

**ПРИКЛАДНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**  
**APPLIED INFORMATION TECHNOLOGIES**УДК 621.382.3  
<https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-120-138>Поступила в редакцию 09.03.2020  
Received 09.03.2020Принята к публикации 16.03.2020  
Accepted 16.03.2020**Наведение сверхзвукового управляемого объекта  
в многопозиционной радиолокационной станции  
воздушного базирования****В. Э. Маркевич<sup>✉</sup>, В. В. Легкоступ**

ОАО «АЛЕВКУРП», Минск, Беларусь

<sup>✉</sup>E-mail: [mark.vit@tut.by](mailto:mark.vit@tut.by)

**Аннотация.** Исследована возможность наведения управляемого сверхзвукового авиационного беспилотного перехватчика на движущуюся цель в автономной многопозиционной радиолокационной станции воздушного базирования. Для получения координатной информации выбран алгоритм разностно-дальномерных и разностных дальностно-доплеровских пространственных измерений при использовании ограниченного числа передающих позиций, не обеспечивающих однозначное определение координат и скорости объекта с высокой точностью. Предложены различные подходы для устранения априорной неопределенности оцениваемых координат в условиях ограниченного набора измерительных радиотехнических позиций.

Рассмотрен аналитический метод конструирования устройства оптимального управления состоянием нелинейного многомерного и многосвязного динамического объекта с учетом ограничений, позволяющий получить конечные расчетные соотношения в замкнутой алгебраической форме. Выполнен синтез устройства управления при использовании первичных измерений в декартовой и сферической системах координат, получены несколько разновидностей комбинированного метода наведения управляемого объекта в мгновенную точку встречи с целью. Приведенные алгоритмы наведения являются обобщением широко используемого на практике метода пропорциональной навигации и его различных модификаций. Отличительной особенностью синтезированных алгоритмов является естественный учет нелинейной, многомерной и многосвязной структуры объекта управления, а также параметров нестационарных возмущающих воздействий (ускорения силы тяжести, проекций продольного ускорения объекта и ускорения маневра цели), действующих в процессе наведения.

Получены унифицированные кинематические дифференциальные уравнения, описывающие динамику движения объекта управления, которые могут быть использованы при синтезе регулятора, функционирующего по задаваемым переключаемым или плавно сопрягаемым нестационарным критериям оптимальности, именуемым целевыми функциями или целевыми интегральными многообразиями. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при проектировании автономных систем самонаведения и телеуправления, реализуемых аппаратно-программным способом как на борту беспилотного авиационного или артиллерийского перехватчика, так и в составе автономных многопозиционных радиолокационных станций воздушного базирования.

**Ключевые слова:** сверхзвуковой беспилотный летательный аппарат, аналитическое конструирование агрегированных регуляторов, комбинированный метод пропорциональной навигации, многопозиционная радиолокационная станция воздушного базирования, разностно-дальномерный метод измерений

**Для цитирования.** Маркевич, В. Э. Наведение сверхзвукового управляемого объекта в многопозиционной радиолокационной станции воздушного базирования / В. Э. Маркевич, В. В. Легкоступ // Информатика. – 2020. – Т. 17, № 2. – С. 120–138. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-120-138>

## Guiding a supersonic controlled object in a multi-position air basing radar

Vitaliy E. Markevich<sup>✉</sup>, Victor V. Legkostup

*OJSC "ALEVKURP", Minsk, Belarus*

<sup>✉</sup>*E-mail: mark.vit@tut.by*

**Abstract.** The possibility of control of a guided supersonic aviation unmanned interceptor on a moving target in an autonomous airborne multi-position radar station has been investigated. To obtain the coordinate information, the algorithm of difference-range finding and difference range-Doppler spatial measurements is selected using a limited number of transmitting positions that do not provide an unambiguous determination of the coordinates and speed of the object with high accuracy. The paper proposes various approaches to eliminate a priori uncertainty regarding the estimated coordinates in a limited set of measuring radio engineering positions.

An analytical method is considered for constructing an optimal state control device for a nonlinear multidimensional and multiply connected dynamic object, taking into account the constraints, which allows one to obtain finite computational relations in a closed algebraic form. The control device was synthesized using measurements in the Cartesian and spherical coordinate systems, several varieties of the combined method of pointing a controlled object to an instant meeting point were obtained. The given guidance algorithms are a generalization of the method of proportional navigation widely used in practice and its modifications. A distinctive feature of the synthesized algorithms is the natural accounting for the nonlinear, multidimensional, and multiply connected structure of the control object, as well as the parameters of unsteady perturbations (acceleration of gravity, projections of the longitudinal acceleration of the object and acceleration of the target's maneuver) that act in the guidance process.

The unified kinematic differential equations that describe the dynamics of the control object, are obtained, and they can be used to synthesize a controller that operates according to switched or smoothly matched non-stationary optimality criteria (target functions, target integral manifolds). The developed algorithms can be used in the design of autonomous homing and telecontrol systems, implemented in hardware and software both on board an unmanned aerial or artillery interceptor, and as a part of autonomous multiposition airborne radar stations.

**Keywords:** supersonic unmanned aerial vehicle, analytical design of aggregated regulators, combined method of proportional navigation, multi-position air-based radar, differential-range measurement method

**For citation.** Markevich V. E., Legkostup V. V. Guiding a supersonic controlled object in a multi-position air basing radar. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 120–138 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-120-138>

**Введение.** В настоящее время применяются следующие способы управления и коррекции полета сверхзвуковых беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) и различных объектов управления (ОУ) наземного и воздушного базирования, запускаемых с борта летательного аппарата или с наземной пусковой установки:

- измерение собственных координат движения объекта и координат цели с использованием наземной радиотехнической позиции (станции наведения и передачи команд);
- измерение координат собственного движения ОУ с использованием бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС);
- измерение координат относительного движения цели и объекта на борту ОУ, например разведывательно-ударного БПЛА или управляемого аэродинамического средства доставки специального назначения с наземным или воздушным стартом;
- комбинация перечисленных способов измерения в интересах повышения точности и помехоустойчивости системы управления в целом.

В некоторых случаях для обозначения подобных ОУ используют, например, название «управляемый авиационный (артиллерийский) беспилотный перехватчик» (УАБП). При этом термин «авиационный (артиллерийский)» характеризует способ старта (воздушный или наземный), а слово «перехватчик» служит для обозначения функционального (целевого) назначения ОУ.

Для наведения ОУ на наземные неподвижные или малоподвижные точечные объекты используется внешний подсвет (как правило, лазерный), реализуемый с помощью передатчика, устанавливаемого на борту пилотируемого носителя, с борта которого осуществляется пуск.

Для наземных пусковых установок используются станции лазерного целеуказания (подсвета) и передачи данных, транспортируемых на колесном шасси (полустационарные) или ручную (носимые).

Наиболее существенными недостатками ОУ с лазерным или радиолокационным наведением являются их высокая стоимость, низкая мобильность, а также необходимость постоянного лазерного или радиолокационного подсвета, осуществляемого в ряде случаев с привлечением оператора наведения или группы операторов, что закономерно повышает огневую уязвимость аппаратуры управления с противодействующей стороны. Одним из перспективных вариантов дальнейшего совершенствования и повышения эффективности применения УАБП является использование нескольких автономных БПЛА с размещенными на борту приемо-передающими станциями, образующими в совокупности распределенную в пространстве радиолокационную станцию (РЛС), или многопозиционную РЛС (МП РЛС). В зависимости от используемого способа измерения координат различают активные, полуактивные и пассивные МП РЛС. В настоящей статье основное внимание уделено полуактивным МП РЛС, реализующим гиперболический способ оценивания координат и скорости движения объекта в пространстве.

Преимущества применения разностно-дальномерных (РД) и разностных дальностно-доплеровских (РДД) РЛС с реализацией обработки как на борту одной или нескольких позиций, так и на борту ОУ определяются следующими факторами:

- необходимостью снижения стоимости разработки, серийного производства и эксплуатации (применения) ОУ;
- исключением из процесса непосредственного измерения координат и выработки команд управления (наведения) оператора или группы операторов;
- организацией безопасной работы наземных операторов, участвующих в обеспечении процесса коррекции траектории полета и наведения ОУ на выбранный целевой объект (цель).

Существующие в настоящее время возможности аппаратной и программной реализации алгоритмов управления ракетами позволяют отказаться от превалировавшего до недавнего времени подхода, основанного на максимально возможном упрощении алгоритмов обработки, обеспечивающих допустимое качество функционирования. Нынешний уровень, имеющиеся возможности и ближайшие перспективы развития средств обработки радиолокационной и оптической информации позволяют реализовывать не только упрощенные алгоритмы с неполным учетом доступной априори информации, но и оптимальные алгоритмы обработки сигнальных и траекторных признаков, позволяющие значительно повысить эффективность применения как бортовых, так и наземных систем наведения.

#### **Принципы оценивания координат объекта в РДД МП РЛС воздушного базирования.**

Для разработки алгоритмов оценивания координат и синтеза оптимального управления воспользуемся подходами и методиками, представленными в работах [1–5]. Для измерения координат и управления объектом введем в рассмотрение несколько систем координат, связанных как с неподвижными позициями, так и подвижными объектами:

- базовую (целевую) систему координат (СК), центр которой совпадает с известным положением целевой точки, продольная ось направлена на географический север, вертикальная ось совпадает с местной вертикалью, а поперечная ось дополняет систему до правой;
- измерительную систему координат наземной РЛС (ИСК НРЛС), которая совмещена с местоположением наземной РЛС наведения и подсвета, продольная ось совпадает с линией визирования ОУ с ориентацией единичных направляющих векторов, дополняющих систему до правой;
- измерительную систему координат МП РЛС (ИСК МП РЛС), центр которой находится в центре масс треугольника, координаты вершины которого совпадают с координатами БПЛА-ретрансляторов, продольная ось ортогональна плоскости указанного треугольника и ориентирована в сторону цели, положение остальных осей определяется в соответствии с приведенным ниже правилом;
- скоростную систему координат (СкСК), которая связана с вектором скорости движения объекта относительно воздушной среды, ее центр совмещен с кинематическим центром масс, продольная ось совпадает с вектором скорости, вертикальная ось перпендикулярна вектору скорости и лежит в базовой плоскости ОУ, поперечная (боковая) ось дополняет систему координат до правой.

Положение осей ИСК МП РЛС задается координатами направляющих векторов продольной и поперечных осей, которые определяются исходя из следующей постановки задачи. Дан единичный вектор нормали к плоскости системы из трех БПЛА  $\mathbf{n}_x(x, y, z)$ . Необходимо получить два единичных вектора  $\mathbf{n}_y(x, y, z)$  и  $\mathbf{n}_z(x, y, z)$ , удовлетворяющих условию взаимной ортогональности и образующих в совокупности правую тройку векторов

$$\mathbf{n}_z = (\mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_y), \quad \mathbf{n}_x = (\mathbf{n}_y \times \mathbf{n}_z), \quad \mathbf{n}_y = (\mathbf{n}_z \times \mathbf{n}_x). \quad (1)$$

Это детерминированная задача, хоть и имеющая множество решений.

Последовательность выбора требуемого измерительного базиса заключается в следующем:

1. Рассчитывается центр масс системы из трех БПЛА (центр масс плоскости пространственного треугольника):

$$\mathbf{c}_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_j, \quad \Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_0, \quad \mathbf{n}_x = \frac{[\Delta \mathbf{r}_j \times \Delta \mathbf{r}_n]}{||[\Delta \mathbf{r}_j \times \Delta \mathbf{r}_n]||}, \quad j \in (1, 3), \quad n \in (1, 3), \quad j \neq n. \quad (2)$$

2. Выбирается произвольный вектор  $\mathbf{e}(x, y, z)$ , неколлинеарный с  $\mathbf{n}_x(x, y, z)$ , например вектор (URL: <https://nabbla1.livejournal.com/96041.html>)

$$\mathbf{e} = \text{if} \left( |x| > \frac{1}{\sqrt{3}}, (0 \ 1 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 0)^T \right). \quad (3)$$

3. Определяются направляющие векторы оставшихся осей ИСК:

$$\mathbf{n}_y = \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{n}_x)}{||(\mathbf{e} \times \mathbf{n}_x)||}, \quad \mathbf{n}_z = \frac{(\mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_y)}{||(\mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_y)||}. \quad (4)$$

Координаты ОУ в дальнейшем будут определяться в ИСК, центр и направление осей которой будут динамически изменяться относительно неподвижной базовой (целевой) СК из-за абсолютного и взаимного перемещения в пространстве измерительного треугольника, образованного тремя барражирующими БПЛА.

Возможен вариант привязки центра ИСК к центру окружности, описанной вокруг измерительного треугольника. В этом случае координаты центра подвижной ИСК  $\mathbf{c}_0$  наводятся из системы векторных уравнений

$$(\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_n) \times (0, 5(\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_n) - \mathbf{c}_0) = 0, \quad j \in (1, 3), \quad n \in (1, 3), \quad j \neq n. \quad (5)$$

Математическую модель канала наблюдения можно представить в виде уравнений связи измерений и наблюдений для РДД МП РЛС, записанных в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} \Delta \rho_{jn} &= |\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_j| - |\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_n|, \\ \Delta v_{jn} &= \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_j)^T (\mathbf{v}_0 - \Delta \mathbf{v}_j)}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_j|} - \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_n)^T (\mathbf{v}_0 - \Delta \mathbf{v}_n)}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_n|}, \\ \Delta \mathbf{r}_j &= \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_0, \quad \mathbf{c}_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_j, \quad \Delta \mathbf{v}_j = \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0, \quad \mathbf{s}_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \mathbf{s}_j, \quad j \in (1, 3), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$  – искомый вектор координат и скоростей ОУ;  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_j$  – вектор координат центра масс (ЦМ) системы из трех БПЛА и координаты  $j$ -го БПЛА в базовой (неподвижной) СК соответ-

ственно;  $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_j$  – скорости перемещения ЦМ системы из трех БПЛА и  $j$ -го БПЛА соответственно;  $\Delta \mathbf{r}_j$  – радиус-вектор, характеризующий направление на ОУ относительно  $j$ -го БПЛА;  $\Delta \mathbf{v}_j$  – вектор, характеризующий компоненты скорости ОУ относительно  $j$ -го БПЛА.

Приведенные соотношения определяют связь между измеряемыми и оцениваемыми (наблюдаемыми) переменными в СК, связанной с центром масс системы из трех БПЛА. В качестве наблюдаемых переменных могут применяться относительные сферические либо декартовы координаты. При использовании декартовых координат  $(x, y, z)$  и их производных  $(v_x, v_y, v_z)$  либо сферических координат  $(\varepsilon, \beta, \rho)$  и их производных  $(\dot{\varepsilon}, \dot{\beta}, \dot{\rho})$  система будет неполной (неопределенной) как для РД-, так и для РДД-измерений. Это обусловлено тем, что число уравнений измерений меньше числа оцениваемых координат (два уравнения и три координаты для РД-метода (РДМ), четыре уравнения и шесть координат для РДД-метода (РДДМ)). Задача решается при рассмотрении одной из искоемых координат, как правило, радиальной дальности (скорости), или продольной координаты  $x$  (скорости  $v_x$ ) в качестве аппроксимируемого нестационарного параметра с известным законом изменения во времени. Альтернативным вариантом является использование информации о текущих координатах и скоростях ОУ от БИНС. Исследование характеристик точности оценок, получаемых от БИНС, и их влияния на ошибки наведения ОУ и вероятности поражения цели является отдельной теоретической задачей.

Таким образом, обеспечить вычислительную определенность системы между числом переменных и числом уравнений измерений можно следующими способами:

- 1) гладкой или кусочно-ломаной экстраполяцией (аппроксимацией) неизвестной координаты (производной) в зависимости от исходных данных для стрельбы и времени полета ОУ;
- 2) совместной обработкой разностных измерений, полученных в различных точках траектории полета ОУ с минимальной кривизной;
- 3) оцениванием одной из координат и ее производной с помощью измерителей другой физической природы (например, при использовании БИНС, бортовых оптических или радиотехнических датчиков ориентации и т. д.).

Первый и второй варианты отличаются относительной простотой реализации, однако не всегда обеспечивают требуемую точность оценивания, в том числе для наведения на неподвижную цель. Третий вариант комплексирования позволяет получить высокую точность измерений, но требует при этом наличия на борту ОУ независимых инерциальных либо активно-пассивных радиотехнических или оптических измерителей.

Компромиссным вариантом является использование БИНС, работающей совместно с РДД-измерителями на конечном участке наведения, когда дальность до наземной или воздушной цели не превышает 5–6 км. С одной стороны, это позволяет снизить вклад навигационных погрешностей из-за неидеальных характеристик датчиков угловых скоростей (ДУС) и датчиков линейных ускорений (ДЛУ) при кратковременных интервалах комплексирования, а с другой – снизить стоимость бортового навигационного оборудования в составе системы ориентирования ОУ. При этом момент начала интегрирования координат, а также оценку дальности можно определять по результатам сравнения оценок доплеровской частоты между БПЛА и ОУ для каждой из подвижных позиций. Данная возможность основана на том, что в момент пролета ОУ через плоскость, образованную тремя подвижными БПЛА, доплеровская частота сигнала по линии БПЛА – ОУ изменит знак. В момент прохождения объекта через плоскость измерений пространственная навигационная задача трансформируется в двухмерную, что позволяет оценить координаты ОУ на плоскости, образованной треугольником, в вершинах которого находятся позиции РЛС. По известным координатам БПЛА с применением формул пересчета определяются координаты ОУ в пространстве. Следует отметить, что подобный вариант реализуем в случае, когда скомпенсированы уходы частоты генераторов бортовых передатчиков подвижных позиций и местного гетеродина приемника ОУ. В настоящей работе вопрос обеспечения стабильности частоты передающего и приемного трактов не рассматривается.

Информационная подсистема сопровождения (оценивания координат) и наведения входит в состав системы управления ближнего или среднего радиуса действия, состоящей из следующих элементов:

- наземной станции сопровождения и коррекции траектории ОУ на инерциальном участке наведения, сопрягаемой с пусковыми установками или артиллерийскими орудиями;
- группы приемо-передающих позиций воздушного базирования в районе цели, состоящей из трех БПЛА и предназначенной для обеспечения точного наведения на конечном участке траектории;
- подсистемы оценивания координат цели с использованием отдельного БПЛА с бортовой оптико-локационной станцией.

Вопросы технической реализации системы измерения координат цели требуют отдельного и всестороннего исследования. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением вопросов, связанных исключительно с сопровождением и наведением ОУ. Использование РД- или РДД-метода измерения координат в МП РЛС предполагает реализацию:

- измерительного приемника и устройства управления, работающих по сигналам передающих устройств БПЛА, на борту наводимого ОУ;
- измерительного приемника и устройства управления, работающих по сигналам передающего устройства ОУ, на борту одного или нескольких БПЛА;

Комбинация перечисленных способов – первичное измерение разностных координат – выполняется на борту БПЛА, измеренные координаты передаются на ОУ, формирование команд управления происходит на борту ОУ.

Для приведенных вариантов реализации характерно наличие задержки между моментами измерения и формирования команд управления на период обновления информации, что при высоких скоростях ОУ приводит к росту ошибки наведения (промаха). Кроме того, заметно возрастает сложность аппаратуры линии связи и управления при незначительном приросте эффективности работы. Поэтому в рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением варианта реализации устройства оценивания и наведения на борту ОУ. В дальнейшем будем полагать, что собственные координаты и проекции скоростей перемещения БПЛА с приемлемой для наведения точностью измеряются с помощью бортовых БИНС, корректируемых согласно данным взаимных суммарно-разностных измерений по линии БПЛА – БПЛА или данным наземной РЛС управления и передачи команд. Для оценивания координат ОУ на основе уравнений (6) могут быть использованы методы:

- поиска экстремума векторной функции векторной переменной, основанные на минимизации целевой функции (ЦФ) [1];
- статистической теории оптимальной многомерной нелинейной фильтрации в гауссовском приближении оцениваемых процессов [2];
- оценивания фазовых координат и идентификации неизвестных параметров в рамках синергетической теории управления [3, 4].

**Непрерывное оценивание координат и параметров движения объекта.** Координаты ОУ могут определяться в виде рекуррентной процедуры поиска вектора координат (сферических углов и их производных) в заданном диапазоне радиальных дальностей  $\rho_0$  и скоростей  $v_0$  ОУ, доставляющих минимум функционалу

$$J(\mathbf{x}) = \left( \|\Delta \rho \ \Delta v\| - \|\mathbf{f}_\rho(\mathbf{x}) \ \mathbf{f}_v(\mathbf{x})\| \right)^T \mathbf{R}^{-1} \left( \|\Delta \rho \ \Delta v\| - \|\mathbf{f}_\rho(\mathbf{x}) \ \mathbf{f}_v(\mathbf{x})\| \right), \quad (7)$$

$$\mathbf{x} = \min_{\rho \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{U}} \mathbf{J}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = (J_1(\mathbf{x}) \ J_2(\mathbf{x}) \ \dots \ J_k(\mathbf{x}))^T,$$

где  $\|\Delta \rho \ \Delta v\| = \|\Delta \rho_1 \ \Delta \rho_2 \ \Delta v_1 \ \Delta v_2\|$  – объединенный вектор разности радиальных дальностей и скоростей для набора из трех БПЛА;  $\mathbf{f}_\rho(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f}_v(\mathbf{x})$  – векторные функции, определяющие зависимость первичных измерений от искомым сферических координат;  $\mathbf{R}$  – ковариационная матрица ошибок первичных измерений;  $\rho \in \mathbf{R}$ ,  $v \in \mathbf{U}$  – диапазон изменения априорных оценок радиальной дальности и скорости ОУ в ИСК в окрестности истинных значений.

Измерение координат с привлечением методов теории нелинейной оптимальной фильтрации параметров [2] выполняется на основе кинематических уравнений (уравнений состояний динамической системы) для сосредоточенного канала наблюдения:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{x})\xi, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mu,\end{aligned}\quad (8)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – вектор фазовых координат системы дифференциальных уравнений (СДУ);  $\mathbf{u}$  – вектор управления состоянием динамической системы;  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  – матрица коэффициентов управления, определяемых структурой уравнений состояний;  $\mathbf{y}$  – вектор первичных параметров  $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ , наблюдаемый на фоне нормального белого шума  $\mu(t)$  с ковариационной матрицей шумов наблюдения  $\langle \mu(t_0)\mu(t_0 - \tau)^T \rangle = \mathbf{R}_\mu \delta(\tau)$ ;  $\xi(t)$  – некоррелированные гауссовские белые шумы состояний с ковариационной матрицей  $\langle \xi(t_0)^T \xi(t_0 - \tau) \rangle = \mathbf{Q}_\xi \delta(\tau)$ ;  $\mathbf{Q}_\xi$  – матрица спектральных плотностей шумов состояний размерности  $N \times N$ ,  $N$  – размерность системы уравнений динамики ОУ.

Уравнения оптимального управления получены в [2]:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{C}^+ \mathbf{G} \mathbf{A} (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}), \\ \dot{\mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}})^T - \mathbf{\Gamma} \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{\Gamma} + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{C}^T, \\ \mathbf{C}^+ &= (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T,\end{aligned}\quad (9)$$

где  $\mathbf{\Gamma}$  – матрица управления;  $\mathbf{x}_0$  – заданная кинематическая координата системы;  $\mathbf{C}^+$  – псевдообратная матрица (матрица Мура – Пенроуза) для исходной матрицы  $\mathbf{C}$ ;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – симметрические положительно определенные матрицы штрафов на отклонение оценок фазовых координат от заданного значения и на величину сигнала управления.

Уравнения квазиоптимального оценивания, синтезированные методом инвариантного погружения, имеют вид [2]

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}})^T + \mathbf{P} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{H}_0(\hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}))) \mathbf{P} + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T; \quad (10)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{P} \mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})); \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}, \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_0(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}^{-1},$$

где  $\mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}}) = \nabla \mathbf{h}_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  – градиент вектора первичных измерений по оцениваемым параметрам;  $\mathbf{G}$  – матрица коэффициентов усиления шумов состояния, определяемая исходя из структуры устройства оценивания.

Из выражения (10) для оценки матрицы апостериорной дисперсии  $\mathbf{P}$  при некоррелированных шумах наблюдений получим формулу

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}))) = -\mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}_x(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{p=0}^{P-1} \mathbf{h}_{pxx}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\mathbf{z}_p - \mathbf{h}_p(\hat{\mathbf{x}})}{R_{pp}}, \\ \mathbf{h}_{pxx}(\hat{\mathbf{x}}) &= \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_p(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_j \partial \hat{\mathbf{x}}_k} \right], \quad p \in (0, P-1),\end{aligned}\quad (13)$$

где  $p \in (1, P)$  – число каналов наблюдений (первичных измерений);  $R_{jk}$  – элемент ковариационной матрицы шумов наблюдения.

Оценивание (измерение координат) с применением методов синергетической теории управления является сравнительно новым и мало распространенным подходом, что обуславливает необходимость его отдельного и детального рассмотрения. Поэтому в данной работе для моделирования устройства оценивания ограничимся использованием приведенных выше классических алгоритмов нелинейной фильтрации в гауссовском приближении.

**Математическая модель кинематики движения объекта управления.** Для выбора модели при описании кинематики движения ОУ необходимо определить совокупность параметров движения (углов и линейных координат, угловых и линейных скоростей), которые доступны для оценивания (наблюдения) и для которых существует дифференциальная или алгебраическая связь с вектором управляемых параметров, например, нормального ускорения ОУ.

Предположим, что управление объектом будет реализовано в двух вариантах: в декартовой СК (ДСК) и сферической СК (СфСК). Управлять будем угловой скоростью вращения (УСВ) и углом ориентации линии визирования ОУ – цель (при реализации управления в СфСК) либо рассогласованием ОУ – цель (при реализации управления в ДСК). Уравнения кинематики с учетом ограничений, накладываемых на нормальные ускорения, примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_2 &= V_2, \\
 \dot{V}_2 &= W_{x2} + D_2 (\omega_{y2}^2 + \omega_{z2}^2), \\
 \dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \\
 \dot{\phi}_2 &= \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \\
 \dot{\omega}_{z2} &= \frac{W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_{y2}}{W_0}\right) - 2V_2 \omega_{z2} + W_{yc}}{D_2} - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2), \\
 \dot{\omega}_{y2} &= \frac{-W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_{z2}}{W_0}\right) - 2V_2 \omega_{y2} + W_{zc}}{D_2} + \omega_{y2} \omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2), \\
 \dot{W}_{y2} &= \alpha_y (U_y - W_{y2}), \\
 \dot{W}_{z2} &= \alpha_z (U_z - W_{z2}),
 \end{aligned} \tag{14}$$

где  $D_2, V_2$  – радиальная дальность и скорость цели относительно ОУ;  $\theta_2, \phi_2$  – углы наклона линии визирования в вертикальной и горизонтальной плоскостях;  $\omega_2 = (\omega_{x2} \ \omega_{y2} \ \omega_{z2})^T$  – вектор УСВ линии визирования ОУ – цель;  $\alpha_y, \alpha_z$  – нестационарные параметры, характеризующие инерционность объекта по каналам управления и определяемые полосой пропускания контура стабилизации ракеты;  $U_y, U_z$  – команда управления;  $W_0$  – величина максимальных располагаемых нормальных ускорений ОУ в выбранной СК;  $W_{yc}, W_{zc}$  – ускорения для компенсации влияния силы тяжести, продольного ускорения ОУ и ускорения маневра цели в соответствующие системе координат;  $\operatorname{th}(x)$  – функция гиперболического тангенса, реализующая плавное ограничение.

Запишем уравнения кинематики движения ОУ в СфСК:

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_0 &= V_0, \\
 \dot{V}_j &= W_{x0} + \rho_0 (\omega_{y0}^2 + \omega_{z0}^2), \\
 \dot{\varepsilon}_0 &= \omega_{z0}, \\
 \dot{\beta}_0 &= \frac{\omega_{y0}}{\cos(\varepsilon_0)},
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{z0} &= \frac{W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_{y0}}{W_0}\right) - 2V_0\omega_{z0} + W_{yc}}{\rho_0} - \omega_{y0}^2 \operatorname{tg}(\varepsilon_0), \\ \dot{\omega}_{y0} &= \frac{-W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_{z0}}{W_0}\right) - 2V_0\omega_{y0} + W_{zc}}{\rho_0} + \omega_{y0}\omega_{z0} \operatorname{tg}(\varepsilon_0), \\ \dot{W}_{y0} &= \alpha_y (U_y - W_{y0}), \\ \dot{W}_{z0} &= \alpha_z (U_z - W_{z0}),\end{aligned}\tag{15}$$

где  $D_0, V_0$  – радиальная дальность и скорость цели в ИСК;  $\varepsilon_0, \beta_0$  – углы вертикального и горизонтального пеленгов ОУ;  $\omega_0 = (\omega_{x0} \ \omega_{y0} \ \omega_{z0})^T$  – вектор УСВ линии дальности ОУ.

Система уравнений (15) позволяет выполнять синтез комбинированных систем управления. Например, на начальном этапе используется метод телеуправления (полное или частичное спрямление, параллельное сближение), а на конечном – метод самонаведения (управление ориентацией вектора скорости, метод переменного упреждения, метод пропорциональной навигации (МПН), наведение в мгновенную точку встречи и т. д.). Формирование конкретной структуры алгоритма управления методов осуществляется на этапе синтеза закона наведения.

В зависимости от используемых уравнений кинематики движения (уравнений состояний), записанных для декартовой либо сферической СК, матрица связи измерений и наблюдений будет иметь различный вид. Так, для уравнений измерений (6) матрица связи наблюдений и измерений (матрица Якоби от вектор-функции первичных измерений) запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_1)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_1|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_0} - \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_2)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_2|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_0} & \dots & \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_1)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_1|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_2} - \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_2)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_2|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_2} \\ \dots & \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_1)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_3|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_1} - \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_3)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_3|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_1} & \dots \\ \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_1)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_4|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_0} - \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_4)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_4|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_0} & \dots & \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_1)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_4|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_2} - \frac{(\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_4)^T}{|\mathbf{r}_0 - \Delta \mathbf{r}_4|} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix}.\tag{16}$$

При этом элементы матрицы связи наблюдений и состояний будут определяться выражениями

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= (x \ y \ z)^T = (\rho \cos(\varepsilon) \cos(\beta) \ \rho \sin(\varepsilon) \ - \ \rho \cos(\varepsilon) \sin(\beta))^T, \\ \mathbf{a} = (x \ y \ z)^T, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{a}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (\varepsilon \ \beta \ \rho)^T, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{0x}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \mathbf{r}_{0x}}{\partial \beta} & \frac{\partial \mathbf{r}_{0x}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{0y}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \mathbf{r}_{0y}}{\partial \beta} & \frac{\partial \mathbf{r}_{0y}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{0z}}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \mathbf{r}_{0z}}{\partial \beta} & \frac{\partial \mathbf{r}_{0z}}{\partial \rho} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{17}$$

где  $\mathbf{a} = (x \ y \ z)^T$  – вектор состояний при использовании разностно-дальномерных измерений и ДСК;  $\mathbf{a} = (\varepsilon \ \beta \ \rho)^T$  – вектор состояний при использовании разностно-дальномерных измерений и СфСК.

**Синтез алгоритма управления нелинейным динамическим объектом.** Сформулируем задачу синтеза алгоритма наведения следующим образом. Необходимо найти аналитический

закон формирования команд управления, который обеспечивает наведение ОУ по заданной траектории (с желаемыми угловыми координатами и скоростями), программной или динамически изменяющейся в зависимости от параметров движения цели, в выбранной СК на первой части участка наведения. На второй части траектории следует обеспечить плавный переход на наведение по методу пропорциональной навигации.

Для синтеза используем методику аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), основные положения которой изложены в работах [3, 4]. Прикладной пример аналитического синтеза модифицированного МПН в замкнутой форме с применением указанного подхода приведен в статье [5].

В качестве критерия оптимальности будем применять комбинированный критерий: на начальном участке наведения – обеспечение равенства углов ориентации РЛС – ОУ (либо линии относительной дальности ОУ – цель) заданному значению, на конечном участке наведения – поддержание нулевой УСВ линии визирования (относительной дальности) ОУ – цель. Такой подход позволит обеспечить удержание наводимого ОУ в заданном секторе углов относительно нормали к плоскости измерений (при ограниченном секторе сопровождения объекта), образованной тремя позициями воздушного базирования на базе БПЛА. Кроме того, выбранный подход гарантирует минимизацию флуктуационных нормальных ускорений ОУ при наведении на движущуюся цель, в том числе в условиях активных шумовых помех.

Приступим к процедуре синтеза комбинированного управления для ОУ. Сначала получим закон оптимального управления по заданным координатам объекта с использованием уравнений кинематики в СфСК (15). Для этого последовательно определим первую и вторую векторные макропеременные и соответствующее им векторное инвариантное многообразие (ИМ):

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_{1z}(\mathbf{x}) \\ \Psi_{1y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_z(\mathbf{x}) - f_{1z}(\mathbf{x}) \\ \dot{\omega}_y(\mathbf{x}) - f_{1y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \Psi_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_{2z}(\mathbf{x}) \\ \Psi_{2y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_z - f_{2z}(\mathbf{x}) \\ \frac{\omega_y}{\cos(\varepsilon)} - f_{2y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где  $\Psi_1(\mathbf{x}), \Psi_2(\mathbf{x})$  – ИМ первого и второго этапов редукции соответственно;  $f_{1y}(\mathbf{x}), f_{1z}(\mathbf{x})$  – полуопределенные скалярные функции векторной переменной, играющие роль внутренних (промежуточных) управлений для редуцированной системы уравнений, конкретный вид которых определяется после получения редуцированной системы уравнений кинематики желаемого вида (вместо переменных  $\dot{\omega}_z(\mathbf{x}), \dot{\omega}_y(\mathbf{x})$  используются выражения для правых частей соответствующих уравнений);  $f_{2y}(\mathbf{x}), f_{2z}(\mathbf{x})$  – функции, определяющие вид правой части редуцированной СДУ (желаемую динамику системы) относительно координат  $\varepsilon, \beta$  после второго этапа преобразования.

В качестве функционального уравнения, определяющего динамику макропеременной при движении изображающей точки к многообразию  $\Psi(\mathbf{x}) = 0$ , для векторного экспоненциального процесса используем типовое уравнение

$$\dot{\Psi}_1 + \alpha_1 \Psi_1 = 0, \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_{1z}(\mathbf{x}) \\ \Psi_{1y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $\alpha_1$  – коэффициент сходимости макропеременной к установившемуся значению;  $\mathbf{x} = (\varepsilon \beta \omega_z \omega_y W_y W_z)^T$  – вектор фазовых координат системы уравнений (15).

Выполняя подстановку (18), (19) в (15) и выражая искомый вектор управления  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = (U_y U_z)^T$ , получим полуопределенную редуцированную систему

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_0 &= \omega_{z0}, \quad \dot{\beta}_0 = \frac{\omega_{y0}}{\cos(\varepsilon_0)}, \\ \dot{\omega}_{z0} &= f_{1z}(\mathbf{x}), \quad \dot{\omega}_{y0} = f_{1y}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (20)$$

Запишем соотношения для расчета команд управления:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} U_y(\mathbf{x}) \\ U_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{r_0 \alpha_1}{\alpha_p} \Psi_1(\mathbf{x}) + \frac{r_0}{\alpha_p} \Phi_1(\mathbf{x}) - \Phi_2(\mathbf{x}),$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_{1y}(\mathbf{x}) \\ \Phi_{1z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \sum_{j=0}^{J-1} \frac{\partial f_{1z}}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_{1z}}{\partial t} \right) + \omega_y^2 (1 + \operatorname{tg}(\varepsilon))^2 \dot{\varepsilon} - 2\omega_y \operatorname{tg}(\varepsilon) \dot{\omega}_y \\ - \left( \sum_{j=0}^{J-1} \frac{\partial f_{1y}}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial f_{1y}}{\partial t} \right) - 2v_0 (\omega_z \dot{\omega}_y + \omega_y \dot{\omega}_z) \operatorname{tg}(\varepsilon) - \omega_y \omega_z (1 + \operatorname{tg}(\varepsilon))^2 \dot{\varepsilon} \end{pmatrix}; \quad (21)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_{2y}(\mathbf{x}) \\ \Phi_{2z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_0}{r_0 \alpha_p} \left( W_0 \operatorname{th} \left( \frac{W_y}{W_0} \right) - 2V_0 \omega_z + W_{yc} \right) + W_y \left( 1 - \operatorname{th} \left( \frac{W_y}{W_0} \right) \right)^2 + \frac{2(\dot{V}_0 \omega_z + V_0 \dot{\omega}_z) + \dot{W}_{yc}}{\alpha_p} \\ \frac{V_0}{r_0 \alpha_p} \left( W_0 \operatorname{th} \left( \frac{W_z}{W_0} \right) - 2V_0 \omega_y + W_{zc} \right) + W_z \left( 1 - \operatorname{th} \left( \frac{W_z}{W_0} \right) \right)^2 - \frac{2(\dot{V}_0 \omega_y + V_0 \dot{\omega}_y) + \dot{W}_{zc}}{\alpha_p} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где  $\frac{\partial f_{1z}}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial f_{1y}}{\partial x_j}$  – частные производные внутреннего (промежуточного) управления по фазовым координатам;  $\frac{\partial f_{1z}}{\partial t}$ ,  $\frac{dx_j}{dt}$  – частные производные функции внутреннего (промежуточного) управления и фазовой координаты по времени. Вводя второе ИМ (18), получим соотношение для внутреннего управления  $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{1z}(\mathbf{x}) \\ f_{1y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{2z}}{\partial \varepsilon} \omega_z + \frac{\partial f_{2z}}{\partial t} - \alpha_2 (\omega_z - f_{2z}) \\ \frac{\partial f_{2y}}{\partial \beta} \omega_y + \frac{\partial f_{2y}}{\partial t} \cos(\varepsilon) - \alpha_2 (\omega_z - f_{2y} \cos(\varepsilon)) - \omega_y \omega_z \tan(\varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Выберем в качестве функций  $f_{2z}(\mathbf{x})$ ,  $f_{2y}(\mathbf{x})$  соотношения

$$\begin{aligned} f_{2z}(\varepsilon) &= \mu(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon) + \gamma(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon)^3, \\ f_{2y}(\beta) &= \mu(t)(\beta_\alpha - \beta) + \gamma(t)(\beta_\alpha - \beta)^3, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\beta_\alpha$  – кинематические (заданные) координаты, получаемые из условия наведения объекта в заданную точку встречи с учетом имеющихся ограничений на углы отклонения относительно цели;  $\mu(t)$ ,  $\gamma(t)$  – зависящие от времени коэффициенты сходимости, обратно пропорциональные времени сходимости. Введение степенного слагаемого позволяет снизить время отработки ошибки наведения при значительных отклонениях.

Редуцированная СДУ примет экспоненциальную форму с нелинейной коррекцией за счет наличия дополнительного слагаемого:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \mu(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon) + \gamma(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon)^3, \\ \dot{\beta} &= \mu(t)(\beta_\alpha - \beta) + \gamma(t)(\beta_\alpha - \beta)^3. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения системы (25) независимы, асимптотически устойчивы и сходятся к опорным значениям  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\beta_\alpha$  при  $\mu(t)$ ,  $\gamma(t) > 0$  за время  $\tau(t) \leq \frac{3}{\mu(t)}$ .

Запишем уравнение (23), используя выражения для частных производных с учетом (24):

$$\begin{pmatrix} f_{1z}(\varepsilon, \beta) \\ f_{1y}(\varepsilon, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mu(t) + 3\gamma(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon)^2)\omega_z - \alpha_2(\omega_z - f_{2z}) + \frac{\partial f_{2z}}{\partial t} \\ -(\mu(t) + 3\gamma(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon)^2)\frac{\omega_y}{\cos(\varepsilon)} - \alpha_2(\omega_y - f_{2y}\cos(\varepsilon)) - \omega_y\omega_z \operatorname{tg}(\varepsilon) + \frac{\partial f_{2z}}{\partial t}\cos(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial f_{2z}}{\partial t} = (\dot{\mu}(t) + \dot{\gamma}(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon)^2)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon) + (\mu(t) + 3\gamma(t)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon)^2)\omega_{z\alpha},$$

$$\frac{\partial f_{2y}}{\partial t} = (\dot{\mu}(t) + \dot{\gamma}(t)(\beta_\alpha - \beta)^2)(\beta_\alpha - \beta) + (\mu(t) + 3\gamma(t)(\beta_\alpha - \beta)^2)\frac{\omega_{y\alpha}}{\cos(\varepsilon)},$$

где  $\mu(t), \gamma(t)$  – производные коэффициентов сходимости по времени. Частные производные функции внутреннего управления ввиду их громоздкости не приведены.

Опорные (кинематические) координаты  $(\varepsilon_\alpha, \beta_\alpha), (\omega_{z\alpha}, \omega_{y\alpha})$  из соотношения (26) могут быть получены несколькими способами:

- расчетом по методу полного или частичного спрямления траектории полета с использованием переменного коэффициента упреждения;
- расчетом по результатам решения задачи о встрече ракеты с целью на основе координат упрежденной точки встречи, оцениваемых темпом формирования команд управления.

В первом случае расчет выполняется согласно формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_0 + \omega_{z0}\tau_f, \quad \hat{\varepsilon}_\alpha = \hat{\varepsilon}_\alpha + \frac{\Delta\tau}{T_\phi}\hat{\omega}_{z\alpha}, \quad \hat{\omega}_{z\alpha} = \frac{(\varepsilon_\alpha - \hat{\varepsilon}_\alpha)}{\Delta\tau}, \\ \beta_\alpha &= \beta_0 + \omega_{y0}\tau_f, \quad \hat{\beta}_\alpha = \hat{\beta}_\alpha + \frac{\Delta\tau}{T_\phi}\frac{\hat{\omega}_{y\alpha}}{\cos(\varepsilon_\alpha)}, \quad \hat{\omega}_{y\alpha} = \frac{(\beta_\alpha - \hat{\beta}_\alpha)}{\Delta\tau}\cos(\varepsilon_\alpha), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\Delta\tau$  – шаг интегрирования сглаживающего фильтра;  $T_\phi$  – постоянная времени сглаживающего фильтра.

Во втором случае кинематические угловые координаты и УСВ линии визирования РЛС – цель рассчитываются на основе информации о параметрах встречи управляемого боеприпаса и цели. Это возможно реализовать путем решения в ускоренном времени упрощенной СДУ, описывающей движение объекта и цели в связанной с РЛС системе координат. Более простой подход предполагает использование оценки времени, которое осталось до встречи с целью, полученной из решения квадратного уравнения

$$\Delta\mathbf{v}_0^T \cdot \Delta\mathbf{r}(\hat{\tau}) = \Delta\mathbf{v}_0 \left( \Delta\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{v}_0\tau + 0,5\Delta\mathbf{a}_0\tau^2 \right) = 0, \quad (28)$$

где  $\Delta\mathbf{a}_0$  – оценка разности векторов ускорений ракеты и цели в СК РЛС;  $\Delta\mathbf{v}_0$  – оценка разности векторов скоростей ракеты и цели в СК РЛС;  $\Delta\mathbf{r}_0$  – начальная оценка разности координат ракеты и цели в СК РЛС.

Сделаем промежуточные выводы. Во-первых, с использованием методологии АКАР (синергетической теории управления) получены соотношения (21)–(25), реализующие закон оптимального наведения объекта по информации от наземной РЛС или другого измерительного устройства, например МП РЛС наземного или воздушного базирования либо БПЛА. Данный закон наведения является обобщением известных методов телеуправления ракетой (снарядом) при перехвате движущейся цели. Во-вторых, аналогичную методику с некоторыми особенностями можно применять при разработке модифицированного метода параллельного сближения с использованием для оценки опорных углов наклона линии визирования информации, поступающей от алгоритма решения задачи о встрече снаряда и цели.

Рассмотрим вариант синтеза обобщенного закона пропорциональной навигации, который будет использоваться на заключительном этапе наведения ОУ. Синтез будем проводить в пред-

положении о возможности получения достоверных оценок координат объекта и цели, а также их первых производных, применяемых в уравнениях кинематики движения (14).

Согласно методологии АКАР введем первую векторную макропеременную  $\Psi_1(\mathbf{x})$ , подставим ее в векторное уравнение (19) и выразим из полученных соотношений управление:

$$\dot{\Psi}_1 + \alpha_1 \Psi_1 = 0, \Psi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_{1y}(\mathbf{x}) \\ \Psi_{1z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1y}(\mathbf{x}) - W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_y}{W_0}\right) \\ f_{1z}(\mathbf{x}) - W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_z}{W_0}\right) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где  $f_{1y}(\mathbf{x}), f_{1z}(\mathbf{x})$  – полуопределенная функция, используемая для реализации управления. В результате получим выражение

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} U_y(\mathbf{x}) \\ U_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_p} \left( \nabla_x f_{y1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_{y1}(t)}{\partial t} \right) + W_y \left( 1 - \operatorname{th}\left(\frac{W_y}{W_0}\right)^2 \right) \\ \frac{1}{\alpha_p} \left( \nabla_x f_{z1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_{z1}(t)}{\partial t} \right) + W_z \left( 1 - \operatorname{th}\left(\frac{W_z}{W_0}\right)^2 \right) \end{pmatrix} + \frac{\alpha_2}{\alpha_p} \begin{pmatrix} f_{y1}(t) - W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_y}{W_0}\right) \\ f_{z1}(t) - W_0 \operatorname{th}\left(\frac{W_z}{W_0}\right) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Векторная функция  $f_1(t, \mathbf{x})$  выбирается из условия обеспечения требуемой динамики изменения координат  $\omega_z, \omega_y$ , заданных соответствующими дифференциальными уравнениями. Данное условие записывается в виде

$$\begin{pmatrix} -\left( \mu(t)(\omega_z + k_\psi \omega_{zc}) \right) \\ -\left( \mu(t)(\omega_y + k_\psi \omega_{yc}) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_{y1}(\mathbf{x}) - 2v_0 \omega_z + (1 - k_\psi) W_{yc} - \omega_y^2 \operatorname{tg}(\theta)}{D_0} \\ \frac{-f_{z1}(\mathbf{x}) - 2v_0 \omega_y + (1 - k_\psi) W_{zc} + \omega_y \omega_z \operatorname{tg}(\theta)}{D_0} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где  $\omega_{yc}, \omega_{zc}$  – компенсирующие поправки по УСВ ЛВ, учитывающие влияние силы тяжести, продольного ускорения снаряда и маневра цели;  $W_{yc}, W_{zc}$  – компенсирующие поправки по нормальному ускорению, учитывающие влияние силы тяжести, продольного ускорения ОУ и ускорения маневра цели;  $k_\psi \in (0, 1)$  – коэффициент для выбора способа компенсации возмущающих воздействий, принимающий дискретные значения 0 или 1.

Выражая компоненты функции внутреннего управления  $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ , получим формулу

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{y1}(\mathbf{x}) \\ f_{z1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = D_0 \begin{pmatrix} -\mu(t)(\omega_z + k_\psi \omega_{zc}) + \omega_y^2 \operatorname{tg}(\theta) \\ \mu(t)(\omega_y + k_\psi \omega_{yc}) + \omega_y \omega_z \operatorname{tg}(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v_0 \omega_z - (1 - k_\psi) w_{yc} \\ -2v_0 \omega_y - (1 - k_\psi) w_{zc} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Производная функции внутреннего управления  $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$  по времени имеет вид

$$\dot{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_x f_{y1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_{y1}(t)}{\partial t} \\ \nabla_x f_{z1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_{z1}(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 (-\mu(t)(\omega_z + k_\psi \omega_{zc}) + \omega_y^2 \operatorname{tg}(\theta)) + \varphi_{1y}(\mathbf{x}) \\ v_0 (-\mu(t)(\omega_y + k_\psi \omega_{yc}) + \omega_y \omega_z \operatorname{tg}(\theta)) + \varphi_{1z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{2y}(\mathbf{x}) \\ \varphi_{2z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1y}(\mathbf{x}) \\ \varphi_{1z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = D_0 \begin{pmatrix} -\mu(t)(\dot{\omega}_z - k_\psi \dot{\omega}_{zc}) - \dot{\mu}(t)(\omega_z - k_\psi \omega_{zc}) + 2\omega_y \dot{\omega}_y \operatorname{tg}(\theta) + \omega_z \omega_y^2 (1 + \operatorname{tg}(\theta)^2) \\ \mu(t)(\dot{\omega}_y - k_\psi \dot{\omega}_{yc}) + \dot{\mu}(t)(\omega_y - k_\psi \omega_{yc}) + (\dot{\omega}_y \omega_z + \omega_y \dot{\omega}_z) \operatorname{tg}(\theta) + \omega_y \omega_z^2 (1 + \operatorname{tg}(\theta)^2) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{2y}(\mathbf{x}) \\ \varphi_{2z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\dot{v}_0 \omega_z + v_0 \dot{\omega}_z) - (1 - k_\psi) \delta w_{yc} \\ -2(\dot{v}_0 \omega_y + v_0 \dot{\omega}_y) - (1 - k_\psi) \delta w_{zc} \end{pmatrix}.$$

Производные по времени для сигналов компенсации принимаются равными нулю либо оцениваются с использованием сглаживающих фильтров первого порядка. Закон изменения коэффициента сходимости  $\mu(t)$  задается соотношением

$$\mu(t) = \frac{\mu_0}{\tau_f(t)}, \quad \mu(t) = \mu_0 \left( 1 - 0,9 \exp\left(-\frac{t}{0,3\tau_0}\right) \right), \quad (34)$$

где  $\tau_f(t)$  – время, оставшееся до встречи снаряда с целью;  $\tau_0$  – оценка полетного времени, полученная на момент начала управления снарядом;  $\mu_0 = \mu(0)$  – значение коэффициента сходимости в момент старта.

Сопряжение методов наведения, описываемых соотношениями (21) и (30), может выполняться различными способами. Один из них заключается в плавном переходе с управления (21) на управление (30) с использованием алгоритма

$$\mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = (1 - k_x(\Delta\Phi))\mathbf{U}_1(\mathbf{x}) + k_x(\Delta\Phi)\mathbf{U}_2(\mathbf{x}), \quad k_x(\Delta\Phi) = \exp\left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi_0}\right), \quad (35)$$

где  $\mathbf{U}_1(\mathbf{x}), \mathbf{U}_2(\mathbf{x})$  – вектор управления, реализованного по модифицированному методу полного спрямления (ММПС) траектории и модифицированному (обобщенному) методу пропорциональной навигации (ММПН) соответственно;  $\Delta\Phi$  – разность между текущей относительной угловой координатой снаряда и граничным углом сектора сопровождения;  $\Delta\Phi_0$  – константа, выбираемая из условия полного перехода на управление  $\mathbf{U}_1(\mathbf{x})$  при нахождении снаряда на границе сектора сопровождения.

**Математическое моделирование и оценка статистических характеристик.** Для проведения статистического анализа была разработана и реализована математическая модель контура управления ОУ, в основу которого положена система уравнений динамики материальной точки, устанавливающая связь между нормальными перегрузками, действующими на объект, и его сферическими (декартовыми) координатами (скоростями изменения координат). В качестве методов наведения использовались:

- ММПС, или метод переменного упреждения, описываемый выражениями (21)–(25);
- ММПН, или метод наведения в фактическую (мгновенную) точку встречи, описываемый выражениями (30)–(34);
- комбинированный МПН (КМПН), использующий наведение по ММПС с заданными углами упреждения на начальном участке траектории и наведение по ММПН на конечном участке при малых углах упреждения.

Для оценивания координат использовались измерители координат цели и ОУ, реализованные с помощью уравнений оптимальной нелинейной фильтрации (10)–(12). Шумы измерений задавались в виде нормального гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением (СКО) флуктуационной ошибки измерения УК цели в диапазоне  $\sigma_\varphi = (2-6)$  угл. мин, СКО измерения дальности цели – в пределах  $\sigma_r = (1-3)$  м, СКО скорости цели – в пределах  $\sigma_v = (2-4)$  м/с. На рис. 1–3 показаны временные реализации координат и некоторых параметров цели и ОУ, характеризующие динамику наведения.

Координаты встречи составили  $r_m = (11\ 200, 17\ 500, 14\ 500)^T$  и  $r_m = (5000, 14\ 000, 14\ 000)^T$  при начальной скорости цели  $V_u = 500$  м/с. Оценивались математическое ожидание и СКО величины мгновенного промаха  $\sigma_\gamma, m_\gamma$  и ошибки наведения  $m_\zeta, \sigma_\zeta$  (линейного расстояния между ракетой и целью) в картинной плоскости.

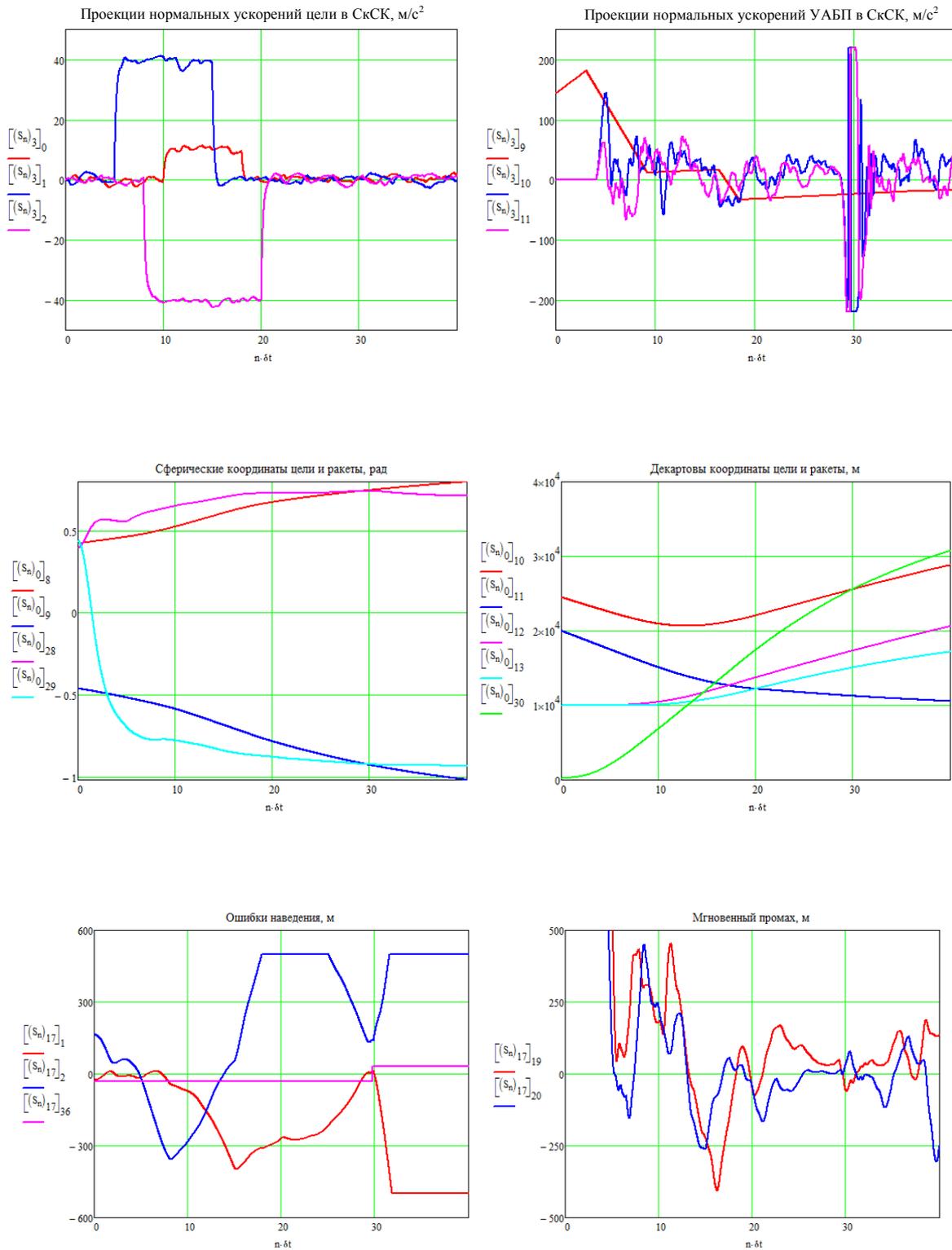


Рис. 1. Координаты и параметры управления ОУ при наведении ММПН на маневрирующую цель без учета ограничений сектора сопровождения

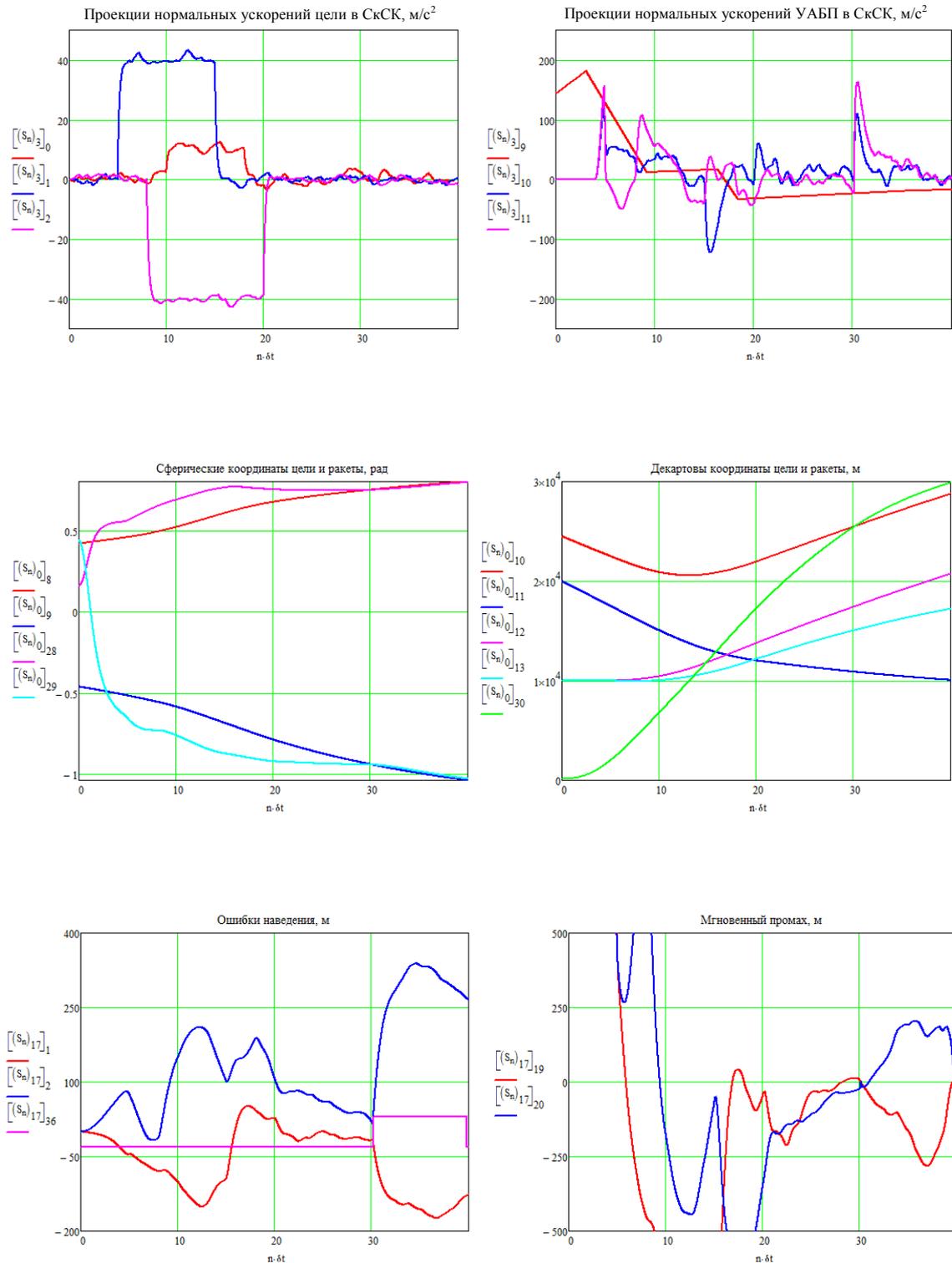


Рис. 2. Координаты и параметры управления ОУ при наведении ММПС на маневрирующую цель без учета ограничений сектора сопровождения

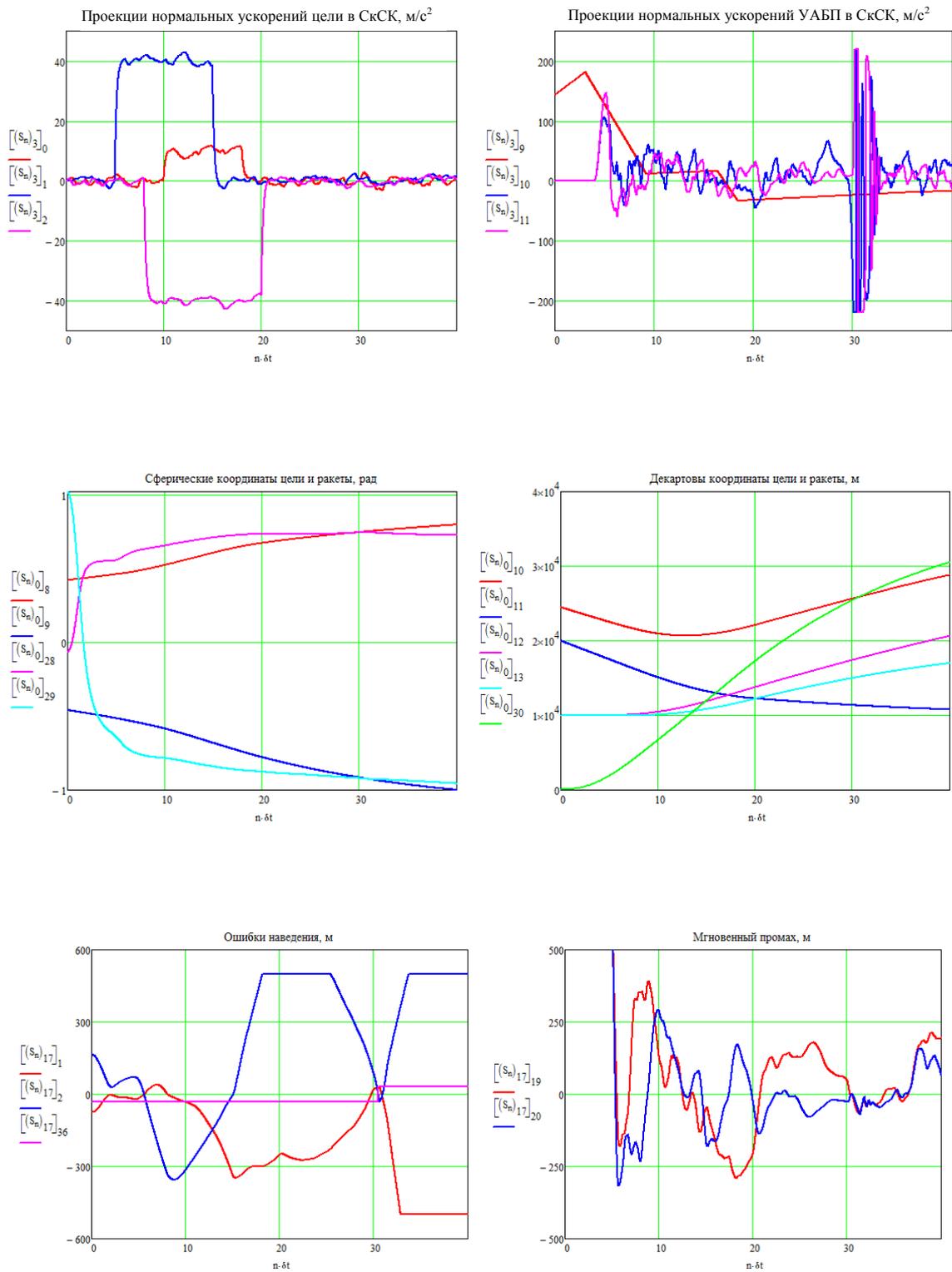


Рис. 3. Координаты и параметры управления ОУ при наведении КМПН на маневрирующую цель с учетом ограничений сектора сопровождения

Сравнительный анализ результатов моделирования, приведенных в таблице, позволяет сделать следующие выводы:

– оценки точности наведения на маневрирующую цель для ММПС, ММПН и КМПН отличаются незначительно, при росте интенсивности флуктуаций по каналу цели предпочтительно использовать ММПН или КМПН как менее чувствительные к флуктуационным ошибкам измерения координат, особенно на заключительном участке траектории;

– для перехвата скоростной цели, летящей на больших высотах и предельном параметре, необходимо использовать КМПН, позволяющий получить приемлемые ошибки наведения при допустимых углах упреждения относительно линии визирования цели;

– при наведении ОУ на маневрирующую цель и при отсутствии возможности оценивания нормальных ускорений цели предпочтение следует отдавать ММПС как менее чувствительному к величине ускорения маневра и его продолжительности.

Ошибки наведения и мгновенный промах ОУ в точке встречи

Вариант расчета	$m_\zeta, \sigma_\zeta$ для $\zeta_0, \text{ м}$			$m_\gamma, \sigma_\gamma$ для $\gamma_0, \text{ м}$		
	ММПС	ММПН	КМПН	ММПС	ММПН	КМПН
1	28; 12	25; 8	24; 9	16; 9	12; 7	13; 8
2	18; 11	17; 9	21; 10	14; 8	11; 6	12; 7

**Заключение.** В работе выполнен краткий обзор существующих и перспективных способов наведения управляемых авиационных (артиллерийских) беспилотных перехватчиков на движущуюся цель. Обоснована необходимость исследования и разработки автономных средств управления наведением ОУ без участия оператора с использованием МП РЛС воздушного базирования.

В качестве основы перспективного алгоритма управления вектором скорости ОУ использован метод пропорциональной навигации, а также его модификации, учитывающие сигналы компенсации возмущающих воздействий.

Обоснован формализованный алгебраический подход для синтеза нелинейных многомерных многосвязных нестационарных оптимальных регуляторов на основе метода АКАР [3, 4].

В ходе исследования получена математическая модель ОУ, описываемая нелинейными кинематическими дифференциальными уравнениями аэродинамического объекта, учитывающая особенности технической реализации объекта и используемая для синтеза структуры оптимального регулятора.

В замкнутой алгебраической форме приведены аналитические выражения для реализации КМПН, обеспечивающего нахождение объекта в пределах заданного сектора сопровождения: на начальном участке при использовании ММПС и на конечном участке – при использовании ММПН. Данные соотношения могут быть реализованы в составе специализированного цифрового вычислителя, входящего в состав бортового оборудования и имеющего ограниченные вычислительные ресурсы.

#### Список использованных источников

1. Мицель, А. А. Методы оптимизации : учеб. пособие / А. А. Мицель, А. А. Шелестов. – Томск : Томский МЦДО, 2002. – Ч. 1. – 192 с.
2. Марков, Л. Н. Основы построения ЗРК / Л. Н. Марков. – Минск : МВИЗРУ, 1980. – 162 с.
3. Колесников, А. А. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами / А. А. Колесников, А. Г. Гельфгат. – М. : Энергоатомиздат, 1993. – 304 с.
4. Колесников А. А. Синергетическая теория управления. Инварианты, оптимизация, синтез / А. А. Колесников. – М. : Энергоатомиздат, Таганрог : Изд-во ТРТУ, 1994. – 344 с.
5. Маркевич, В. Э. Аналитический синтез метода наведения сверхзвукового беспилотного летательного аппарата на основе многомерной нелинейной динамической модели / В. Э. Маркевич // Информатика. – 2017. – № 2(54). – С. 93–112.

## References

1. Mizel A. A., Shelestov A. A. Metody optimizacii. *Optimization Methods. Part 1*. Tomsk, Tomskij mezhvuzovskij centr distancionnogo obrazovanija, 2002, chast' 1, 192 p. (in Russian).
2. Markov L. N. Osnovy postroenija ZRK. *Fundamentals of the Design of Antiaircraft Systems*. Minsk, Minskoe vysshee inzhenernoe zenitnoe raketnoe uchilishhe, 1980, 162 p. (in Russian).
3. Kolesnikov A. A., Gelfgat A. G. Proektirovanie mnogokriterial'nyh sistem upravlenija promyshlennymi ob"ektami. *Designing Multi-criteria Control Systems for Industrial Facilities*. Moscow, Energoatomizdat, 1993, 304 p. (in Russian).
4. Kolesnikov A. A. Sinergeticheskaja teorija upravlenija. Invarianty, optimizacija, sintez. *Synergetic Theory of Control. Invariants, Optimization, Synthesis*. Moscow, Energoatomizdat, Taganrog, Izdatel'stvo Taganrogskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta, 1994, 344 p. (in Russian).
5. Markevich V. E. Analiticheskij sintez metoda navedenija sverhzvukovogo bespilotnogo letatel'nogo apparata na osnove mnogomernoj nelinejnoj dinamicheskoj modeli. *Analytical Synthesis of a Method of Guidance of the Supersonic Unmanned Aerial Vehicle on the Basis of Multidimensional Nonlinear Dynamic Model*. *Informatika [Informatics]*, 2017, no. 2(54), pp. 93–112 (in Russian).

## Информация об авторах

Маркевич Виталий Эдмундович, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского сектора, ОАО «АЛЕВКУРП», Минск, Беларусь.

E-mail: mark.vit@tut.by

Легкоступ Виктор Валерьевич, аспирант Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, младший научный сотрудник научно-исследовательского сектора, ОАО «АЛЕВКУРП», Минск, Беларусь.

E-mail: legkostupvv@gmail.com

## Information about the authors

Vitaliy E. Markevich, Cand. Sci. (Eng.), Leading Researcher, OJSC "ALEVKURP", Minsk, Belarus.

E-mail: mark.vit@tut.by

Victor V. Legkostup, Postgraduate Student of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Junior Researcher, OJSC "ALEVKURP", Minsk, Belarus.

E-mail: legkostupvv@gmail.com