Вначале определим разности k-го порядка Δ^k в узлах z, z_0, z_1, …, z_k по формулам

$$\Delta f(z, z_0) = f(z) - f(z + z_0), \tag{15}$$

$$\Delta^2 f(z, z_0, z_1) = \Delta f(z, z_0) - \Delta f(z + z_1, z_0), \tag{16}$$

$$\Delta^k f(z, z_0, z_1, ..., z_{k-1}) = \Delta^{k-1} f(z, z_0, z_1, ..., z_{k-2}) - \Delta^{k-1} f(z + z_{k-1}, z_0, ..., z_{k-2}).$$

Из формулы (11) при $k = 0$ получим равенство

$$F^1(x) = \frac{1}{C_M} \int_{-M}^{M} \left(f(x) - f(x + au) \right) \psi(u) du. \tag{17}$$

С учетом разности первого порядка (15) справедливо выражение

$$F^1(x) = \frac{1}{C_M} \int_{-M}^{M} \Delta^1 f(x, a_0 u_0) \psi(u_0) du. \tag{18}$$

Для функции $F^2(x)$ из формулы (11) при $k = 1$ получим равенство

$$F^2(x) = \frac{1}{C_M} \int_{-M}^{M} \Delta^1 F_1(x, a_1 u_1) \psi(u_1) du_0. \tag{19}$$

Используя разность второго порядка (16) и выражение (18), запишем равенство (19) как соотношение

$$F^2(x) = \frac{1}{C_M^2} \int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} \Delta^2 f(x, a_0 u_0, a_1 u_1) \psi(u_0) \psi(u_1) du_0 du_1.$$

Аналогично для функции $F^k(x)$ справедливо представление

$$F^k(x) = \frac{1}{C_M^k} \int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} ... \int_{-M}^{M} \Delta^k f(x, a_0 u_0, a_1 u_1, ..., a_{k-1} u_{k-1}) \psi(u_0) \psi(u_1) ... \psi(u_{k-1}) du_0 du_1 ... du_{k-1}. \tag{20}$$

Теорема 2 (достаточное условие равномерной сходимости). *Пусть по формуле (11) определена последовательность вейвлет-преобразований* $F^k(x)$ *с неотрицательным вейвлетом* $\psi(u)$. *Если для функции* $f(x) \in L^1$ *в некоторых точках* $x \in R$ *выполняется условие Липшица* $|f(x) - f(x+\Delta x)| < L|\Delta x|$, *где* L *– постоянная, то последовательность* $F^k(x)$ *равномерно стремится к нулю в этих точках для* $a_k = a_0 q^k$, $k = 0, 1, \ldots,$ $0 < q < 1/2$.

Доказательство. Если для функции $f(x)$ в точке x выполняется условие Липшица, то для разности первого порядка $\Delta f(x, a_0 u_0) = f(x) - f(x + a_0 u_0)$ получим неравенство

$$\left| \Delta f(x, a_0 u_0) \right| \le a_0 L |u_0| .$$

Аналогично для разности второго порядка справедливо неравенство

$$\left| \Delta^2 f(x, a_0 u_0, a_1 u_1) \right| \le \left| f(x) - f(x + a_1 u_1) \right| + \left| f(x + a_0 u_0 + a_1 u_1) - f(x + a_0 u_0) \right| \le 2^1 a_1 L |u_1|.$$

В общем случае для разности k +1-го порядка выполняется неравенство

$$\Delta^k f(x, a_0 u_0, a_1 u_1, ..., a_{k-1} u_{k-1}) \le 2^{k-1} a_{k-1} L |u_{k-1}|. \tag{21}$$

Для функции $F^k(x)$, заданной формулой (20), используя соотношение (21), получим неравенство

$$\left| F^k(x) \right| \le \frac{2^{k-1}}{C_M^k} \int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} ... \int_{-M}^{M} a_{k-1} |u_{k-1}| \psi(u_0) \psi(u_1) ... \psi(u_{k-1}) du_0 du_1 ... du_{k-1} \le 2^{k-1} a_{k-1} L M.$$

Итак, доказано, что $\left|F^k(x)\right| \le 2^{k-1} a_{k-1} LM$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, если $a_k = a_0 q^k$, где $0 < q < 1/2$, $a_0 > 0$, то последовательность $F^k(x)$ равномерно стремится к нулю. Функция $F^K(x)$ является остаточным членом последовательности (13). Поэтому вейвлет-разложение (13) можно использовать для аппроксимации функции $f(x)$.

Аппроксимация дельта-вейвлетами (13) может служить обоснованием численного алгоритма аппроксимации. Однако можно определить дискретное вейвлет-преобразование и самостоятельно. В этом случае требуется дополнительное исследование, целесообразность которого подтвердим с помощью примера аппроксимации непрерывной функции, заданной на дискретном множестве точек. Пусть точки x_i, $i = 1, \ldots, n$, принадлежат интервалу [–1, 1] и известны значения функции $y_i = f(x_i)$ в этих точках.

Алгоритм дискретной аппроксимации:

1. Присваиваем начальные значения y_i коэффициентам вейвлет-преобразования нулевого порядка: $W_i^0 = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Вычисляем коэффициенты локального регуляризованного вейвлет-преобразования, используя дискретный аналог формулы (11):

$$W_j^k = W_j^{k-1} - \frac{\sum\limits_{S(i)} W_i^{k-1} \psi\left(\dfrac{x_i - x_j}{a_{k-1}}\right)}{\sum\limits_{S(i)} \psi\left(\dfrac{x_i - x_j}{a_{k-1}}\right)}, \tag{22}$$

где $k = 1, \ldots, K$, W_i^k − значения коэффициентов вейвлета k-го порядка в точке x_i, $j = 1, \ldots, n$, $a_k = \alpha 2^{-k}$, α − постоянная. В формуле (22) $S(i)$ означает суммирование выражений под знаком суммы по всем значениям переменной i, для которых выполняется неравенство $\left|x_i - x_j\right| \le a_{k-1} M$.

3. Восстанавливаем функцию $f_K(x) \approx f(x)$ во всех точках интервала [–1, 1], используя аналог формулы (13):

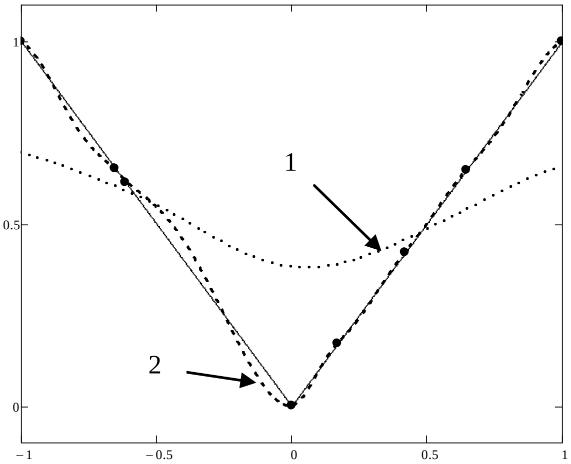
$$f_K(x) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\sum\limits_{S(i)} W_i^k \psi\left(\dfrac{x_i - x}{a_k}\right)}{\sum\limits_{S(i)} \psi\left(\dfrac{x_i - x}{a_k}\right)}. \tag{23}$$

Рассмотрим частный случай: $\psi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $x_i \in [-1, 1]$, $y_i = |x_i|$. Выбраны значения параметров $M = 32$, $a_0 = 1$. Значения коэффициентов вейвлетов W_i^k, найденные по формуле (22), представлены в таблице. Номеру строки m, $m = 1, 2, \ldots, 6$, соответствует номер преобразования $k = m - 1$. Номер столбца i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, совпадает с номером точки x_i.

Коэффициенты вейвлетов W_i^k

1,00	0,61	0,17	0,00	0,65	0,65	0,42	1,00
0,31	0,02	–0,22	–0,38	0,11	0,05	–0,03	0,35
0,14	–0,01	–0,06	–0,19	0,06	0,00	0,01	0,14
0,03	–0,01	0,01	–0,06	0,01	0,00	0,01	0,02
0,00	–0,01	0,01	–0,01	0,00	0,01	0,00	0,00
0,00	–0,00	0,00	–0,00	0,00	0,00	–0,00	–0,00

Значения аппроксимирующей функции были рассчитаны по формуле (23). На рисунке изображены график функции $f_K(x)$, $x \in [-1, 1]$, для $K = 2$ и $K = 6$, график функции $y = |x|$ и точки, в которых заданы значения функции $y_i = |x_i|$, $i = 1, 2, \ldots, 8$.



Аппроксимация функции $y = |x|$: 1 − график $f_2(x)$, 2 − график $f_6(x)$

Аппроксимацию функцией $f_2(x)$ можно интерпретировать как результат сглаживания данных, аппроксимацию функцией $f_6(x)$ − как интерполяцию (квазиинтерполяцию). Используя приближения разного порядка K, можно получить различные степени сглаживания функции или при необходимости интерполировать экспериментальные данные. Применение сингулярных вейвлетов позволяет аппроксимировать функцию в случае неравномерного расположения узлов. Результаты расчета подтверждают целесообразность продолжения исследования дискретного варианта вейвлет-преобразования.

Заключение. В работе получены новые результаты теории сингулярных вейвлетов. Впервые рассматривается определение локального преобразования с сингулярным вейвлетом. Проведено исследование сходимости последовательности преобразований с сингулярным вейвлетом. Сформулировано и доказано достаточное условие равномерной сходимости последовательности вейвлет-преобразований. Локальное вейвлет-преобразование можно использовать для аппроксимации функциональных зависимостей. Приведен пример сглаживания и квазиинтерполяции дискретно заданной функции с нерегулярным расположением узлов на конечном промежутке.

Список использованных источников

1. Хардле, В. Прикладная непараметрическая регрессия : пер. с англ. / В. Хардле. − М. : Мир, 1993. – 349 с.

2. Parzen, E. On estimation of a probability density function and mode / E. Parzen // The Annals of Mathematical Statistics. – 1962. – Vol. 33, no. 3. – P. 1065−1076.

3. Watson, G. S. Smooth regression analysis / G. S. Watson // Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Ser. A. −1964. − Vol. 26. − P. 359–372.

4. Надарая, Э. А. Об оценке регрессии / Э. А. Надарая // Теория вероятностей и ее применение. − 1964. − Т. 9, № 1. − С. 157–159.

5. Чуи, К. Введение в вейвлеты : пер. с англ. / К. Чуи. − М. : Мир, 2001. – 412 с.

6. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам : пер. с англ. / И. Добеши. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. − 464 с.

7. Серенков, П. С. Система сбора данных о качестве как техническая основа функционирования эффективных систем менеджмента качества / П. С. Серенков, В. М. Романчак, В. Л. Соломахо // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 100–104.

8. Романчак, В. М. Аппроксимация экспертных оценок сингулярными вейвлетами / В. М. Романчак, П. М. Лаппо // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2017. – Т. 7, № 1. − С. 132−139.

9. Романчак, В. М. Аппроксимация сингулярными вейвлетами / В. М. Романчак // Системный анализ и прикладная информатика. – 2018. – № 2. − С. 23–28.

10. Романчак, В. М. Сингулярные вейвлеты на конечном интервале / В. М. Романчак // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. − С. 39–49.

References

1. Härdle W. *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, 434 p.

2. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1962, vol. 33, no. 3, pp. 1065−1076.

3. Watson G. S. Smooth regression analysis. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Ser. A*, 1964, vol. 26, pp. 359–372.

4. Nadaraya E. A. Ob ocenke regressii [About a regression assessment]. Teorija verojatnostej i ee primenenie [*Probability Theory and Its Application*], 1964, vol. 9, no. 1, pp. 157–159 (in Russian).

5. Chui C. *An Introduction to Wavelets*. San Diego, Academic Press, 1992, 266 p.

6. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, 377 p.

7. Serenkov P. S., Romanchak V. M., Solomakho V. L. Sistema sbora dannyh o kachestve kak tehnicheskaja osnova funkcionirovanija jeffektivnyh sistem menedzhmenta kachestva [System of collection of data on quality as technical basis of functioning of effective systems of quality management]. Doklady Nacional'noj akademii nauk Belarusi [*Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*], 2006, vol. 50, no. 4, pp. 100−104 (in Russian).

8. Romanchak V. M., Lappo P. M. Approksimacija jekspertnyh ocenok singuljarnymi vejvletami [Approximation of expert estimates by singular wavelets]. Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 2. Matematika. Fizika. Informatika, vychislitel'naja tehnika i upravlenie [*Bulletin of the Grodno State University. Series 2: Mathematics. Physics. Informatics, Computer Science and Management*], 2017, vol. 7, no. 1, pp. 132−139 (in Russian).

9. Romanchak V. M. Approksimacija singuljarnymi vejvletami [Approximation by singular wavelets]. Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika [*Systems Analysis and Applied Informatics*], 2018, no. 2, pp. 23–28 (in Russian).

10. Romanchak V. M. Singuljarnye vejvlety na konechnom intervale [Singular wavelets on a finite interval]. Informatika [*Informatics*], 2018, vol. 15, no. 4, pp. 39−49 (in Russian).

Информация об авторе

Романчак Василий Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной математики, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь.
E-mail: Romanchak@bntu.by

Information about the author

Vasily M. Romanchak, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus.
E-mail: Romanchak@ bntu.by