ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 517.958:537.8
https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-103-119

Поступила в редакцию 31.12.2019
Received 31.12.2019

Принята к публикации 16.03.2020
Accepted 16.03.2020

Математическая модель проникновения цилиндрических электромагнитных полей с осевой симметрией через плоский экран из пермаллоя

В. Т. Ерофеенко

Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики», Минск, Беларусь
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Аннотация. Разработана методика решения краевой задачи проникновения монохроматических электромагнитных полей с осевой симметрией через плоский однослойный экран, выполненный из пермаллоя. Постановка краевой задачи экранирования основывается на использовании системы уравнений Максвелла и дополнительного нелинейного дифференциального уравнения для поля намагниченности, характеризующего пермаллой. Применяются классические граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих полей и дополнительные дифференциальные граничные условия для поля намагниченности на лицевых поверхностях экрана. Для упрощения решения задачи в результате исключения величин второго порядка малости, входящих в нелинейное уравнение, нелинейная задача преобразована в линейную. Используются корни (волновые числа) дисперсионного алгебраического уравнения четвертого порядка, которые характеризуют электромагнитные поля с осевой симметрией в слое из пермаллоя. Построены последовательности четырех прямых и четырех обратных электромагнитных волн с осевой симметрией, распространяющихся в противоположных направлениях в слое пермаллоя. Получены двухсторонние граничные условия, связывающие электромагнитные поля по обе стороны экрана. Аналитически вычислены амплитуды отраженного и прошедшего через экран электромагнитных полей.

Ключевые слова: математические модели, двухсторонние граничные условия, краевая задача, задача экранирования, поле намагниченности, дисперсионное уравнение, электромагнитные волны с осевой симметрией, пермаллой, аналитическое моделирование, экран

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.1.22 Государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность» на 2019–2020 гг.

Для цитирования. Ерофеенко, В. Т. Математическая модель проникновения цилиндрических электромагнитных полей с осевой симметрией через плоский экран из пермаллоя / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2020. − Т. 17, № 2. – С. 103–119. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-103-119

Mathematical model of penetration of cylindrical electromagnetic fields with axial symmetry through the plane screen from permalloy

Viktor T. Erofeenko

Establishment of the Belarusian State University "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Abstract. The method for solving the boundary-value problem of penetration of monochromatic electromagnetic fields with axial symmetry through the plane screen made from the permalloy is developed. The boundary-value problem is based on the use of differential Maxwell equations and complementary nonlinear differential equation for the field of magnetization, characterizing the permalloy. Classical boundary conditions of continuity of the tangential components of the fields and complementary boundary conditions for the field of magnetization on the face surfaces of the shield are used. For solution simplification of the boundary-value problem as a result of exclusion value the entering in nonlinear equation second-order infinitesimal, nonlinear task is transformed into linear task. Roots (wave numbers) of a dispersion algebraic equations of four order, which characterizing electromagnetic fields with axial symmetry in layer made from the permalloy, is constructed. The sequences of four forward and four backward counter-propagating electromagnetic waves with axial symmetry in the layer of permalloy is formed. Two-sided boundary conditions connecting electromagnetic fields with axial symmetry on both sides of the screen is constructed. The amplitudes of reflected and transient through the shield electromagnetic fields are calculated.

Keywords: mathematical models, two-sided boundary conditions, boundary-value problem, shielding task, field of magnetization, dispersing equation, electromagnetic waves with axial symmetry, permalloy, analytical modeling, screen

Acknowledgements. The work was performed as part of assignment 1.1.22 of the State program of scientific research "Informatics, space and security" for 2019–2020.

For citation. Erofeenko V. T. Mathematical model of penetration of cylindrical electromagnetic fields with axial symmetry through the plane screen from permalloy. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 103–119 (in Russian). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2020-17-2-103-119

Введение. Разработка математических методов моделирования распространения излучений электромагнитных волн в композитных материалах является актуальным направлением исследований в математической физике [1]. Анализ таких материалов требует применения специальных математических моделей, адекватно описывающих их электрические и магнитные свойства [2]. Для конструирования электронных технических устройств используются экраны и пленки из композитов. В настоящее время актуально исследование экранирующих свойств пленок из пермаллоя [3]. Материал из пермаллоя обладает свойством намагниченности, которое описывается дополнительным нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка для поля намагниченности. С целью упрощения модели нелинейное уравнение намагниченности преобразуется в линейное уравнение [3, 4]. Чтобы обеспечить единственность решения краевой задачи для пермаллойных материалов, используются дополнительные граничные условия на поверхностях экрана. Для моделирования электродинамического контакта двух материалов на поверхностях раздела сред в задачах экранирования разрабатываются соответствующие граничные условия [5, 6].

В статье предложена методика решения краевой задачи для системы уравнений Максвелла и параболического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка для поля намагниченности, в которой описывается экранирование монохроматических электромагнитных полей с круговой симметрией плоским однослойным экраном из пермаллоя. В качестве первичного поля с круговой симметрией, воздействующего на экран, выбрана комбинация базисных *TE*- и *TH*-поляризованных полей в цилиндрических координатах с осевой симметрией, распространяющихся ортогонально к экрану. Дополнительно разработаны двухсторонние граничные условия, связывающие поля с круговой симметрией по обе стороны однослойного экрана, которые позволяют построить аналитическое решение исходной задачи экранирования, не используя поля в слое экрана. Двухсторонние граничные условия применяются для моделирования пленочных экранов: однослойных [4, 7, 8] и многослойных [2, 9], со сфероидальными частицами [10], в нестационарной электродинамике [11], с упругими свойствами материалов [12]. Разработанная в настоящей статье методика решения краевой задачи экранирования для экрана из пермаллоя аналогична методике, предложенной в статье [13] для биизотропного экрана.

Система электродинамических уравнений. Для моделирования электромагнитного поля $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}}$ и поля намагниченности $\vec{\mathbf{M}}$, распространяющихся в слое из пермаллоя, используется система дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathbf{H}}+\vec{\mathbf{M}}\right); \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}} = \dot{\sigma}\vec{\mathbf{E}}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{\dot{\gamma}}\frac{\partial\vec{\mathbf{M}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{M}}\times\left(\vec{\mathbf{H}} + \dot{a}\Delta\vec{\mathbf{M}} - \dot{g}\vec{\mathbf{M}}\times\vec{\mathbf{H}}\right), \tag{3}$$

где постоянные имеют физические размерности $[\dot{\gamma}] = \text{м} / \text{А}\cdot\text{с}$, $[\dot{a}] = \text{м}^2$, $[\dot{g}] = \text{м} / \text{А}$, $[\dot{\sigma}] = \text{См} / \text{м}$, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн / м; $\times$ – векторное произведение.

Построим решения уравнений (1)–(3) вида [3]

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{H}_0 + \vec{H}e^{-i\omega t},\ \vec{\mathbf{M}} = \vec{M}_0 + \vec{M}e^{-i\omega t},\ \vec{\mathbf{E}} = \vec{E}e^{-i\omega t}, \tag{4}$$

где $\vec{H}_0 = \dot{H}_0\vec{e}_z$, $\vec{M}_0 = \dot{M}_0\vec{e}_z$; $\dot{H}_0, \dot{M}_0 - \text{const}$, $\left[\dot{H}_0\right] = \left[\dot{M}_0\right] = \text{А} / \text{м}$, $\left|\vec{H}\right| << \dot{H}_0$, $\left|\vec{M}\right| << \dot{M}_0$, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота поля.

Подставим выражения (4) в (1)–(3) и преобразуем нелинейное уравнение (3) в линейное, пренебрегая величинами второго порядка малости: $\vec{M}\times\vec{H} \approx 0$, $\vec{M}\times(\vec{M}\times\vec{e}_z) \approx 0$.

В результате получим уравнения, которые будем использовать для построения монохроматических полей с осевой симметрией:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right); \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \dot{\sigma}\vec{E}, \tag{6}$$

$$i\frac{\omega}{\dot{\gamma}}\vec{M} = \dot{H}_0\vec{e}_z\times\vec{M} - \dot{M}_0\vec{e}_z\times\vec{H} - \dot{a}\dot{M}_0\vec{e}_z\times\Delta\vec{M} -$$
$$- \dot{g}\dot{M}_0^2\left(\vec{e}_z\times\vec{H}\right)\times\vec{e}_z + \dot{g}\dot{H}_0\dot{M}_0\left(\vec{e}_z\times\vec{M}\right)\times\vec{e}_z,$$

где $\vec{E}, \vec{H}$ – монохроматическое электромагнитное поле, $\vec{M}$ – монохроматическое поле намагниченности.

Исключим из уравнения (5) вектор $\vec{E}$ с помощью (6) и применим оператор div к уравнению (5). Получим систему линейных уравнений для $\vec{M}$ и $\vec{H}$:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = i\sigma k_0^2\left(\vec{H} + \vec{M}\right); \tag{7}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = -\operatorname{div}\vec{M}; \tag{8}$$

$$i\Omega\vec{M} = \eta\vec{e}_z\times\vec{M} - \vec{e}_z\times\vec{H} - \frac{a}{k_0^2}\vec{e}_z\times\Delta\vec{M} - g\left(\vec{e}_z\times\vec{H}\right)\times\vec{e}_z + \eta g\left(\vec{e}_z\times\vec{M}\right)\times\vec{e}_z, \tag{9}$$

где σ, η, a, g – безразмерные постоянные, Ω – безразмерная частота, $\sigma = \mu_0\dot{\sigma}c^2/\omega$, $\eta = \dot{H}_0/\dot{M}_0$, $a = \dot{a}k_0^2$, $g = \dot{g}\dot{M}_0$, $\Omega = \dfrac{\omega}{\dot{M}_0\dot{\gamma}}$, $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, c – скорость света в вакууме.

Пучки цилиндрических электромагнитных волн и полей намагниченности. Построим систему пучков электромагнитных полей с круговой симметрией вида $\Phi_m = \exp(im\varphi)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, и временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, $\omega = 2\pi f$, f – частота поля, которые удовлетворяют уравнениям (7)–(9). Для построения воспользуемся базисными цилиндрическими полями [2, с. 139], представив пучки волн в виде разложений

$$\vec{E} = \vec{E}^{[+]}(\vec{\rho};\lambda) = e_1\vec{M}_m^{(+1)}\left(\vec{\rho};\lambda,k\right) + e_2\vec{M}_m^{(+2)}\left(\vec{\rho};\lambda,k\right),$$

$$\vec{H} = \vec{H}^{[+]}(\vec{\rho};\lambda) = h_1\,\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k) + h_2\,\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k) + m_2\,\frac{\lambda}{k}\,J_m(\lambda\rho)\,\Phi_m\,F^{(+1)}\vec{e}_z, \tag{10}$$

$$\vec{M} = \vec{M}^{[+]}(\vec{\rho};\lambda) = m_1\,\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k) + m_2\,\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k) - m_2\,\frac{\lambda}{k}\,J_m(\lambda\rho)\,\Phi_m\,F^{(+1)}\vec{e}_z;$$

$$\vec{E} = \vec{E}^{[-]}(\vec{\rho};\lambda) = e_1\,\vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k) - e_2\,\vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k),$$

$$\vec{H} = \vec{H}^{[-]}(\vec{\rho};\lambda) = h_1\,\vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k) - h_2\,\vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho};\,\lambda,\,k) - m_2\,\frac{\lambda}{k}\,J_m(\lambda\rho)\,\Phi_m\,F^{(-1)}\vec{e}_z, \tag{11}$$

$$\vec{M} = \vec{M}^{[-]}(\vec{\rho};\lambda) = m_1\,\vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho};\lambda,k) - m_2\,\vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho};\lambda,k) + m_2\,\frac{\lambda}{k}\,J_m(\lambda\rho)\,\Phi_m\,F^{(-1)}\vec{e}_z,$$

где e_j, h_j, m_j $(j = 1, 2,)$, k, ν – величины, подлежащие определению; λ – произвольный параметр, $\vec{\rho} = (\rho,\,\varphi,\,z)$ – цилиндрические координаты;

$$\begin{aligned} \vec{M}_m^{(\pm1)} &= \vec{M}_m^{(\pm1)}(\vec{\rho};\lambda,k) = \vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho)\,\Phi_m\,e^{\pm\nu z}, \quad m = 0,\,\pm1,\,\ldots, \\ \vec{M}_m^{(\pm2)} &= \vec{M}_m^{(\pm2)}(\vec{\rho};\lambda,k) = \frac{1}{k}\left(\pm\nu\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) + \lambda\,J_m(\lambda\rho)\,\vec{e}_z\right)\Phi_m\,e^{\pm\nu z}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\nu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg\nu < \frac{\pi}{2},\ F^{(\pm)} = e^{\pm\nu z},\ \Phi_m = e^{im\varphi};$$

$$\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) = \frac{im}{\lambda\rho}J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\rho - J_m'(\lambda\rho)\vec{e}_\varphi,\ \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) = J_m'(\lambda\rho)\vec{e}_\rho + \frac{im}{\lambda\rho}J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\varphi, \tag{13}$$

где $0 \le \lambda < \infty$; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат, $J_m(\cdot)$ – функции Бесселя, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$.

Теорема. *Система электромагнитных волн и волн намагниченности с осевой симметрией* $\vec{E}^{[\pm s]}(\vec{\rho};\lambda), \vec{H}^{[\pm s]}(\vec{\rho};\lambda), \vec{M}^{[\pm s]}(\vec{\rho};\lambda)$ $(s = 1,\,2,\,3,\,4)$, *распространяющихся в среде из пермаллоя, задается формулами (10), (11), для которых амплитуды определяются аналитически в виде*

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1^{(s)} = -K_{12}^{(s)} = -g_0\,\frac{\bar{\nu}^{(s)}}{K_s}(g\Omega_k^{(s)} + \Omega_0), \\ m_2 &= m_2^{(s)} = K_{11}^{(s)} = L_1^{(s)} + g_0(g\Omega_0 - \Omega_k^{(s)}); \end{aligned} \tag{14}$$

$$h_1 = h_1^{(s)} = L_1^{(s)}m_1^{(s)},\ h_2 = h_2^{(s)} = L_2^{(s)}m_2^{(s)}; \tag{15}$$

$$e_1 = e_1^{(s)} = \dot{Z}(K_s\,L_2^{(s)} + \frac{\bar{\lambda}^2}{K_s})m_2^{(s)},\ e_2 = e_2^{(s)} = \dot{Z}K_s\,L_1^{(s)}m_1^{(s)}, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} &k = k^{(s)} = k_0 K_s,\ \bar{\nu} = \frac{\nu}{k_0} = \bar{\nu}^{(s)} = \sqrt{\bar{\lambda}^2 - K_s^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg\bar{\nu}^{(s)} < \frac{\pi}{2},\ L_1 = L_1^{(s)} = \frac{i\,\sigma}{K_s^2 - i\,\sigma}, \\ &L_2 = L_2^{(s)} = \frac{i\,\sigma - \bar{\lambda}^2}{K_s^2 - i\,\sigma},\ 0 \le \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{k_0} < \infty,\ \dot{Z} = \frac{k_0}{\dot{\sigma}},\ [\dot{Z}] = \text{Ом},\ F^{(\pm)} = F_s^{(\pm)}(z) = e^{\pm\nu^{(s)}z}. \end{aligned} \tag{17}$$

Волновые числа K_s *определяются из дисперсионного уравнения*

$$a_8K^8 + a_6K^6 + a_4K^4 + a_2K^2 + a_0 = 0, \tag{18}$$

где

$$a_8 = a^2, a_6 = 2(\eta a - i\sigma a^2), a_4 = \Omega_0^2 + \eta^2 - al_2 - a^2\sigma^2 - 4i\sigma\eta a,\ \Omega_0 = i\Omega - g\eta,$$
$$a_2 = (i\sigma a + g\Omega_0 - \eta)l_2 - 2\eta a\sigma^2 - 2i\sigma(\Omega_0^2 + \eta^2), \tag{19}$$
$$a_0 = l_1(g^2 + 1) - i\sigma(g\Omega_0 - \eta)l_2 - \sigma^2(\Omega_0^2 + \eta^2),\quad l_1 = -\sigma(\sigma + i\bar{\lambda}^2),\ l_2 = 2i\sigma - \bar{\lambda}^2.$$

Восемь корней алгебраического уравнения (18) задаются формулами $K = \pm K_s$, $s = 1,\ 2, 3, 4$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arg K_s \le \dfrac{\pi}{2}$.

Доказательство. Доказательство теоремы осуществим на примере полей (10). Заметим, что уравнение (8) для полей (10) выполнено автоматически. Действительно, применяя формулы [2, с. 131, 291], получим равенства

$$\operatorname{div}\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho};\lambda,k) = 0,\ \operatorname{div}\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho};\lambda,k) = 0,\ \operatorname{div}(J_m\Phi_m F\vec{e}_z) = vJ_m\Phi_m F,\ F = e^{vz},$$
$$\operatorname{div}\vec{H} = m_2(\lambda)\frac{\lambda}{k}vJ_m(\lambda\rho)\Phi_m F,\ \operatorname{div}\vec{M} = -m_2(\lambda)\frac{\lambda}{k}vJ_m(\lambda\rho)\Phi_m F. \tag{20}$$

В результате тождество для уравнения (8) выполнено.

Удовлетворим уравнению (6), подставляя в него поля (10). Учитывая выражения для базисных векторов (13) и формулы

$$\operatorname{rot}\vec{M}_m^{(+1)} = k\vec{M}_m^{(+2)},\ \operatorname{rot}\vec{M}_m^{(+2)} = k\vec{M}_m^{(+1)},$$
$$\operatorname{rot}(J_m(\lambda\rho)\Phi_m F\vec{e}_z) = (\frac{im}{\rho}J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\rho - \lambda J_m'(\lambda\rho)\vec{e}_\varphi)\Phi_m F = \lambda\vec{V}_m^{(1)}\Phi_m F, \tag{21}$$

получим равенство

$$\operatorname{rot}\vec{H} = h_1 k\vec{M}_m^{(+2)} + h_2 k\vec{M}_m^{(+1)} + m_2\frac{\lambda^2}{k}\vec{V}_m^{(1)}\Phi_m F = \dot{\sigma}(e_1\vec{M}_m^{(+1)} + e_2\vec{M}_m^{(+2)}).$$

Учитывая разложения (12) и приравнивая коэффициенты при базисных векторах $\vec{V}_m^{(1)}$, $\vec{V}_m^{(2)}$, $\vec{e}_z$, придем к системе алгебраических уравнений

$$e_1 = \frac{1}{\dot{\sigma}}(kh_2 + \frac{\lambda^2}{k}m_2),\ e_2 = \frac{k}{\dot{\sigma}}h_1. \tag{22}$$

Удовлетворим уравнению (7), подставляя в него поля (10). Воспользуемся классическим тождеством [2, с. 291] и формулами (21):

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = k^2(h_1\vec{M}_m^{(+1)} + h_2\vec{M}_m^{(+2)}) + m_2(\lambda)\frac{\lambda}{k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(J_m(\lambda\rho)\Phi_m F\vec{e}_z) =$$
$$= k^2(h_1\vec{M}_m^{(+1)} + h_2\vec{M}_m^{(+2)}) + m_2\frac{\lambda}{k}[v\lambda J_m'(\lambda\rho)\vec{e}_\rho + \frac{imv}{\rho}J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\varphi +$$
$$+(\frac{m^2}{\rho^2}J_m(\lambda\rho) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial J_m(\lambda\rho)}{\partial\rho}))\vec{e}_z]\Phi_m F.$$

Учтем дифференциальное уравнение для функции Бесселя

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial J_m(x)}{\partial x}\right)+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)J_m(x)=0$$

и с помощью представлений (12), (13) получим аналитическую формулу

$$\operatorname{graddiv}\vec{H}-\Delta\vec{H}=\operatorname{rotrot}\vec{H}=[k^2(h_1\vec{V}_m^{(1)}+h_2\frac{1}{k}(v\vec{V}_m^{(2)}+\lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z))+$$

$$+m_2\frac{\lambda^2}{k}(v\vec{V}_m^{(2)}+\lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z)]\Phi_m F. \tag{23}$$

С учетом формулы (23) уравнение (7) преобразуем к виду

$$\operatorname{graddiv}\vec{H}-\Delta\vec{H}=[k^2(h_1\vec{V}_m^{(1)}+h_2\frac{1}{k}(v\vec{V}_m^{(2)}+\lambda J_m\vec{e}_z))+$$

$$+m_2\frac{\lambda^2}{k}(v\vec{V}_m^{(2)}+\lambda J_m\vec{e}_z)]\Phi_m F=i\sigma k_0^2[(h_1+m_1)\vec{V}_m^{(1)}+(h_2+m_2)\frac{1}{k}(v\vec{V}_m^{(2)}+\lambda J_m\vec{e}_z)]\Phi_m F.$$

Приравняем коэффициенты в этом тождестве при базисных векторах $\vec{V}_m^{(1)}$, $\vec{V}_m^{(2)}$, $\vec{e}_z$ и придем к системе алгебраических уравнений

$$k^2h_1=i\sigma k_0^2(h_1+m_1),\ k^2h_2+\lambda^2 m_2=i\sigma k_0^2(h_2+m_2)$$

или

$$h_1=L_1m_1,\ h_2=L_2m_2, \tag{24}$$

где

$$L_1=\frac{i\sigma}{K^2-i\sigma},\ L_2=\frac{i\sigma-\bar{\lambda}^2}{K^2-i\sigma},\ K=\frac{k}{k_0},\ \bar{\lambda}=\frac{\lambda}{k_0}.$$

Запишем систему уравнений (24) в матричном виде

$$\hat{h}=\hat{L}\vec{m},\ \vec{h}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix},\ \vec{m}=\begin{pmatrix}m_1\\m_2\end{pmatrix},\ \hat{L}=\begin{pmatrix}L_1&0\\0&L_2\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Уравнение (9) также преобразуем к матричному виду. Воспользуемся формулой (23), учитывая одинаковое аналитическое представление векторов $\vec{H}$ и $\vec{M}$:

$$\operatorname{graddiv}\vec{M}-\Delta\vec{M}=\operatorname{rotrot}\vec{M}=[k^2(m_1\vec{V}_m^{(1)}+m_2\frac{1}{k}(v\vec{V}_m^{(2)}+\lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z))-$$

$$-m_2\frac{\lambda^2}{k}(v\vec{V}_m^{(2)}+\lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z)]\Phi_m F. \tag{26}$$

Определим действие оператора graddiv на поле намагниченности $\vec{M}$. Из формул (20) следует выражение

$$\operatorname{graddiv}\vec{M}=-m_2\frac{\lambda v}{k}\operatorname{grad}(J_m(\lambda\rho)\Phi_m F)=-m_2\frac{\lambda v}{k}(\lambda\vec{V}_m^{(2)}+vJ_m(\lambda\rho)\vec{e}_z)\Phi_m F. \tag{27}$$

Вычислим действие оператора Δ на поле $\vec{M}$. Учитывая формулы (26), (27), получим выражение

$$\Delta\vec{M} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{M} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{M} = -m_2\frac{\lambda v}{k}(\lambda\vec{V}_m^{(2)} + vJ_m(\lambda\rho)\vec{e}_z)\Phi_m F -$$
$$-[k^2(m_1\vec{V}_m^{(1)} + m_2\frac{1}{k}(v\vec{V}_m^{(2)} + \lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z)) - m_2\frac{\lambda^2}{k}(v\vec{V}_m^{(2)} + \lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z)]\Phi_m F. \quad (28)$$

Применяя правила векторных произведений базисных векторов $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$, получим формулы

$$\vec{e}_z \times \vec{V}_m^{(1)} = \vec{V}_m^{(2)},\ \vec{e}_z \times \vec{V}_m^{(2)} = -\vec{V}_m^{(1)},$$
$$\vec{e}_z \times \vec{M}_m^{(+1)} = \vec{V}_m^{(2)}\Phi_m F,\ \vec{e}_z \times \vec{M}_m^{(+2)} = -\frac{v}{k}\vec{V}_m^{(1)}\Phi_m F. \quad (29)$$

Из равенства (28) с учетом формул (29) следует соотношение

$$\vec{e}_z \times \Delta\vec{M} = k(m_2 v\vec{V}_m^{(1)} - m_1 k\vec{V}_m^{(2)})\Phi_m F. \quad (30)$$

Удовлетворим уравнению (9), подставляя поля (10), которые предварительно разложим на составляющие (12). Учитывая формулы (29), (30), преобразуем уравнение (9) в тождество

$$i\Omega(m_1\vec{V}_m^{(1)} + m_2\frac{v}{k}\vec{V}_m^{(2)}) = \eta(m_1\vec{V}_m^{(2)} - m_2\frac{v}{k}\vec{V}_m^{(1)}) - h_1\vec{V}_m^{(2)} + h_2\frac{v}{k}\vec{V}_m^{(1)} -$$
$$-\frac{ak}{k_0^2}(m_2 v\vec{V}_m^{(1)} - m_1 k\vec{V}_m^{(2)}) - g(h_1\vec{V}_m^{(1)} + h_2\frac{v}{k}\vec{V}_m^{(2)}) + g\,\eta(m_1\vec{V}_m^{(1)} + m_2\frac{v}{k}\vec{V}_m^{(2)}).$$

Приравняем коэффициенты при базисных векторах $\vec{V}_m^{(1)}, \vec{V}_m^{(2)}$ и получим систему алгебраических уравнений

$$\Omega_0 m_1 + \frac{\bar{v}}{K}\Omega_k m_2 = -gh_1 + \frac{\bar{v}}{K}h_2,\ -\Omega_k m_1 + \frac{\bar{v}}{K}\Omega_0 m_2 = -h_1 - g\frac{\bar{v}}{K}h_2,$$

где $\Omega_0 = i\Omega - g\,\eta$, $\Omega_k = \eta + aK^2$, величина $K = k/k_0$ подлежит определению.

Предыдущие уравнения запишем в матричном виде

$$\hat{\Omega}\vec{m} = -\hat{V}\hat{h}$$

или в виде

$$\hat{h} = \hat{G}\vec{m}, \quad (31)$$

где

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_0, & \frac{\bar{v}}{K}\Omega_k \\ -\Omega_k, & \frac{\bar{v}}{K}\Omega_0 \end{pmatrix},\ \hat{V} = \begin{pmatrix} g, & -\frac{\bar{v}}{K} \\ 1, & g\frac{\bar{v}}{K} \end{pmatrix},$$

$$\hat{G} = -\hat{V}^{-1}\hat{\Omega} = -g_0\begin{pmatrix} g\Omega_0 - \Omega_k, & \frac{\bar{v}}{K}(g\Omega_k + \Omega_0) \\ -\frac{K}{\bar{v}}(g\Omega_k + \Omega_0), & g\Omega_0 - \Omega_k \end{pmatrix},\ \hat{V}^{-1} = g_0\frac{K}{\bar{v}}\begin{pmatrix} g\frac{\bar{v}}{K}, & \frac{\bar{v}}{K} \\ -1, & g \end{pmatrix} -$$

обратная матрица, $g_0=\dfrac{1}{g^2+1}$, $\bar v=\sqrt{\bar\lambda^2-K^2}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\arg\bar v<\dfrac{\pi}{2}$, $K=\dfrac{k}{k_0}$, $\bar\lambda=\dfrac{\lambda}{k_0}$.

Сравним матричные равенства (25), (31):

$$\hat K\vec m=0, \tag{32}$$

$$\hat K=\begin{pmatrix}K_{11}, & K_{12}\\ K_{21}, & K_{22}\end{pmatrix}=\hat L-\hat G=\begin{pmatrix}L_1+g_0(g\Omega_0-\Omega_k), & g_0\dfrac{\bar v}{K}(g\Omega_k+\Omega_0)\\ -g_0\dfrac{K}{\bar v}(g\Omega_k+\Omega_0), & L_2+g_0(g\Omega_0-\Omega_k)\end{pmatrix}.$$

Нетривиальное решение уравнения (32) существует, когда определитель матрицы $\hat K$ равен нулю: $\left|\hat K\right|=K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21}=0$. Из уравнения (32) определяются амплитуды вектора $\vec M$ (10): $m_1=-K_{12}$, $m_2=K_{11}$.

Вычислим определитель $\left|\hat K\right|$, используя зависимости от параметра K величин L_j, Ω_0 и Ω_k:

$$\left|\hat K\right|=L_1L_2+(L_1+L_2)g_0(g\Omega_0-\Omega_k)+g_0^2(g\Omega_0-\Omega_k)^2+g_0^2(g\Omega_k+\Omega_0)^2=$$
$$=\frac{l_1}{(K^2-i\sigma)^2}+\frac{l_2}{(K^2-i\sigma)}g_0(g\Omega_0-\Omega_k)+g_0(\Omega_0^2+\Omega_k^2)=0. \tag{33}$$

Умножим уравнение (33) на $(K^2-i\sigma)^2$ и получим дисперсионное уравнение (18) для параметра K с коэффициентами (19).

Определим корни K_s, $s=1,2,3,4,$ уравнения (18) и подставим в формулы для величин (17). Вычислим амплитуды (14)–(16) для четырех прямых волн $\vec E^{[+s]}(\vec\rho;\lambda)$, $\vec H^{[+s]}(\vec\rho;\lambda)$, $\vec M^{[+s]}(\vec\rho;\lambda)$ (10) и четырех обратных волн $\vec E^{[-s]}(\vec\rho;\lambda)$, $\vec H^{[-s]}(\vec\rho;\lambda)$, $\vec M^{[-s]}(\vec\rho;\lambda)$ (11). Из уравнения (32) найдем амплитуды вектора $\vec M$: $m_1=-K_{12}^{(s)}, m_2=K_{11}^{(s)}$. Далее, учитывая формулы (24), (22), определим амплитуды $h_j^{(s)}$, $e_j^{(s)}$ полей $\vec H$, $\vec E$. В результате получим требуемые формулы (14)–(16). ■

Постановка краевой задачи экранирования. В пространстве E^3 с электрической и магнитной постоянными ε_0,μ_0 расположен плоский экран $D(0<z<\Delta)$ толщиной Δ, наполненный пермаллоем. Из полупространства $D_1(z<0)$ на слой D воздействует первичное электромагнитное поле $\vec E_0(\vec\rho;\lambda), \vec H_0(\vec\rho;\lambda)$ с круговой симметрией вида $\Phi_m=\exp(im\varphi)$, $m=0,1,2,\ldots,$ и временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, $\omega=2\pi f$ [2, с. 131]:

$$\begin{aligned}\vec E_0&=\vec E_0(\vec\rho;\lambda)=A(\lambda)\vec M_m^{(-1)}(\vec\rho;\lambda,k_0)+B(\lambda)\vec M_m^{(-2)}(\vec\rho;\lambda,k_0),\\ \vec H_0&=\vec H_0(\vec\rho;\lambda)=h_0((A(\lambda)\vec M_m^{(-2)}(\vec\rho;\lambda,k_0)+B(\lambda)\vec M_m^{(-1)}(\vec\rho;\lambda,k_0)),\end{aligned} \tag{34}$$

где $A(\lambda), B(\lambda)-$заданные амплитуды, $h_0=\dfrac{1}{iZ_0}$, $Z_0=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2}$, $\vec\rho=(\rho,\varphi,z)-$цилиндрические координаты,

$$\vec{M}_m^{(\pm 1)}(\vec{\rho};\lambda,k_0)=\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho)\,\Phi_m e^{\pm\nu_0 z},$$

$$\vec{M}_m^{(\pm 2)}(\vec{\rho};\lambda,k_0)=\frac{1}{k_0}\left(\pm\nu_0\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)+\lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z\right)\Phi_m e^{\pm\nu_0 z}, \tag{35}$$

$$\nu_0=\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\quad -\frac{\pi}{2}\le\arg\nu_0<\frac{\pi}{2},\ F_0^{(\pm)}(z)=e^{\pm\nu_0 z}.$$

Краевая задача. Для заданного поля (34) требуется определить поля $\vec{E}_1', \vec{H}_1'; \vec{E}_2, \vec{H}_2$ соответственно в областях D_1, D_2 и поля $\vec{E}, \vec{H}, \vec{M}$ в области D, которые удовлетворяют:

– уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1' = i\omega\mu_0\vec{H}_1',\ \operatorname{rot}\vec{H}_1' = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_1',\ \ z<0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_2 = i\omega\mu_0\vec{H}_2,\ \operatorname{rot}\vec{H}_1 = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_2,\ \ z>\Delta; \tag{36}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right),\ \operatorname{rot}\vec{H}=\dot{\sigma}\vec{E},\ 0<z<\Delta; \tag{37}$$

$$(i\Omega-\eta g)\vec{M}=\eta\left[\vec{n},\vec{M}\right]-\left[\vec{n},\vec{H}\right]-\frac{a}{k_0^2}\left[\vec{n},\Delta\vec{M}\right]-g\vec{H}_\tau, \tag{38}$$

где $\vec{n}=e_z,\ \vec{H}_\tau=\left(\vec{n}\times\vec{H}\right)\times\vec{n}=\left[\left[\vec{n},\vec{H}\right],\vec{n}\right]$;

– граничным условиям сопряжения на плоскости $\Gamma_1(z=0)$

$$\left.\left(\vec{E}_\tau-\vec{E}_{1\tau}\right)\right|_{z=0}=0,\quad \left.\left(\vec{H}_\tau-\vec{H}_{1\tau}\right)\right|_{z=0}=0; \tag{39}$$

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz}+p\vec{M}\right)\right|_{z=0}=0; \tag{40}$$

– граничным условиям сопряжения на плоскости $\Gamma_2(z=\Delta)$

$$\left.(E_\tau-E_{2\tau})\right|_{z=\Delta}=0,\ \left.(H_\tau-H_{2\tau})\right|_{z=0}=0; \tag{41}$$

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz}-q\vec{M}\right)\right|_{z=\Delta}=0 \tag{42}$$

и условиям излучения на бесконечности.

Решение краевой задачи. Решение задачи (36)–(42) представим в виде суперпозиции базисных полей (35) в областях D_1, D_2 и базисных полей (10), (11) в слое D для волновых чисел $k=k^{(s)}$:

$$\vec{E}_1'=x_1\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho};\lambda,k_0)+x_2\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho};\lambda,k_0),$$

$$\vec{H}_1'=h_0\left(x_1\vec{M}_m^{(+2)}(\vec{\rho};\lambda,k_0)+x_2\vec{M}_m^{(+1)}(\vec{\rho};\lambda,k_0)\right),\quad z<0; \tag{43}$$

$$\vec{E}_2 = y_1 \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) + y_2 \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0),$$
$$\vec{H}_2 = h_0\left(y_1 \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) + y_2 \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0)\right), \quad z > \Delta; \tag{44}$$

$$\vec{E} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s \vec{E}^{[+s]}(\vec{\rho}; \lambda) + z_{-s}\vec{E}^{[-s]}(\vec{\rho}; \lambda)\right), \ \vec{H} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s \vec{H}^{[+s]}(\vec{\rho}; \lambda) + z_{-s}\vec{H}^{[-s]}(\vec{\rho}; \lambda)\right),$$
$$\vec{M} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s \vec{M}^{[+s]}(\vec{\rho}; \lambda) + z_{-s}\vec{M}^{[-s]}(\vec{\rho}; \lambda)\right), \quad 0 < z < \Delta, \tag{45}$$

где поля (43)–(45) удовлетворяют уравнениям (36)–(38); коэффициенты x_j, y_j, z_s, z_{-s} $(j = 1, 2, \ s = 1, \ 2, \ 3, \ 4)$ подлежат определению из граничных условий (39)–(42).

Удовлетворим граничному условию (40), подставляя (45) в (40) с учетом формул (10), (11) при $k = k^{(s)}$:

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz} + p\vec{M}\right)\right|_{z=0} = \left.\sum_{s=1}^{4}\left[z_s\left(\frac{d\vec{M}^{[+s]}}{k_0 dz} + p\vec{M}^{[+s]}\right) + z_{-s}\left(\frac{d\vec{M}^{[-s]}}{k_0 dz} + p\vec{M}^{[-s]}\right)\right]\right|_{z=0} =$$
$$= \sum_{s=1}^{4}\Bigg[z_s\Bigg(\frac{d}{k_0 dz}\left(m_1^{(s)}\vec{M}_m^{(+1)} + m_2^{(s)}\vec{M}_m^{(+2)} - m_2^{(s)}\frac{\lambda}{k^{(s)}}J_m\Phi_m\vec{e}_z\right) +$$
$$+ p\left(m_1^{(s)}\vec{M}_m^{(+1)} + m_2^{(s)}\vec{M}_m^{(+2)} - m_2^{(s)}\frac{\lambda}{k^{(s)}}J_m\Phi_m\vec{e}_z\right)\Bigg) +$$
$$+ z_{-s}\Bigg(\frac{d}{k_0 dz}\left(m_1^{(s)}\vec{M}_m^{(-1)} - m_2^{(s)}\vec{M}_m^{(-2)} + m_2^{(s)}\frac{\lambda}{k^{(s)}}J_m\Phi_m\right) +$$
$$\left.+ p\left(m_1^{(s)}\vec{M}_m^{(-1)} - m_2^{(s)}\vec{M}_m^{(-2)} + m_2^{(s)}\frac{\lambda}{k^{(s)}}J_m\Phi_m\vec{e}_z\right)\Bigg)\Bigg]\right|_{z=0} = 0.$$

Учитывая формулы (12) для базисных полей при $k = k^{(s)}$, запишем уравнение

$$\left.\left(\frac{d\vec{M}}{k_0 dz} + p\vec{M}\right)\right|_{z=0} = \sum_{s=1}^{4}\Bigg[z_s\left(\frac{v^{(s)}}{k_0}\left(m_1^{(s)}\vec{V}_m^{(1)} + m_2^{(s)}\frac{v^{(s)}}{k^{(s)}}\vec{V}_m^{(2)}\right) + p\left(m_1^{(s)}\vec{V}_m^{(1)} + m_2^{(s)}\frac{v^{(s)}}{k^{(s)}}\vec{V}_m^{(2)}\right)\right) +$$
$$+ z_{-s}\left(\frac{v^{(s)}}{k_0}\left(m_1^{(s)}\vec{V}_m^{(1)} + m_2^{(s)}\frac{v^{(s)}}{k^{(s)}}\vec{V}_m^{(2)}\right) + p\left(m_1^{(s)}\vec{V}_m^{(1)} + m_2^{(s)}\frac{v^{(s)}}{k^{(s)}}\vec{V}_m^{(2)}\right)\right)\Bigg]\Phi_m = 0.$$

Приравнивая коэффициенты в данном уравнении при базисных векторах $\vec{V}_m^{(1)}, \vec{V}_m^{(2)}$, придем к соотношениям

$$\sum_{s=1}^{4}\left[z_s\left(\bar{v}^{(s)} + p\right) - z_{-s}\left(\bar{v}^{(s)} - p\right)\right]m_1^{(s)} = 0, \ \sum_{s=1}^{4}\left[z_s\left(\bar{v}^{(s)} + p\right) - z_{-s}\left(\bar{v}^{(s)} - p\right)\right]\frac{\bar{v}^{(s)}}{K_s}m_2^{(s)} = 0. \tag{46}$$

Аналогично из граничного условия (42) получим соотношения

$$\sum_{s=1}^{4}\left[z_s\left(\bar{v}^{(s)} - q\right)F_s^{(+)} - z_{-s}\left(\bar{v}^{(s)} + q\right)F_s^{(-)}\right]m_1^{(s)} = 0,$$
$$\sum_{s=1}^{4}\left[z_s\left(\bar{v}^{(s)} - q\right)F_s^{(+)} - z_{-s}\left(\bar{v}^{(s)} - q\right)F_s^{(-)}\right]\frac{\bar{v}^{(s)}}{K_s}m_2^{(s)} = 0. \tag{47}$$

Запишем касательные составляющие первичного поля (34) и отраженного поля (43) на плоскости $\Gamma_1(z=0)$ в базисе $\vec{V}_m^{(1)}, \vec{V}_m^{(2)}$:

$$\vec{E}_{0\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(E_{0\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + E_{0\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\ \ \vec{H}_{0\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(H_{0\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + H_{0\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m;$$

$$\vec{E}'_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(E'_{1\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + E'_{1\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\ \ \vec{H}'_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(H'_{1\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + H'_{1\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,$$

где

$$E_{0\nu_1}(\lambda) = A(\lambda),\ E_{0\nu_2} = -\bar{\nu}_0 B(\lambda),\ H_{0\nu_1} = h_0 B(\lambda),\ H_{0\nu_2} = -h_0\bar{\nu}_0 A(\lambda);$$

$$E'_{1\nu_1}(\lambda) = x_1(\lambda),\ E'_{1\nu_2} = \bar{\nu}_0 x_2(\lambda),\ H'_{1\nu_1} = h_0 x_2(\lambda),\ H'_{1\nu_2} = h_0\bar{\nu}_0 x_1(\lambda).$$

В результате касательные составляющие суммарного поля $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1,\ \vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$ в полупространстве D_1 на плоскости Γ_1 определяются формулами

$$\vec{E}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(E_{1\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + E_{1\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\ \vec{H}_{1\tau}(\lambda)\Big|_{z=0} = \left(H_{1\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + H_{1\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)}\right)\Phi_m, \qquad (48)$$

где

$$E_{1\nu_1}(\lambda) = x_1(\lambda) + A(\lambda),\ E_{1\nu_2}(\lambda) = \bar{\nu}_0\left(x_2(\lambda) - B(\lambda)\right),$$

$$H_{1\nu_1} = h_0\left(x_2(\lambda) + B(\lambda)\right),\ H_{1\nu_2}(\lambda) = h_0\bar{\nu}_0\left(x_1(\lambda) - A(\lambda)\right),\ \bar{\nu}_0 = \frac{\nu_0}{k_0}.$$

Аналогично для касательных составляющих полей $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ (44) на плоскости $\Gamma_1(z=\Delta)$ получим представление

$$\vec{E}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} = \left(E_{2\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + E_{2\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\ \vec{H}_{2\tau}(\lambda)\Big|_{z=\Delta} = \left(H_{2\nu_1}(\lambda)\vec{V}_m^{(1)} + H_{2\nu_2}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m, \ (49)$$

где

$$E_{2\nu_1}(\lambda) = y_1(\lambda)F_0^{(-)},\ E_{2\nu_2}(\lambda) = -\bar{\nu}_0 y_2(\lambda)F_0^{(-)},\ H_{2\nu_1}(\lambda) = h_0 y_2(\lambda)F_0^{(-)},$$

$$H_{2\nu_2}(\lambda) = -h_0\bar{\nu}_0 y_1(\lambda)F_0^{(-)},\ F_0^{(\pm)} = e^{\pm\nu_0\Delta}.$$

Удовлетворим граничным условиям (39), (41). Запишем касательные составляющие полей (45) в слое D на плоскости $z = \text{const}$ в базисе $\vec{V}_m^{(1)}, \vec{V}_m^{(2)}$, учитывая представление полей (10), (11) при $k = k^{(s)}$:

$$\vec{E}_\tau(\lambda)\Big|_z = \left(E_{\nu_1 z}\vec{V}_m^{(1)} + E_{\nu_2 z}\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s\vec{E}^{[+s]} + z_{-s}\vec{E}^{[-s]}\right)\Big|_z =$$

$$= \sum_{s=1}^{4}\left[z_s\left(e_1^{(s)}\vec{M}_{m\tau}^{(+1)} + e_2^{(s)}\vec{M}_{m\tau}^{(+2)}\right) + z_{-s}\left(e_1^{(s)}\vec{M}_{m\tau}^{(-1)} - e_2^{(s)}\vec{M}_{m\tau}^{(-2)}\right)\right]\Bigg|_z =$$

$$= \sum_{s=1}^{4}\left[z_s\left(e_1^{(s)}\vec{V}_m^{(1)} + e_2^{(s)}\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}\vec{V}_m^{(2)}\right)F_s^{(+)}(z) + z_{-s}\left(e_1^{(s)}\vec{V}_m^{(1)} + e_2^{(s)}\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}\vec{V}_m^{(2)}\right)F_s^{(-)}(z)\right]\Phi_m, \qquad (50)$$

$$F_s^{(\pm)}(z) = e^{\pm\nu^{(s)}z}.$$

Из равенств (50) следуют формулы

$$E_{\nu_1 z} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F_s^{(+)}(z) + z_{-s}F_s^{(-)}(z)\right)e_1^{(s)},$$

$$E_{\nu_2 z} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F_s^{(+)}(z) + z_{-s}F_s^{(-)}(z)\right)\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}e_2^{(s)}.$$

Для магнитного поля получим представление

$$\vec{H}_\tau(\lambda)\big|_z = \left(H_{\nu_1 z}\vec{V}_m^{(1)} + H_{\nu_2 z}(\lambda)\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m, \tag{51}$$

где

$$H_{\nu_1 z} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F_s^{(+)}(z) + z_{-s}F_s^{(-)}(z)\right)h_1^{(s)},$$

$$H_{\nu_2 z} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F_s^{(+)}(z) + z_{-s}F_s^{(-)}(z)\right)\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}h_2^{(s)}.$$

Касательные составляющие (50), (51) на плоскостях Γ_1 и Γ_2 имеют вид

$$\begin{gathered}\vec{E}_\tau\big|_{z=0} = \left(E_{\nu_1 0}\vec{V}_m^{(1)} + E_{\nu_2 0}\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\ \vec{H}_\tau\big|_{z=0} = \left(H_{\nu_1 0}\vec{V}_m^{(1)} + H_{\nu_2 0}\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\\ \vec{E}_\tau\big|_{z=\Delta} = \left(E_{\nu_1\Delta}\vec{V}_m^{(1)} + E_{\nu_2\Delta}\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\ \vec{H}_\tau\big|_{z=\Delta} = \left(H_{\nu_1\Delta}\vec{V}_m^{(1)} + H_{\nu_2\Delta}\vec{V}_m^{(2)}\right)\Phi_m,\end{gathered} \tag{52}$$

где

$$E_{\nu_1 0} = \sum_{s=1}^{4}(z_s + z_{-s})e_1^{(s)},\ E_{\nu_2 0} = \sum_{s=1}^{4}(z_s + z_{-s})\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}e_2^{(s)},$$

$$H_{\nu_1 0} = \sum_{s=1}^{4}(z_s + z_{-s})h_1^{(s)},\quad H_{\nu_2 0} = \sum_{s=1}^{4}(z_s + z_{-s})\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}h_2^{(s)},$$

$$E_{\nu_1\Delta} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F^{(+s)} + z_{-s}F^{(-s)}\right)e_1^{(s)},\quad E_{\nu_2\Delta} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F^{(+s)} + z_{-s}F^{(-s)}\right)\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}e_2^{(s)},$$

$$H_{\nu_1\Delta} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F^{(+s)} + z_{-s}F^{(-s)}\right)h_1^{(s)},$$

$$H_{\nu_2\Delta} = \sum_{s=1}^{4}\left(z_s F^{(+s)} + z_{-s}F^{(-s)}\right)\frac{\nu^{(s)}}{k^{(s)}}h_2^{(s)},$$

$$F^{(\pm s)} = F_s^{(\pm)}(\Delta) = e^{\pm\nu^{(s)}z}.$$

Введем вспомогательные векторы, образованные из компонент полей (48), (49):

$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} E_{1\nu_1}\\ H_{1\nu_2}\\ E_{1\nu_2}\\ H_{1\nu_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + A\\ h_0\bar{v}_0(x_1 - A)\\ \bar{v}_0(x_2 - B)\\ h_0(x_2 + B)\end{pmatrix},\ \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} E_{2\nu_1}\\ H_{2\nu_2}\\ E_{2\nu_2}\\ H_{2\nu_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1F_0^{(-)}\\ -h_0\bar{v}_0y_1F_0^{(-)}\\ -\bar{v}_0y_2F_0^{(-)}\\ h_0y_2F_0^{(-)}\end{pmatrix}. \tag{53}$$

Введем также вспомогательные векторы из компонент полей (52):

$$\vec{W}_1 = \left(E_{\nu_1 0}, H_{\nu_2 0}, E_{\nu_2 0}, H_{\nu_1 0}\right)_{\mathrm{T}},\ \vec{W}_2 = \left(E_{\nu_1\Delta}, H_{\nu_2\Delta}, E_{\nu_2\Delta}, H_{\nu_1\Delta}\right)_{\mathrm{T}},$$

$$\vec{z}_+ = (z_1, z_2, z_3, z_4)^{\mathrm{T}},\ \vec{z}_- = (z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, z_{-4})^{\mathrm{T}}$$

и матрицы

$$\hat{P}_j = \left\{P_{ls}^{(j)}\right\}, \hat{M}_j = \left\{M_{ls}^{(j)}\right\}, \quad j = 1, 2;\ l, s = 1, 2, 3, 4;$$

$$P_{1s}^{(1)} = e_1^{(s)},\ P_{2s}^{(1)} = \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} h_2^{(s)},\ P_{3s}^{(1)} = \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} e_2^{(s)},\ P_{4s}^{(1)} = h_1^{(s)};$$

$$M_{1s}^{(1)} = e_1^{(s)},\ M_{2s}^{(1)} = \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} h_2^{(s)},\ M_{3s}^{(1)} = \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} e_2^{(s)},\ M_{4s}^{(1)} = h_1^{(s)}; \tag{54}$$

$$P_{1s}^{(2)} = F^{(+s)} e_1^{(s)},\ P_{2s}^{(2)} = F^{(+s)} \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} h_2^{(s)},\ P_{3s}^{(2)} = F^{(+s)} \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} e_2^{(s)},\ P_{4s}^{(2)} = F^{(+s)} h_1^{(s)};$$

$$M_{1s}^{(2)} = F^{(-s)} e_1^{(s)},\ M_{2s}^{(2)} = F^{(-s)} \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} h_2^{(s)},\ M_{3s}^{(2)} = F^{(-s)} \frac{v^{(s)}}{k^{(s)}} e_2^{(s)},\ M_{4s}^{(2)} = F^{(-s)} h_1^{(s)}.$$

Используя компоненты касательных векторов (52), векторы $\vec{z}_+$, $\vec{z}_-$ и матрицы (54), запишем векторы $\vec{W}_j$ в матричном виде. Получим формулу

$$\vec{W}_j = \hat{P}_j \vec{z}_+ + \hat{M}_j \vec{z}_-. \tag{55}$$

Скалярные соотношения (46), (47) запишем в матричном виде

$$\hat{Q}\vec{z}_+ = \hat{L}\vec{z}_-, \tag{56}$$

где матрицы $\hat{Q} = \{Q_{ls}\}, \hat{L} = \{L_{ls}\},\ l, s = 1, 2, 3, 4;$

$$Q_{1s} = \left(\overline{v}^{(s)} + p\right) m_1^{(s)},\ Q_{2s} = \left(\overline{v}^{(s)} + p\right) \frac{\overline{v}^{(s)}}{K_s} m_2^{(s)},$$

$$Q_{3s} = \left(\overline{v}^{(s)} - q\right) F_s^{(+)} m_1^{(s)},\ Q_{4s} = \left(\overline{v}^{(s)} - q\right) F_s^{(+)} \frac{\overline{v}^{(s)}}{K_s} m_2^{(s)};$$

$$L_{1s} = \left(\overline{v}^{(s)} - p\right) m_1^{(s)},\ L_{2s} = \left(\overline{v}^{(s)} - p\right) \frac{\overline{v}^{(s)}}{K_s} m_2^{(s)},$$

$$L_{3s} = \left(\overline{v}^{(s)} + q\right) F_s^{(-)} m_1^{(s)},\ L_{4s} = \left(\overline{v}^{(s)} + q\right) F_s^{(-)} \frac{\overline{v}^{(s)}}{K_s} m_2^{(s)}.$$

Удовлетворим граничным условиям (39), (41), сравнивая касательные составляющие (53), (55) полей на плоскостях Γ_1 и Γ_2:

$$\vec{U}_1 = \hat{P}_1 \vec{z}_+ + \hat{M}_1 \vec{z}_-, \quad \vec{U}_2 = \hat{P}_2 \vec{z}_+ + \hat{M}_2 \vec{z}_-. \tag{57}$$

Из уравнений (57) с помощью уравнения (56) исключим вектор $\vec{z}_-$:

$$\vec{U}_1 = \left(\hat{P}_1 + \hat{M}_1 \hat{L}^{-1} \hat{Q}\right) \vec{z}_+, \quad \vec{U}_2 = \left(\hat{P}_2 + \hat{M}_2 \hat{L}^{-1} \hat{Q}\right) \vec{z}_+. \tag{58}$$

Из первого уравнения (58), используя второе уравнение (58), исключим вектор $\vec{z}_+$:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2\nu_1} \\ H_{2\nu_2} \\ E_{2\nu_2} \\ H_{2\nu_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1\nu_1} \\ H_{1\nu_2} \\ E_{1\nu_2} \\ H_{1\nu_1} \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где $\hat{C} = \{C_{ls}\} = \left(\hat{P}_1 + \hat{M}_1 \hat{L}^{-1} \hat{Q}\right)\left(\hat{P}_2 + \hat{M}_2 \hat{L}^{-1} \hat{Q}\right)^{-1}$.

Подставим векторы $\vec{U}_j$ (53) в (59) и получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд x_j, y_j :

$$\begin{gathered} C_{11} y_1 - C_{12} h_0 \bar{v}_0 y_1 - C_{13} \bar{v}_0 y_2 + C_{14} h_0 y_2 = (x_1 + A) / F_0^{(-)}, \\ C_{21} y_1 - C_{22} h_0 \bar{v}_0 y_1 - C_{23} \bar{v}_0 y_2 + C_{24} h_0 y_2 = h_0 \bar{v}_0 (x_1 - A) / F_0^{(-)}, \\ C_{31} y_1 - C_{32} h_0 \bar{v}_0 y_1 - C_{33} \bar{v}_0 y_2 + C_{34} h_0 y_2 = \bar{v}_0 (x_2 - B) / F_0^{(-)}, \\ C_{41} y_1 - C_{42} h_0 \bar{v}_0 y_1 - C_{43} \bar{v}_0 y_2 + C_{44} h_0 y_2 = h_0 (x_2 + B) / F_0^{(-)}. \end{gathered} \tag{60}$$

Комбинируя уравнения (60), исключим величины x_1, x_2. Получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд y_1, y_2 :

$$Q_{11} y_1 + Q_{12} y_2 = 2A,\ Q_{21} y_1 + Q_{22} y_2 = 2B, \tag{61}$$

где

$$Q_{11} = C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12} - \frac{1}{h_0 \bar{v}_0} C_{21} + C_{22}, \quad Q_{12} = -\bar{v}_0 C_{13} + h_0 C_{14} + \frac{1}{h_0} C_{23} - \frac{1}{\bar{v}_0} C_{24},$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{\bar{v}_0} C_{31} + h_0 C_{32} + \frac{1}{h_0} C_{41} - \bar{v}_0 C_{42}, \quad Q_{22} = C_{33} - \frac{h_0}{\bar{v}_0} C_{34} - \frac{\bar{v}_0}{h_0} C_{43} + C_{44}.$$

Разрешим систему уравнений (61):

$$y_1 = \frac{2}{d}(Q_{22} A - Q_{12} B),\ y_2 = \frac{2}{d}(Q_{11} B - Q_{21} A),\ d = Q_{11} Q_{22} - Q_{12} Q_{21}.$$

Амплитуды x_1, x_2 определим из первого и четвертого уравнений (60):

$$\begin{gathered} x_1 = -A + \frac{2}{d} F_0^{(-)} \Big[\big((C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12}) Q_{22} - (h_0 C_{14} - \bar{v}_0 C_{13}) Q_{21} \big) A + \\ + \big((h_0 C_{14} - \bar{v}_0 C_{13}) Q_{11} - (C_{11} - h_0 \bar{v}_0 C_{12}) Q_{12} \big) B \Big], \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_2 = -B + \frac{2}{h_0 d} F_0^{(-)} \Big[\big((C_{41} - h_0 \bar{v}_0 C_{42}) Q_{22} - (h_0 C_{44} - \bar{v}_0 C_{43}) Q_{21} \big) A + \\ + \big((h_0 C_{44} - \bar{v}_0 C_{43}) Q_{11} - (C_{41} - h_0 \bar{v}_0 C_{42}) Q_{12} \big) B \Big]. \end{gathered}$$

Амплитуды отраженного и прошедшего через экран полей определены. Амплитуды полей (45) в слое экрана не вычисляем, так как практический интерес представляют отраженные и прошедшие через экран поля. ■

Следствие. *На поверхностях плоского экрана из пермаллоя при воздействии первичного поля с осевой симметрией (34) выполнены двухсторонние нелокальные граничные условия, связывающие электромагнитные поля по обе стороны экрана на плоскостях* Γ_1 *и* Γ_2 *:*

$$\vec{U}_1(M_1) = \hat{C}\vec{U}_2(M_2),$$

где

$$M_1(x,y,0) \in \Gamma_1,\ M_2(x,y,\Delta) \in \Gamma_2,\ \vec{U}_j = \left(E_{j\nu_1}, H_{j\nu_2}, E_{j\nu_2}, H_{j\nu_1}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{C} = \hat{C}(m,\lambda,\omega;\dot{a},\dot{g},\dot{\gamma},\dot{\sigma},\Delta;H_0,M_0) = \left(\hat{P}_1 + \hat{M}_1\hat{L}^{-1}\hat{Q}\right)\left(\hat{P}_2 + \hat{M}_2\hat{L}^{-1}\hat{Q}\right)^{-1},$$

компоненты матриц $\hat{P}_j, \hat{M}_j$ *задаются выражениями (54), матрицы* $\hat{L}, \hat{Q}$ *определены в соотношении (56).*

Заключение. В статье разработана методика моделирования процессов проникновения последовательностей монохроматических электромагнитных полей с осевой симметрией, зависящих от действительного параметра λ, через пленочный плоский однослойный экран, выполненный из пермаллоя. Аналитически решена краевая задача с дополнительными дифференциальными граничными условиями для поля намагниченности на поверхностях экрана, обеспечивающими единственность решения задачи, и вычислены амплитуды отраженного и прошедшего через экран электромагнитных полей. Новизна работы состоит в том, что метод решения краевой задачи с использованием дополнительных граничных условий позволил получить алгебраическое дисперсионное уравнение четвертой степени с коэффициентами, зависящими от действительного параметра λ и дискретного параметра m. С помощью четырех комплексных корней дисперсионного уравнения, зависящих от параметров λ и m, определены четыре независимых электромагнитных поля с осевой симметрией, распространяющихся в слое пермаллоя в прямом направлении, и четыре поля – в обратном направлении. Построены двухсторонние граничные условия, связывающие поля по обе стороны экрана. Результаты работы могут быть использованы при практическом создании экранов с намагниченностью для защиты от воздействия внешних симметричных пучков электромагнитных волн.

Список использованных источников

1. Виноградов, А. П. Электродинамика композитных материалов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
2. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
3. Закономерности проникновения электромагнитных волн через металлические магнитные пленки / А. Б. Ринкевич [и др.] // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, вып. 9. – С. 96–106.
4. Ерофеенко, В. Т. Математическая модель экранирования монохроматических электромагнитных полей плоскими экранами из пермаллоя / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 7–18.
5. Шевченко, В. В. О прохождении плоских волн через границу двух поглощающих сред / В. В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 2004. – Т. 49, № 9. – С. 1048–1053.
6. Ерофеенко, В. Т. Моделирование электродинамического контакта двух материалов при воздействии электромагнитных волн / В. Т. Ерофеенко // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 3. – С. 314–319.
7. Ерофеенко, В. Т. Модели граничных условий на композиционных экранах для электромагнитных полей с осевой симметрией / В. Т. Ерофеенко // Весцi Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2010. – № 2. – С. 41–45.
8. Ерофеенко, В. Т. Преобразование пучков электромагнитных волн при прохождении через экран из кирального метаматериала / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко// Информатика. – 2013. – № 1(37). – С. 5–17.
9. Бондаренко, В. Ф. Экранирование импульсных электромагнитных полей многослойными плоскопараллельными экранами с чередующимися магнитными и немагнитными слоями / В. Ф. Бондаренко, В. Т. Ерофеенко // Физические основы приборостроения. – 2017. – Т. 6, № 2. – С. 53–66.
10. Ерофеенко, В. Т. Решение задачи экранирования круговых пучков электромагнитных волн плоским магнитодиэлектрическим экраном / В. Т. Ерофеенко, А. И. Урбанович // Труды XXIX Междунар. конф.

«Радиационная физика твердого тела», Севастополь, 08–13 июля 2019 г. ; под ред. Г. Г. Бондаренко. – М. : ФГБНУ «НИИПМТ», 2019. – С. 352–362.

11. Ерофеенко, В. Т. Двухсторонние граничные условия нестационарной электродинамики на тонких проводящих оболочках / В. Т. Ерофеенко, Е. П. Красковская // Радиотехника и электроника. – 2001. – Т. 46, № 11. – С. 1293–1298.

12. Ерофеенко, В. Т. Моделирование двухсторонних граничных условий для акустических волн на упругом экране / В. Т. Ерофеенко // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 76–84.

13. Ерофеенко, В. Т. Моделирование поверхностных электромагнитных волн с осевой симметрией на биизотропном однослойном плоском экране / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 63–76.

References

1. Vinogradov A. P. Jelektrodinamika kompozitnyh materialov. *Electrodynamics of Composite Materials*. Moscow, Editorial URSS, 2001, 206 p. (in Russian).

2. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. Analiticheskoe modelirovanie v jelektrodinamike. *Analytical Modeling in Electrodynamics*. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet, 2010, 304 p. (in Russian).

3. Rinkevich A. B., Perov D. V., Vas‘kovskiy V. O., Lepalovskiy V. N. Zakonomernosti proniknovenija jelektromagnitnyh voln cherez metallicheskie magnitnye plenki [Regularitys of a penetration electromagnetic waves across the metallic magnetic films]. Zhurnal tehnicheskoj fiziki [*Technical Physics*], 2009, vol. 79, no. 9, pp. 96–106 (in Russian).

4. Erofeenko V. T. Matematicheskaja model' jekranirovanija monohromaticheskih jelektromagnitnyh polej ploskimi jekranami iz permalloja [Mathematical model of shielding monochromatic electromagnetic fields by means of plane screens made of permalloy]. Informatika [*Informatics*], 2019, vol. 16, no. 2, pp. 7–18 (in Russian).

5. Schevchenko V. V. O prohozhdenii ploskih voln cherez granicu dvuh pogloshhajushhih sred [About pass of a plane waves through a boundary of the two absorbing medium]. Ragiotehnika i jelektronika [*Journal of Communications Technology and Electronics*], 2004, vol. 49, no. 9, pp. 1048–1053 (in Russian).

6. Erofeenko V. T. Modelirovanie jelektrodinamicheskogo kontacta dvuh materialov pri vozdeojstvii electromagnitnyh voln [Modeling of the elektrodynamic contact of two materials at the action of electromagnetic waves]. Radiotehnika i jelektronika [*Journal of Communications Technology and Electronics*], 2012, vol. 57, no. 3, pp. 314–319 (in Russian).

7. Erofeenko V. T. Modeli granichnyh uslovij na kompozicionnyh ekranah dlja elektromagnitnyh polej s osevoj simmetrieoj [Models for boundary conditions on the composite screens forelectromagnetic fields with axial symmetry]. Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matjematychnyh navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematical Series*], 2010, no. 2, pp. 41–45 (in Russian).

8. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Preobrazovanie puchkov elekrtomagnitnyh voln pri prohozhdenii cherez ekran iz kiral’nogo metamateriala [Transformation of beams of electromagnetic waves passing through a chiral metamaterialscreen]. Informatika [*Informatics*], 2013, no. 1(37), pp. 5–17 (in Russian).

9. Bondarenko V. F., Erofeenko V. T. Ekranirovanie impul’snyh jelektromagnitnyh polej mnogoslojnymi ploskoparallel’nymi jekranami s cheredujushhimisja magnitnymi i nemagnitnymi slojami [The shielding of impulse electromagnetic fields by multilayer plane-parallel screens with alternating magnetic and non-magnetic layers]. Fizicheskie osnovy priborostroenija [*Physikal Base of the Apparatus Construction*], 2017, vol. 6, no. 2, pp. 53–66 (in Russian).

10. Erofeenko V. T., Urbanovich A. I. Reschenie zadachi ekranirovanija krugovyh puchkov elektromagnitnyh voln ploskim magnitodielektricheskim jekranom [Solution of the problems of shielding of the beams of electromagnetic waves by means of plane magnetodielectrical screen]. Trudy XXIX Mezhdunarodnoj konferencii "Radiacionnaja fizika tvjordogo tela", Sevastopol’, 08–13 ijulja 2019 g. [*Works of the XXIX International Conference "Radiative Physics of the Rigid Body", Sevastopol, 08–13 July 2019*], Moskva, Federal'noe gosudarstvennoe bjudzhetnoe nauchnoe uchrezhdenie "Nauchno-issledovatel'skij institut perspektivnyh materialov i tehnologij", 2019, pp. 352–362 (in Russian).

11. Erofeenko V. T., Kraskovskaja E. P. Dvuhstoronnie granichnye uslovija nestacionarnoj jelektrodinamiki na tonkih provodjashhih obolochkah [The two-sided boundary conditions of nonstationary electrodynamics on the thin conductivity hulls]. Radiotehnika i jelektronika [*Journal of Communications Technology and Electronics*], 2001, vol. 46, no. 11, pp. 1293–1298 (in Russian).

12. Erofeenko V. T. Modelirovanie dvuhstoronnih granichnyh uslovij dlja akusticheskih voln na uprugom jekrane [Modeling of the two-sided boundary conditions for acoustic waves on a elastic screen]. Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matjematychnyh navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematical Series*], 2010, no. 4, pp. 76–84 (in Russian).

13. Erofeenko V. T. Modelirovanie poverchnostnyh elekrtomagnitnyh voln s osevoj simmetrieoj na biizotropnom odnoslojnom ploskom ekrane [Modeling of surface electromagnetic waves with axial symmetry on a bi-isotropic one-layer plane screen]. Informatika [*Informatics*], 2019, vol. 16, no. 4, pp. 63–76 (in Russian).

Информация об авторе

Ерофеенко Виктор Тихонович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов защиты информации, Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики».
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Information about the author

Viktor T. Erofeenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher Associate of the Research Laboratory of Mathematical Methods of Information Security, Establishment of the Belarusian State University "Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus.
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by